МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

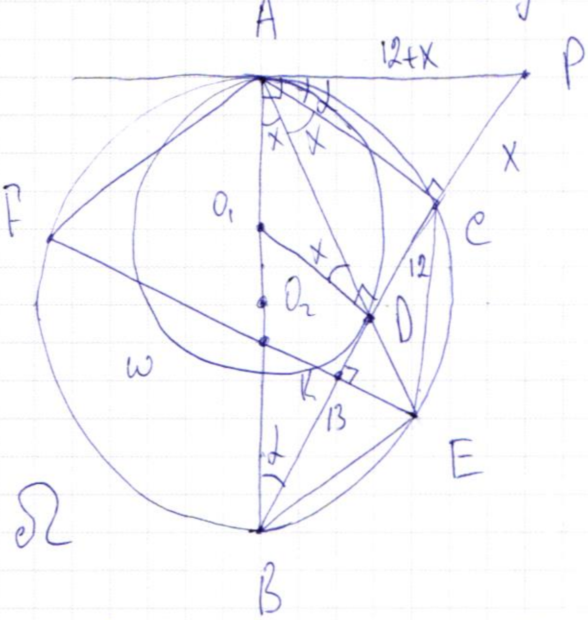
$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



Решение: Т.к. ω и Ω окружности касаются, то точка касания и центры O_1; O_2 лежат на одной прямой.

Пуст касательная в точке A и в точке D окружности ω пересек. в точке P. тогда $PA = PD$.

Пусть $PC = x \Rightarrow PA = 12 + x$. $\angle ABC = \angle CAP$ т.к. PA касательная к описанной $\triangle ABC$. Тогда имеем

$\triangle ABP \sim \triangle CAP \Rightarrow$ $\frac{BP}{AP} = \frac{AP}{PC} \Leftrightarrow \frac{25+x}{12+x} = \frac{12+x}{x}$

$\Rightarrow (25+x)x = (12+x)^2$

$25x + x^2 = 144 + 24x + x^2$

$x = 144$

$AB = \sqrt{BP^2 - AP^2} = \sqrt{(25+144)^2 - (12+144)^2} =$

$= \sqrt{13 \cdot (37 + 288)} = \sqrt{13 \cdot 5 \cdot 65} = 65, \Rightarrow AO_2 = \frac{65}{2}$

Т.к. BD - касательная к ω то $O_1D \perp BD \Rightarrow$

$O_1D \parallel AC$ (т.к AB диаметр. то $\angle ACB = 90°$)

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{13}{25} = \frac{BO_1}{BA} \Leftrightarrow BO_1 = \frac{65 \cdot 13}{25} = \frac{169}{5}$

Задача 4

$AO_1 = AB - BO_1 = 65 - \frac{169}{5} = \frac{325-169}{5} = \frac{156}{5}$

Пусть $\angle O_1DA = x$. т.к. $O_1D \parallel AC \Rightarrow \angle O_1DA = \angle DAC = x$

Т.к. A, B, E, C, на одной ω Ω то. $\angle EAC = \angle EBC = x =$

$= \angle EAB = \angle ECB$. т.е $\triangle ECB$ - равнобедренный. тогда ~~перпен.~~ высота из точки E $\triangle ECB$ проходит через O_2.

Т.е. EF - диаметр

Т.к $FD \parallel O_1D \Rightarrow BD \cap EF = K$.

$\triangle BKO_2 \sim \triangle BDO_1 \Rightarrow \frac{BK}{BD} = \frac{BO_2}{BO_1}$

$\frac{BK}{13} = \frac{\frac{65}{2}}{\frac{169}{5}} \Rightarrow BK = \frac{13 \cdot 65 \cdot 5}{2 \cdot 169} = \frac{25}{2}$

$KD = 13 - \frac{25}{2} = \frac{1}{2}$; $KC = 12\frac{1}{2}$. Т.к $AC \parallel EF$ то

$ACEF$ - равнобокая трапеция KC - высота.

$S_{AFE} = \frac{1}{2} KC \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 65 = \frac{1625}{4}$

В $\triangle BAC \Rightarrow \frac{\sin 2x}{25} = \frac{1}{AB} \Rightarrow \sin 2x = \frac{5}{13}$; $\sin(\pi - 2x) = \frac{5}{13}$

~~$2x = \arcsin\frac{5}{13}$~~ $\pi - 2x = \angle E = \arcsin\frac{5}{13}$

$\angle FEC = \angle EFA = \frac{\angle E}{2} = \frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}$

Ответ радиус $\Omega = \frac{65}{2}$ радиус $\omega = \frac{156}{5}$.

