МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

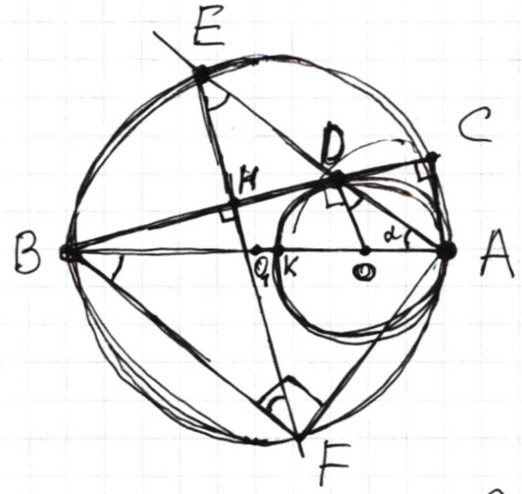
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Ω, ω
~~внутр.~~ внутр.
касание в т. A
AB – диам. Ω
хорда BC кас. ω в т. D
$AD \cap \Omega = E$, $EH \perp BC$,
$EH \cap \Omega = F$
$CD = 8$, $BD = 17$

R – ? r – ? $\angle AFE$ – ?
S_{AFE} – ?

R – рад. Ω, r – рад. ω, O_1 – центр Ω, O – центр ω.



1) Т.к. $O \in AB$. В самом деле, если Ω и ω касаются в т. A, то они имеют общую касательную в этой точке. Известно, что $O_1 \in AB$, тогда O_1A (радиус) перпендикулярен этой касательной $\Rightarrow AB \perp$ касат. Радиус OA тоже должен быть $\perp$ этой касат. $\Rightarrow$ ~~OB~~ $O \in AB$.

2) Провед. OD и AC; $OD \perp BC$ (радиус $\perp$ касат.), $AC \perp BC$ ($\angle ACB$ опир. на диам. AB). Таким образом, $OD \parallel AC \parallel EH$.
$\triangle ODA$ – р/б ($OD = OA$ – рад.) $\Rightarrow \angle OAD = \angle ODA = \alpha$.
~~3) Провед. BF~~ $\angle FEA = \angle ODA$ (соотв. углы при $EF \parallel OD$)
3) Провед. BF. $\triangle BFA$ – прям., т.к. $\angle BFA$ опир. на AB.
$\angle BFE = \angle FBA = \alpha$ (вписанные углы, опир. на ~~ее~~ равные дуги, равны) $\Rightarrow BX = XF$, где X – т.п. EF и AB.
$\angle AFE = 90 - \alpha$, $\angle FAB = 90 - \alpha$. $\Rightarrow \triangle FXA$ – р/б, $FX = XA$.
($\angle BFA - \angle BFE$) ($180° - \angle BFA - \angle FBA$)
Тогда FX – мед. в прям. $\triangle BFA$, значит, $X = O_1$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\times\begin{array}{r}85\\25\\\hline 425\\170\end{array}$ 2125

4. (прод-е) 4) $\triangle BCA \sim \triangle BDO$ по 2 углам $\Rightarrow \dfrac{BA}{BO} = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{17+8}{17}$

$\dfrac{BA}{BO} = \dfrac{25}{17}$; $\dfrac{BO+r}{BO} = \dfrac{25}{17}$; $\dfrac{r}{BO} = \dfrac{8}{17}$; $\dfrac{r}{BK+r} = \dfrac{8}{17}$ $\quad \times\begin{array}{r}34\\34\\\hline 136\\102\\\hline 1156\end{array}$

(пусть K — т.п. AB с ω, см. рис.) $8BK + 8r = 17r$;

$9r = 8BK$; $BK = \dfrac{9}{8}r$ $\quad \times\begin{array}{r}34\\25\\\hline 170\\68\\\hline 850\end{array}$

По теореме о сек. и кас.: $BD^2 = BK\cdot BA$; $289 = BK(BK+2r)$

$289 = \dfrac{9}{8}r\left(\dfrac{9}{8}r + 2r\right)$; $81r^2 + 9\cdot 2\cdot 8r^2 = 289\cdot 64$

$r^2 = \dfrac{289\cdot 64}{225}$; $r = \dfrac{17\cdot 8}{15} = \dfrac{136}{15}$ $\quad \times\begin{array}{r}85\\85\\\hline 425\\680\\\hline 7225\end{array}$

