МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

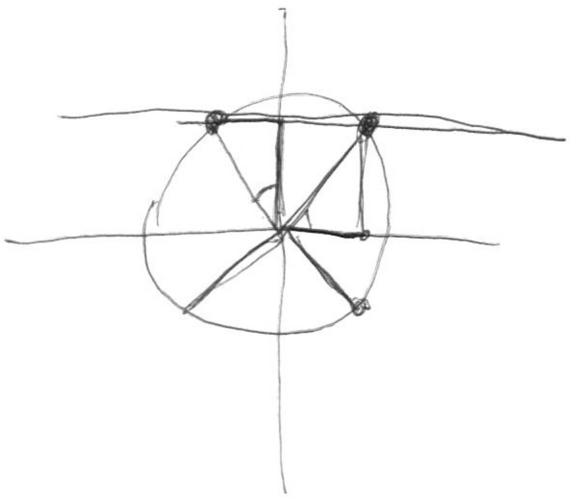
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

заметим что если $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots$

то $f(k) = \alpha_1 \cdot f(p_1) + \alpha_2 \cdot f(p_2) \ldots$

$\Rightarrow$ ~~f(x) f(x)~~

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f(x)	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0

x	17	18	19	20	21	22	23	24	25
f(x)	4	0	4	1	1	2	5	0	2

(например $f(22) = f(2) + f(11) = 0 + 2$ или $f(25) = f(5) + f(5) = 1 + 1 = 2$)

заметим что $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$ т.е. $f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

тогда ~~f(1) = f(a) + f~~ $f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$\Rightarrow f(a) = -f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$\Rightarrow$ если $f(\frac{x}{y}) < 0$ то $f(x) < f(y)$ (если $x, y \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ 1. $y = 23$ тогда x любое кроме 23

$\Rightarrow$ кол-во пар $(x; 23) = 23$

2. $y = 17$ или 19 тогда кол-во пар

$21 \cdot 2 = 42$

3. $y = 13$ тогда кол-во пар 20

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

4. $y=11$ или 2 или 25 $\Rightarrow$ кол-во пар $17 \cdot 3 = 51$

5. $y = 5; 7; 10; 15; 14; 20; 21$ $\Rightarrow$ кол-во пар $10 \cdot 7 = 70$

6. ~~φ~~ - остальные не подходят

$\Rightarrow$ кол-во пар $= 70+51+23+42+20=206$

Ответ: 206 пар.

№1.

пусть $t = 2\alpha + 2\beta$

тогда $\sin t = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\sin(t+2\beta) + \sin(t-2\beta) = \frac{-2}{5}$

$$\sin t \cdot \cos 2\beta + \cos t \cdot \sin 2\beta + \sin t \cdot \cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \cos t = -\frac{2}{5}$$

$$\sin t \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

~~1. $\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{5}} = $ ~~cos~~

~~$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$~~

~~$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$~~

~~$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = 1$~~

~~$\sin 2\alpha$~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(\frac{\pi}{2}+2\beta)$

$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или ~~$\sin 2\alpha + 2\beta = \pi - \frac{\pi}{2} - 2\beta = \frac{\pi}{2} - 2\beta + 2\pi k$~~

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm 1$

~~$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$~~ $\operatorname{tg} = -1$

~~$2\alpha + 4\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$~~

~~$\Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta) = 1$~~

$\Rightarrow \sin 2\alpha =$

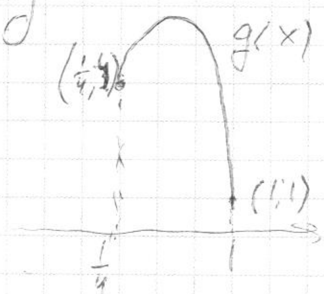
№6.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

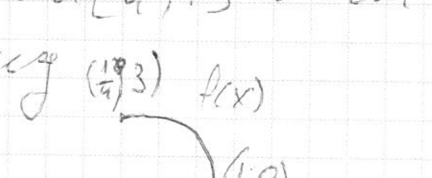
$$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le \underline{32x^2+36x-3}$$