$\angle AFE = \frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}$. $S_{\triangle AFE} = \frac{1625}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$b\to 1$: $f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0. \Rightarrow a\to \frac{1}{b} \Rightarrow f(1)=f(\frac{1}{b})+f(b)$

$f(2)=\lfloor \frac{2}{4} \rfloor=0$; $f(3)=0$; $f(5)=\lfloor\frac{5}{4}\rfloor=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$

$f(13)=3$, $f(17)=4$; $f(19)=4$, $f(23)=5$;

$a\to 2$: $f(2\cdot b)=f(2)+f(b) \Rightarrow f(b)=f(2b) \Rightarrow f(2b)=f(4b)=$
$=f(8b)=f(16b)$

$0=f(2)=f(4)=f(8)=f(16)$. $0=f(3)=f(6)=f(12)=f(24)$

$a\to 3$: $f(3b)=f(b) \Rightarrow f(b)=f(3b)=f(9b)=f(27b)$

$1=f(5)=f(10)=f(20)$. $1=f(7)=f(14)=f(28)$.

$2=f(11)=f(22)$ $3=f(13)=f(26)$

$0=f(3)=f(9)=f(27)$ $1=f(5)=f(3\cdot5)=f(15)$

$f(18)=f(2\cdot 9)=f(9)=0$. $1=f(7)=f(21)$

$\boxed{a\to \frac{1}{b}: \ -f(\frac{1}{b})=f(b)}$ $f(25)=2$.

п. 1. Если $f(x)=0$, $f(y)=0$ $x,y\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow f(x\cdot\frac{1}{y})=$

$=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)=0$. т.е. $f(\frac{x}{y})=0$.

$a\to\frac{1}{b}$: $0=f(1)=f(\frac{1}{b})+f(b) \Rightarrow -f(b)=f(\frac{1}{b})$.

п. 2. Если $f(x)=0$; $f(y)\neq 0$. ~~или~~ $x,y\in\mathbb{N}$.

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$ ~~$(f(\frac{y}{x})=f(y)+f(\frac{1}{x}))$~~

$f(\frac{x}{y})=-f(y)\neq 0$. т.к $4\le y\le 28$ $f(y)\geq 0$. то $-f(y)<0$.

п. 3. $f(x) \neq 0$. $f(y) = 0$. : $f\left(\frac{x}{y}\right) = -f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$.

(т.к. $f\left(\frac{y}{x}\right) < 0$ по п. 2)

4. $f(x) \neq 0$. $f(y) \neq 0$. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f(x) - f(y)$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(15) = 1$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(28) = 1$

15

Пары: (x, y): $\begin{pmatrix} 5 & & 11 \\ 7 & & 13 \\ 10 & & 17 \\ 15 & , & 19 \\ 20 & & 22 \\ 21 & & 23 \\ 28 & & 25 \\ & & 26 \end{pmatrix}$

$7 \cdot 8 = 56$.

$\begin{pmatrix} 11 & & 13 \\ 22 & , & 17 \\ 25 & & 19 \\ & & 23 \\ & & 26 \end{pmatrix}$

$3 \cdot 5 = 15$.

$\begin{pmatrix} 13 & & 17 \\ 26 & , & 19 \\ & & 23 \end{pmatrix}$

$2 \cdot 3 = 6$.

$\begin{pmatrix} 17 & & \\ 19 & , & 23 \end{pmatrix}$

$2 \cdot 1 = 2$.

$56 + 15 + 6 + 2 = 79$.

все остальные $f(x)$, $4 \leq x \leq 28$ равны 0.

В п. 2. ~~$f(x) \neq 0$~~ $f(x) = 0$, $f(y) \neq 0$. ~~и~~ имеем.

$10 \cdot 15 = 150$ пар

10 чисел $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = 0$. (~~2,3~~, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 24, 27)

Ответ: $150 + 79 = 229$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 3.

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ $\Big| : x$.

$\boxed{26x-x^2>0} \Rightarrow \boxed{26>x>0}$. Если $x \leq 0 \Rightarrow$.

$26x-x^2 \neq 0$. $26x-x^2 \leq 0$.

$x \neq 0$; $x \neq 26$. $26x \leq 0$. $26x \leq x^2$. $x^2 \geq 0$.

~~Делим неравенство на x.~~ и модули можно убрать.

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2=a; >0$ $a^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$

$a=5^y$. $5^{y\cdot\log_5 12}+5^y \geq 13^{\log_5 5^y}$

$12^y+5^y \geq 13^y$

$y=2$ $144+25=169$.