$BO = BK + r = \dfrac{9}{8}r + r = \dfrac{17}{8}r = \dfrac{17}{8}\cdot\dfrac{17\cdot 8}{15} = \dfrac{289}{15}$

$\triangle BDO \sim \triangle BHO_1$ по 2 уг. $\Rightarrow BO_1 = BO\cdot\dfrac{BH}{BD} = \dfrac{289}{15}\cdot\dfrac{12,5}{17} =$

$= \dfrac{17\cdot 25}{30} = \dfrac{17\cdot 5}{6} = \dfrac{85}{6}$ ($BH = HC = \dfrac{1}{2}BC$, т.к. прямая $EF \perp BC$

и EF проход. через $O_1 \Rightarrow H$ — сер. BC). $BO_1 = R = \dfrac{85}{6}$.

5) $\triangle BCA$: $AC^2 = AB^2 - BC^2 = (2R)^2 - BC^2 = \dfrac{\cancel{4}\cdot 85^2}{\cancel{6^2}\,9} - 25^2$

$\triangle DCA$: $AD^2 = AC^2 + DC^2 = \dfrac{85^2}{9} - 25^2 + 8^2 = \dfrac{85^2 - 625\cdot\cancel{36}\,9 + 64\cdot\cancel{36}\,9}{\cancel{36}\,9}$

$\triangle ODA$: т. косинусов: $OD^2 = OA^2 + AD^2 - 2\cdot OA\cdot AD\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{\cancel{OA^2} + AD^2 - \cancel{OD^2}}{2OA\cdot AD} = \dfrac{AD}{2OA} = \dfrac{\sqrt{85^2 - \cancel{36}\,9(625-64)}}{\sqrt{\cancel{36}\,9}\cdot 2\cdot\frac{136}{15}} =$

$= \cancel{\dfrac{\sqrt{7225 - 36\cdot 561}}{12\cdot\frac{136}{15}}} = \cancel{\sqrt{7225-20}} = \dfrac{\sqrt{7225 - 9\cdot 561}}{3\cdot 2\cdot\frac{136}{\cancel{15}\,5}} =$

$\times\begin{array}{r}561\\36\\\hline 3366\\1683\\\hline 20196\end{array}$

$= \dfrac{\sqrt{2176}\cdot 5}{2\cdot 136} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{544}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot 136} = \dfrac{4\sqrt{34}\cdot 5}{\cancel{136}\,34} = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$

$\cos\alpha = \sin(90-\alpha) = \sin AFE$; $\angle AFE = \arcsin\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$

$\times\begin{array}{r}561\\9\\\hline 5049\end{array}$ $\quad -\begin{array}{r}7225\\5049\\\hline 2176\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}46\\46\\\hline 276\\184\\\hline 2116\end{array}$

6) $\triangle AFE$: $\angle EAF = 90°$, т.к. опир. на диам. EF. $AF = EF\cdot\sin\alpha$;

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\dfrac{1156}{1156} - \dfrac{850}{1156}} = \sqrt{\dfrac{306}{1156}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$; $EF = 2R = \dfrac{85}{3}$

$S_{AFE} = \dfrac{1}{2}\cdot FA\cdot FE\cdot\sin AFE = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{85}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{34}}{34}\cdot\dfrac{85}{3}\cdot\dfrac{5\sqrt{34}}{34} =$

$= \dfrac{85^2\cdot\cancel{15}\,5\cdot\cancel{34}}{34^{\cancel{2}}\cdot\cancel{9}\,3\cdot 2} = \dfrac{85^2\cdot 5}{34\cdot 6} = \dfrac{85\cdot\cancel{17}\cdot 5\cdot 5}{2\cancel{34}\cdot 6} = \dfrac{85\cdot 25}{12} = \dfrac{2125}{12}$

Ответ: $R = \dfrac{85}{6}$, $r = \dfrac{136}{15}$, $\angle AFE = \arcsin\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$, $S_{AEF} = \dfrac{2125}{12}$.