график парабола ветви вниз
вершина в $\frac{9}{16}$

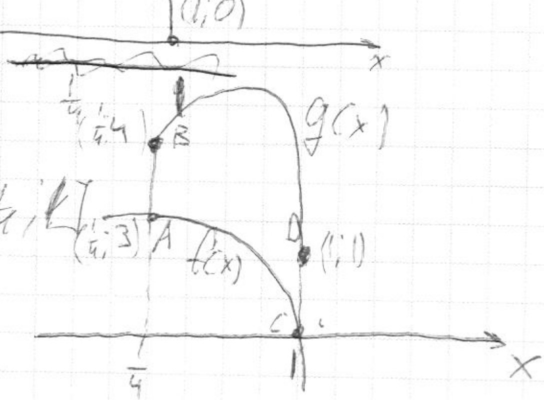
$\Rightarrow$ на отрезке $[\frac{1}{4};1]$ имеет вид



$4+\frac{4}{4x-5}$ график гипербола вертик. асимптота $\frac{5}{4}$
т.к. при x › то на $[\frac{1}{4};1]$ имеет вид



$\Rightarrow$ график на отрезке $[\frac{1}{4};1]$



Пусть l — график $ax+b$
тогда l — пересекает AB и CD и не пересекает (или касается) $f(x)$ $g(x)$

рассмотрим прямую BD Она проходит через $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$ и $(1;1)$
=> ее уравнение (нужно) пр: $kx+t=y$

тогда $\begin{cases} \frac{1}{4}k+t=4 \\ k+t=1 \end{cases}$

$\Rightarrow k=-4$

$t=5$

напишем уравнение касательной к $f(x)$

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f'(x_0)=4\cdot\frac{-1}{(4x_0-5)^2}\cdot 4=\frac{-16}{(4x_0-5)^2}$$

заметим что если $x_0=\frac{3}{4}$ то

$$y=f\left(\tfrac{3}{4}\right)+(-4)\left(x-\tfrac{3}{4}\right)=2-4x+3=-4x+5$$

т.е. BD - касается $f(x)$

=> BD - единственная подходящая прямая
(BD крайний случай т.к. иначе вершины $ax+b$ или ниже BD и пересекает $f(x)$ или пересекает BD но не пересекает или AB, или CD)

=> Ответ: $a=-4$ $b=5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

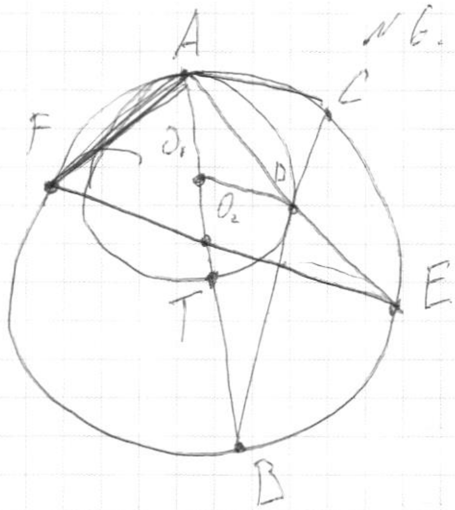
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



O_2 и O_1 центры Ω и ω соответ.

R и r радиусы Ω и ω

T - пересечение AB и ω

$\alpha = \angle BAE$

т.к. BD - касательная к ω => $\angle O_1DB = 90^\circ$ т.к. AB - диаметр $\angle ACB = 90^\circ$ => т.к. $\angle ABC$ общий $O_1DB \sim ABC$

$$\Rightarrow \frac{O_1B}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{17}{2}}{16} = \frac{17}{32}$$