$a=25$.

$26x-x^2=25$.

$x^2-26x+25=0$.

$D=26^2-100=576=24^2$

$x_1=\frac{26-24}{2}=1$ $x_2=25$.

Ответ: $x_1=1$. $x_2=25$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90. \end{cases}$$

$y-6=a;\quad x-1=b.$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases} \qquad \sqrt{ab}\geq 0 \Rightarrow ab\geq 0 \Rightarrow \frac{b}{a}\geq 0, \ a\neq 0$$

Пусть $a=0 \Rightarrow -6b=0;\ b=0.$ но $9b^2+a^2\neq 90$, $0\neq 90.$

Зн. $a\neq 0.$

$a-6b=\sqrt{ab} \ \Big|:a \Rightarrow 1-6\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

$0\leq\sqrt{\frac{b}{a}}=p \qquad 0\leq\frac{b}{a}=p^2 \qquad 1-6p^2=p$

$6p^2+p-1=0.$

$D=1+24=25.$

$p_1=\frac{-1+25}{12}=2. \quad p_2<0$ т.к.

$\sqrt{\frac{b}{a}}=2. \qquad \frac{b}{a}=4;\quad b=4a \qquad b^2=16a^2$

$9\cdot 16a^2+a^2=90.$

$a^2=\frac{90}{2304}=\frac{45}{1152} \qquad b^2=\frac{16\cdot 45}{1152}=\frac{45}{72}$

$a^2=\frac{5}{128} \qquad a_1=\sqrt{\frac{5}{128}} \quad b_1=\sqrt{\frac{5}{8}},\quad a_2=-\sqrt{\frac{5}{128}};\ b_2=-\sqrt{\frac{5}{8}}$

Ответ (x,y): $\left(\sqrt{\frac{5}{8}}+1,\ \sqrt{\frac{5}{128}}+6\right);\ \left(1-\sqrt{\frac{5}{8}},\ 6-\sqrt{\frac{5}{128}}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$(8-6x)(3x+2)$

$x-1 = 44-24$

$x = 44-23$

$9(44-24)^2$

576

288

144

72

25

$16 \cdot 16 = 96 + 16 = 256$

$256 \cdot 9 = 2304$

$2304 - 90 = 2214$

$1152 : 16 = 72$

$1152 : 9 = 128$

$12^2 + 2$

$2304\, a^2 = 90$

$128 : 16 = 8$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$(y-6x)^2=|xy-6x-y+6| \Rightarrow \quad y^2-12xy+36x^2=|xy-6x-y+6|$$

$$9(x-1)^2-81=9-(y-6)^2$$

$$\cancel{9((x-1)^2-9)=(9-y)(3+y) \quad (15-y)(3+y)}$$

$$9(x-4)(x+2)=(9-y)(y-3)$$

$$9(x-1)^2-9=81-(y-6)^2$$

$$9(x-1)x=(15-y)(3+y)$$

$$(x-1)^2=(90-(y-6)^2)/9$$

$$x=\frac{\sqrt{90-(y-6)^2}}{3}+1$$

О.Д.З:

$\sqrt{(x-1)(y-6)} \geq 0.$

$(x-1)(y-6)\geq 0.$

$$y-2\sqrt{90-(y-6)^2}-6=\sqrt{\frac{\sqrt{90-(y-6)^2}}{3}\cdot(y-6)}$$

$$y-6x=y-6-(6x-6)=(y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}$$

$y-6=a \qquad x-1=b.$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases} \qquad a^2=90-9b^2$$

1. $a=0: \Rightarrow -6b=0; \Rightarrow b=0.$ $\varnothing$ т.к. $9\cdot0^2+0^0\neq 90.$ $0\neq 90.$

т.е. $a\neq 0.$

$$a-6b=\sqrt{ab} \;\Big|:a \quad \Rightarrow \quad 1-6\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$\sqrt{\frac{b}{a}}=p.$