$2176 : 4 = 544$ $\quad 544 : 4 = 136$ $\quad 136 : 4 = 34$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ (1); $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$ (2)

(2): $2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2}=-\frac{4}{5}$; $\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{\sqrt5}{5}}\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

$\cos2\beta=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt5}$; $\cos2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}$

Возможны 2 ситуации: $\sin2\beta=\pm\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{20}{25}}=\pm\frac{\sqrt5}{5}$

1) $\sin2\beta=\frac{\sqrt5}{5}$

(1): $\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{\sqrt5}{5}$;

$\sin2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5}+\frac{\sqrt5}{5}(2\cos^2\alpha-1)=-\frac{\sqrt5}{5}\quad\Big|\cdot\frac{5}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1$

~~2 sin~~ $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0\quad|:2$

$\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0$ $\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \to \text{не соотв. условию, т.к. } tg\alpha \text{ сущ.}\\ 2\sin\alpha=-\cos\alpha\ \ |:\cos\alpha\neq0,\ :2\end{array}\right.$

$\underline{tg\alpha=-\frac{1}{2}}$

2) $\sin2\beta=-\frac{\sqrt5}{5}$ (1): ~~2sin~~ $\sin2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5}-\frac{\sqrt5}{5}(1-2\sin^2\alpha)=-\frac{\sqrt5}{5}$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-1+2\sin^2\alpha=-1$

$\sin\alpha(\sin\alpha+2\cos\alpha)=0$ $\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\ \ |:\cos\alpha\neq0\\ \sin\alpha=-2\cos\alpha\ \ |:\cos\alpha\neq0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}tg\alpha=0\\ tg\alpha=-2\end{array}\right.$

Ответ: -2; $-\frac{1}{2}$; 0.

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

Пусть $x^2+18x=t$; из-за области определения логарифма $t>0$, тогда $|t|=t$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 12^{\log_{12}t\cdot\log_{12}13}$ $\cancel{|: 12^{\log_{12}t}>0}$

$\cancel{1 \geq \frac{12^{\log_{12}t\cdot\log_{12}13} - 12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}t}}{12^{\log_{12}t}}}$

12

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13} \;|: t^{\log_{12}5}>0$

$1 + t^{1-\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}13-\log_{12}5}$

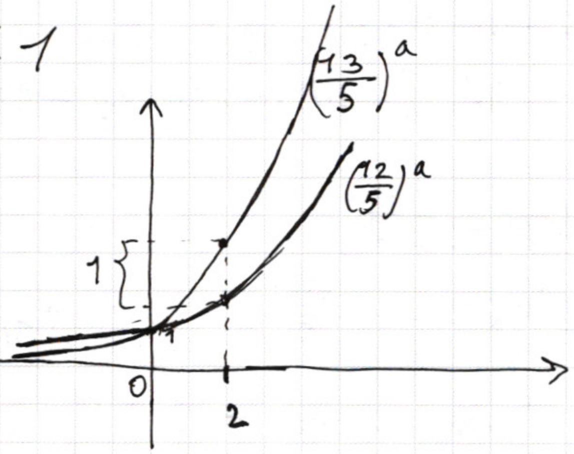
$1 + t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \geq t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

$t^{\log_{12}\frac{13}{5}} - t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \leq 1$

$12^{\log_{12}t\cdot\log_{12}\frac{13}{5}} - t^{\log_{12}t\cdot\log_{12}\frac{12}{5}} \leq 1$

$\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_{12}t} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_{12}t} \leq 1$

$\cancel{\frac{13^{\log_{12}t} - 12^{\log_{12}t}}{5^{\log_{12}t}} \leq 1}$



С помощью рисунка решим нер-во.

При $\log_{12}t \leq 0$ $\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_{12}t}$ меньше $\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_{12}t}$ => нер-во верно.

При $\log_{12}t=0$ нер-во тоже верно.

При $\log_{12}t=2$ подстановка показывает, что $\frac{13^2-12^2}{5^2}=1$ => => нер-во верно. Из рис. видно, что при $\log_{12}t>2$ разница $\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_{12}t} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_{12}t} > 1$; а при $0<\log_{12}t<2$ нер-во верно.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. (прод-е)

Таким образом, $\log_{12} t \le 2 = \log_{12} 144$

$\cancel{\log_{12} x^2+18x \le 2}$ $\log_{12} b$ – возраст. ф-я =>

=> нер. равносильно $\begin{cases} t \le 144 \\ t > 0 \text{ – нат. условие} \end{cases}$