заметим $O_1B = 2R - r$, $BA = 2R$ => $\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{32}$

$$2R - r = \frac{17}{16}R$$

$$r = \frac{15}{16}R$$

Степень точки B относ. ω

$$DB^2 = 2R\cdot(2R-2r) = 4R^2 - 4Rr = \frac{17^2}{4}$$

$$= 4R^2 - \frac{15}{4}R^2 = \frac{17^2}{4}$$

$$16R^2 - 15R^2 = 17^2$$

$$R = 17$$

$$\Rightarrow r = \frac{15\cdot 17}{16}$$

т.к. AT - диаметр ω то $\angle TDA = 90^\circ$

угол между касательной и хордой равен α

$\Rightarrow$ т.к. $EF \perp BC$ и $\angle TDA = 90^\circ$ то $\angle FEA = \overset{BD}{\alpha} \Rightarrow \angle FBA = \overset{TD}{\alpha}$ как опир.

на одну дугу $\Rightarrow BF \parallel AE \Rightarrow \angle FAE = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AFE = 90^\circ - \alpha$

степень точки D относ. Ω равна $\frac{17 \cdot 15}{4}$

заметим что при гомотетии с коэфициентом $\frac{R}{r}$ и центром A $T \to B$ $D \to E$

$\Rightarrow$ если $AD = rx$ то $DE = (R-r)x$

$$\Rightarrow x^2 \cdot R(R-r) = \frac{17 \cdot 15}{4}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{60}{17}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{\frac{60}{17}}}{\frac{15 \cdot 17}{8}} = \frac{8\sqrt{60}}{15 \cdot 17^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \overset{\angle EFA =}{\alpha\, 90 - \alpha} = \arcsin \frac{8\sqrt{\frac{60}{17}}}{15 \cdot 17}$$

т.к. $\angle EAF = 90^\circ$ то $EF = 2R \Rightarrow EF = 34$

т.к. $\angle EFA = \arcsin \frac{8 \cdot \sqrt{\frac{60}{17}}}{15 \cdot 17}$

$$EA = 34 \cdot \frac{8 \cdot \sqrt{\frac{60}{17}}}{15 \cdot 17} = \frac{16\sqrt{\frac{60}{17}}}{15}$$

$$AE = R \cdot x = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{17}} \cdot 17 = \sqrt{60 \cdot 17}$$

$$\Rightarrow S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot \sqrt{\frac{60}{17}}}{15} \cdot \sqrt{60 \cdot 17} = 32$$

Ответ: $R = 17$ $r = \frac{17 \cdot 15}{16}$ $\angle EFA = \arcsin \frac{8\sqrt{\frac{60}{17}}}{15 \cdot 17}$

$S_{AFE} = 32$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

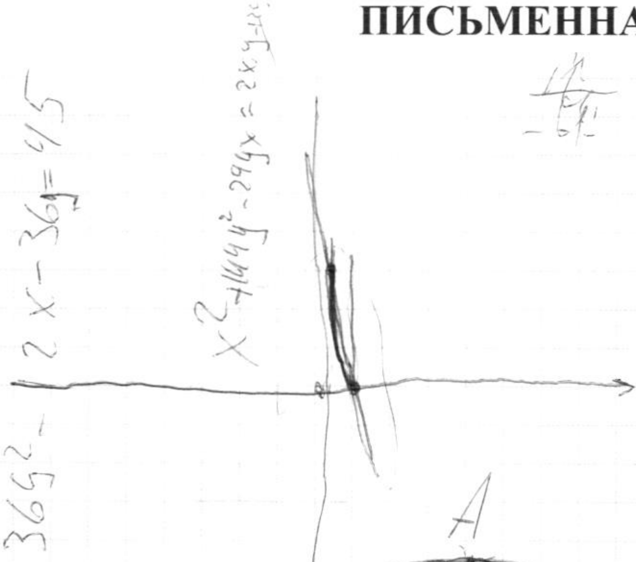
(заполняется секретарём)