$1-6p^2=p; \qquad 6p^2+p-1=0$

$D=$

черновик ☑ чистовик ☒
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

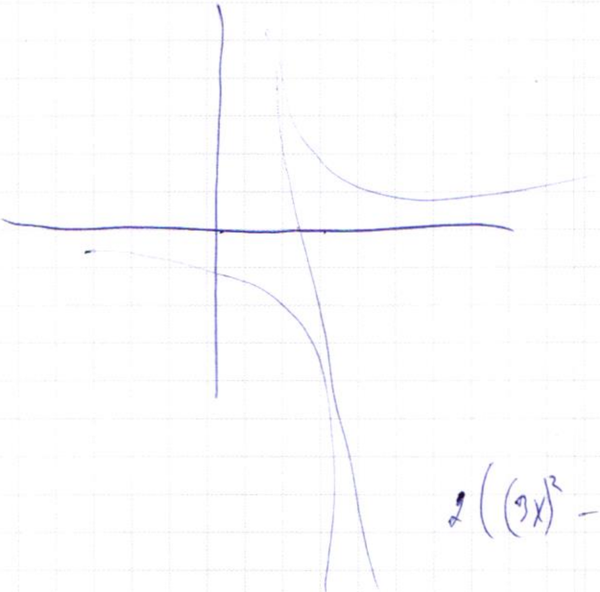
ШИФР

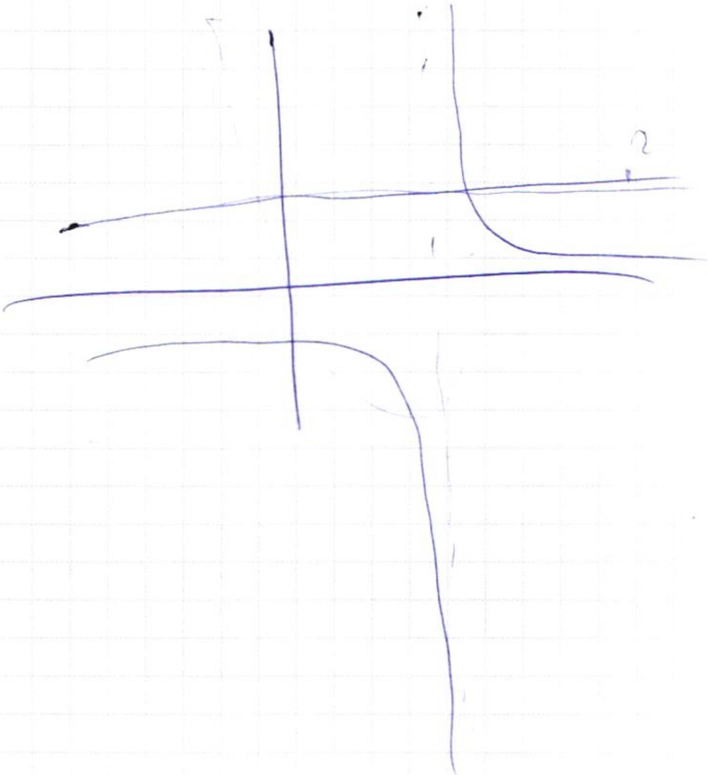
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$-\frac{2(3x-2)-4}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2} = -2+\frac{4}{\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}}$$





$2((3x)^2 -$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f: Q^+$ $f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = [p/4]$

(x,y) $4 \le x \le 28$ $4 \le y \le 28$ $f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(3 \cdot 5) = [\frac{9}{4}]$ $f(p \cdot 1) = f(p) + f(1)$

$f(pq) = [\frac{p}{4}] + [\frac{q}{4}]$

$a \to \frac{1}{b}$ $f(1) = f(\frac{1}{b}) + f(b)$

$f(b) = -f(\frac{1}{b})$

$f(a) = 0.$ $f(ab) = f(b)$

$f(4b) = f(3b) = f(2b) = f(b)$

x, y $\frac{25 \cdot 25}{2}$ $\frac{25 \cdot 24}{2}$

25 $\frac{4}{8}$ $f(\frac{1}{2})$

$f(1) = 0.$
$f(2) = 0.$
$f(3) = 0.$
$f(5) = 1$
$f(7) = 1$
$f(11) = 2$
$f(13) = 3$
$f(17) = 4$
$f(19) = 4$
$f(23) = 5$
$f($

$f(a^2) = 2f(a)$ $f(\frac{a}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b})$

$f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(\frac{1}{3}) = 0.$ $f(4) = 0.$ $f(\frac{1}{4}) = 0$

$f(a) = 0$ $f(b) = 0$ $f(6) = 0.$

$f(8) = 0$

$f(\frac{a}{b}) = 0$ $f(10) = 1.$

$f(a) = 0$ $f(b) \ne 0.$

$f(\frac{a}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b}).$
0

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 3+9+y^2-12y+36=90$$

$$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$$

$$9(x-1)^2+(y-6)^2=90.$$

$(x-1)=a \quad y-6=b \qquad 9(x-1)^2=90-(y-6)^2$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$

$\operatorname{tg}\alpha=?$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha$