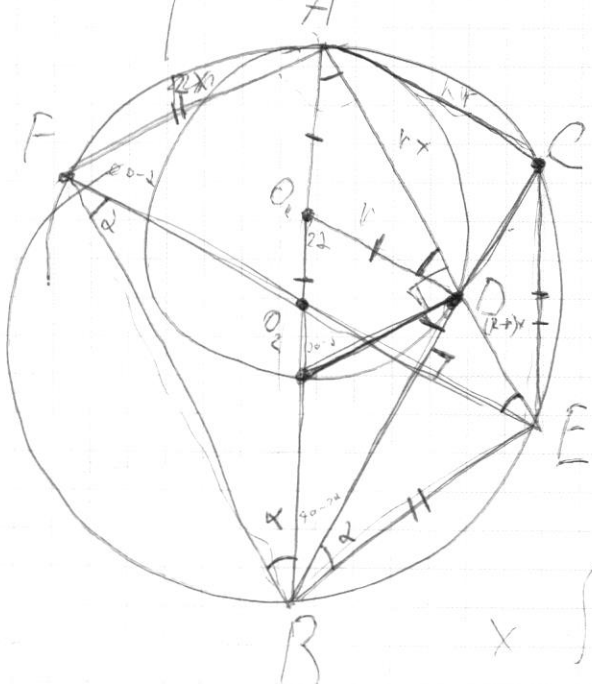
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{x-12y-\sqrt{(2y-1)(x-6)}}$

$x^2+36y^2-2x-36y=45$

$x^2+144y^2-24xy=2xy$





$\frac{2R-r}{2R}=\frac{17/[illegible]}{[illegible]}$

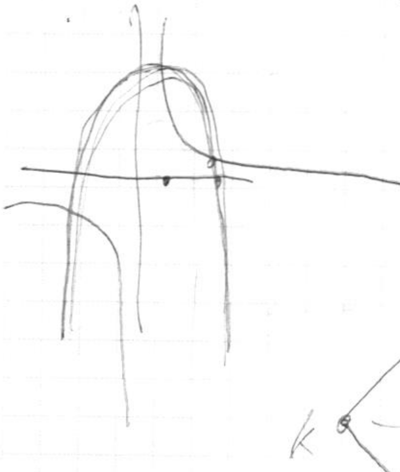
$4R^2-4Rr=\frac{17^2}{4}$

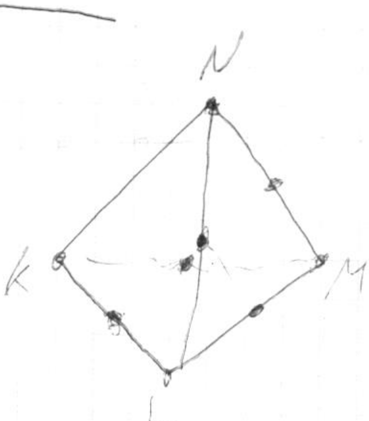
$R(R-r)=\frac{17^2}{16}$ $\quad 2R-r=\frac{17}{16}R$

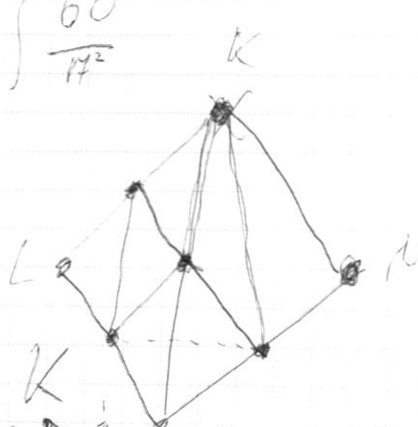
$R(R-r)\cdot x^2=\frac{17\cdot 15}{4}$ $\quad r=$

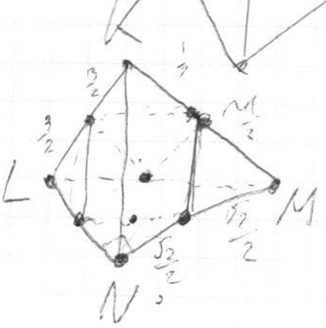
$x^2=\frac{16\cdot 15\cdot 17}{17^2\cdot 4}$

$x\sqrt{\frac{60}{17^2}}$









☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

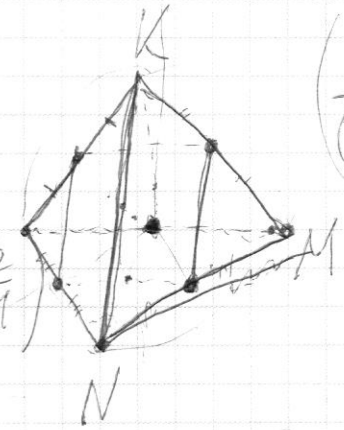
$\left(4 + \frac{4}{4x-5}\right)'$

$\frac{-4}{-2}$

ax^{a-1}

$\left(\frac{4}{(4x-5)}\right)' = 4 \cdot \frac{-1}{(4x-5)^2} \cdot 4$

$2 + -4\left(x - \frac{3}{4}\right)$



$\frac{16}{(4x-5)^2} = -4$

$\frac{1}{(4x-5)^2} = \frac{1}{4}$

$(4x-5)^2 = \pm 2$

$x = \frac{7}{4}$

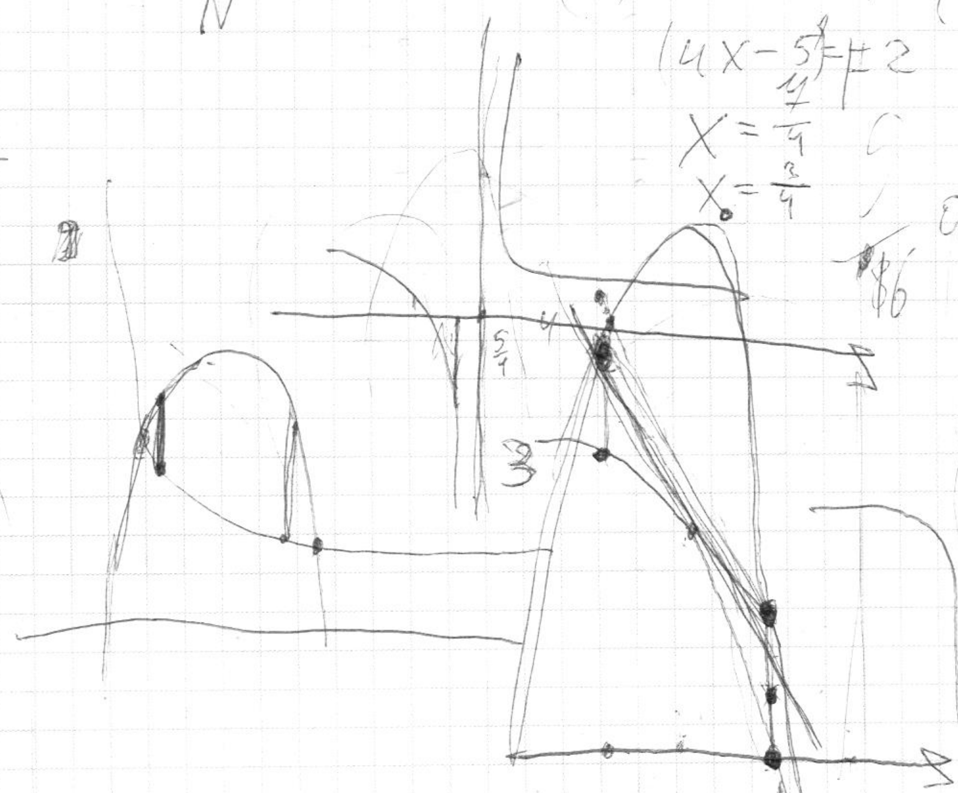
$x_0 = \frac{3}{4}$

$\frac{9}{8}$

$ax + b = y$

$a = -4$

$b = 5$



$\frac{1}{4}a + b = 4$

$a + b = 1$

$\frac{3}{4}a = -3$

$a = -4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1) = f(2) + f(\frac{1}{2})$