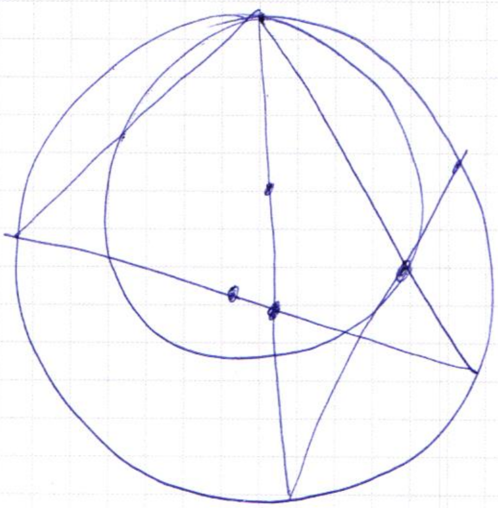
$\cos\alpha\neq 0.$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$2\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha$

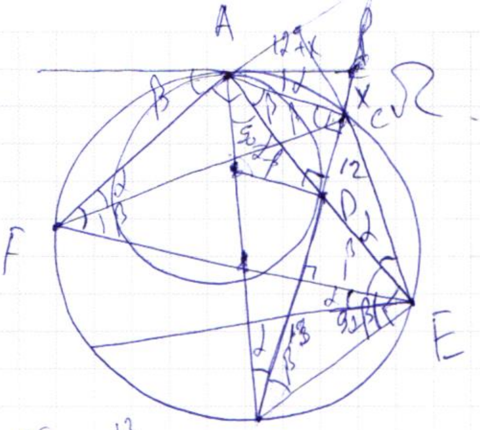
49 36

21+5



$a^{\log_b c}-m^{\log_b n}$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$



AF = CE

~~CA~~ PA = PD

$(25+x)^2-(12+x)^2=AB^2$

$13\cdot(37+2x)=AB^2$

$31\times13=111$, 37, 481

$625-481=144$

$\frac{65}{CE}=\frac{13}{DE}$ $\quad\frac{AB}{CE}$

$13\cdot(37+2x)-25^2=(12+x)^2-x^2$

$13\cdot37+26x-25^2=12^2+24x$

$2x$

$\alpha+2\beta=90$

$\alpha=90-2\beta$

123

$2x=144+625-481$

$x=144$

25 $\quad\frac{25+x}{12+x}=\frac{12+x}{x}$

27

-13

14

$25x+x^2=144+24x+x^2$

28

25

10

28

25

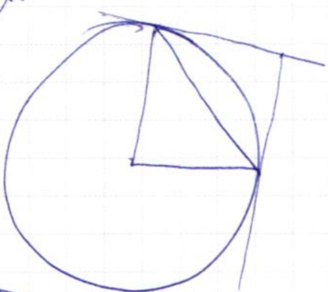
$\sqrt{13\cdot(37+288)}$

$\sqrt{13\cdot325}$

$13\cdot5\cdot65$

13.5

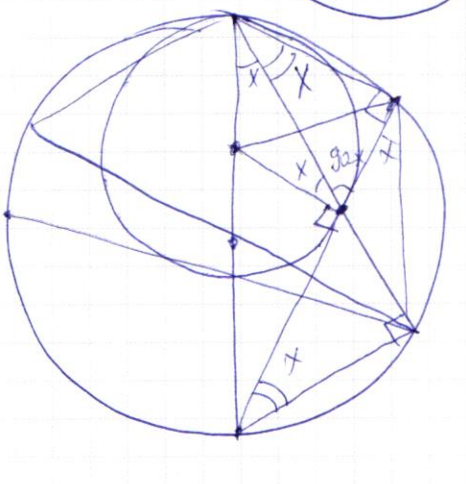
$R=65$

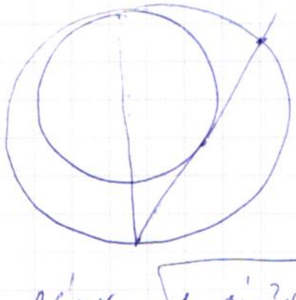


65×25: 325, 130, 1625

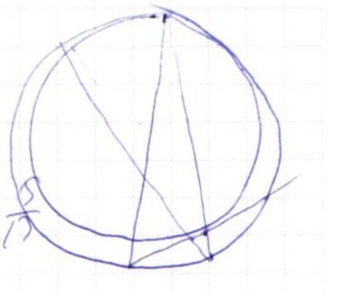
$\frac{13}{25}=\frac{144+x}{2\cdot144}$

$325-169=156$





$2\sin x\sqrt{1-\sin^2x}=\frac{5}{13}$



☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)