$(x-6)^2 + 36y^2 - 36y + 81 = 81$

$f(1) = f(5) + f(\frac{1}{5})$

$1 \quad -1$

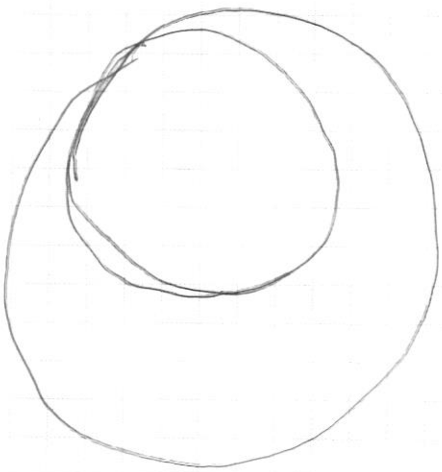
$+ (6y-3)^2$

$144 - 144 \cdot y^2 + 144y + 180$

$144(-y^2+y$

$f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$

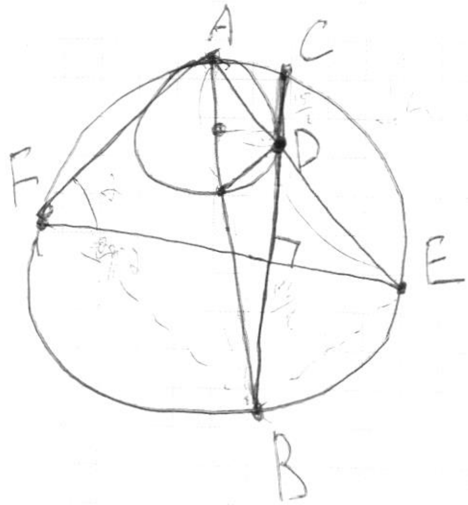
$f(a) = -f(\frac{1}{a})$



$f(1) = f(1) + f(1)$

$\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$x^2 + 144y^2 - 26xy + 124$



$2R \cdot (2R - 2r)$

$4R^2 - 4Rr = \frac{17^2}{4}$

$\frac{r}{R} = \frac{AD}{AE}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(1) = f(1) + f(1) = 0$

$f(28) =$

$\left(\frac{2}{3}\right)$ $f(17)$

$f(1) = 0$

$f(4) = 0$ $f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$f(1) = 0 + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$ $x(x-10)$ $\log_{3} 25 < 3$

$x^2 - 10x$ $f(1) = f\left(\frac{1}{3}\right)$

$x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$(10x - x^2)$

$5^{\log_3 t}$ $1 \to 2$

$t^k + t \geq x^2 - 12x + 36y^2 - 36y + 45 = 0$

$f(25) = 2$

$\cancel{f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + f\left(\frac{1}{2}\right)}$

$t = 2\alpha + 2\beta$ 0 10

$f\left(\frac{3}{4}\right) =$ $x^2 - 10x < 0$

$t(t^{k-1} - 1)$

$x^2 - 10x \geq 0$

$\geq 5^{\log_3 (10x - x^2)}$ $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$(10x - x^2)\left((10x - x^2)^{\log_3 \frac{4}{5}} - 1\right)$

$\sin(t + 2\beta) + \sin(t - 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$(x(x-10))^{\log_3 \frac{4}{5}} - 1 \geq$

$\sin t \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos t +$

$\sin t \cdot \cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \cos t$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$2 \sin t \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$f\left(\frac{2}{3}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$ $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \frac{\log_4 16}{\log_4 2}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$f\left(\frac{2}{2}\right)$

$\log_3 (10x - x^2) = \frac{\log_5 (10x - x^2)}{\log_5 3}$

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 17 15 19 20 21 23 27 29

$0 + f(t)$ 0 0 0 1 0 1 2 3 4 1 4 1 5 1 6 7