$\cancel{x^2+18x-144 \le 0}$ $\quad \cancel{D = 81+144 = 225}$

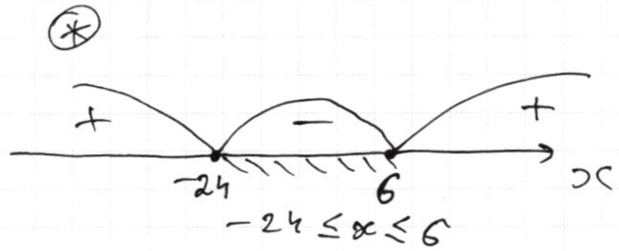
$\cancel{x_{1,2} = \frac{-9 \pm 15}{1}}$

$\cancel{(x-6)(x+24) \le 0}$

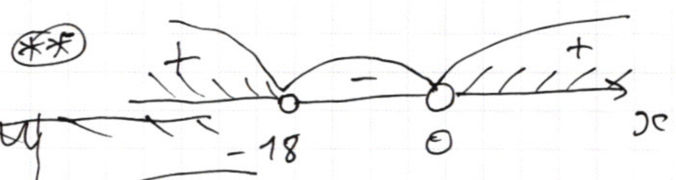
$\cancel{-24 \le x \le 6}$

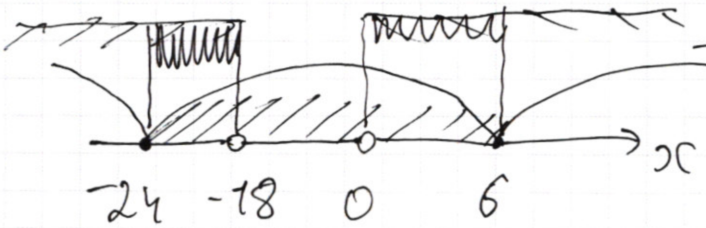
Ответ: $[-24; 6]$.

$\begin{cases} x^2+18x-144 \le 0 \\ x^2+18x > 0 \end{cases}$



$\begin{cases} (x-6)(x+24) \le 0 \quad * \\ x(x+18) > 0 \quad ** \end{cases}$





$-24 \le x < -18 \qquad 0 < x \le 6$

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$.

$xy-4y \geq -2$ $\cancel{xy \geq -2}$ $x-2y\geq 0$ $xy-x-2y\geq -2$ $-2y=\sqrt{-2y+2}$ $4y^2=-2y+2$ $4y^2+2y-2=0$

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x-2y\geq 0 \\ x^2-4x+9y^2-18y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0 \\ x-2y\geq 0 \\ x^2-4x+9y^2-18y=12 \end{cases}$

$22t = 22x^2-88x+24\cdot 22$

$121-22\cdot 44+44+168\cdot(-33)+84^2=$

$121-2\cdot 484+44-168\cdot 33+84^2$

$\cancel{x^2}-\cancel{4x}+\cancel{9y^2}-\cancel{18y}-\cancel{x^2}+\cancel{5xy}-\cancel{x}-\cancel{4y^2}-\cancel{2y}+2=12$

$5xy-5x+5y^2-20y=10$

$\begin{cases} xy-x+y^2-4y=2 \\ x-2y\geq 0 \\ x^2-4x+9y^2-18y=12 \end{cases}$ $y^2-4y+yx-x-2=0$

$+y(x-4)$

$D=x^2-8x+16+4(x+2)=x^2-4x+24$

$y_{1,2}=\dfrac{4-x\pm\sqrt{x^2-4x+24}}{2}$

1) $+$

$x^2-4x+9\cdot\left(\dfrac{4-x+\sqrt{x^2-4x+24}}{2}\right)^2-18\cdot\dfrac{4-x+\sqrt{x^2-4x+24}}{2}-12=0$

$x^2-4x+9\cdot\dfrac{(4-x)^2+2(4-x)\sqrt{x^2-4x+24}+x^2-4x+24}{4}-9(4-x+\sqrt{x^2-4x+24})-12=0$

$4x^2-16x+9(16-8x+x^2+(8-2x)\sqrt{x^2-4x+24}+x^2-4x+24)-$

$-36(4-x+\dots)-48=0$

$4x^2-16x+144-72x+9x^2+360-108x+18x^2+8\sqrt{x^2-4x+24}$

$-2x\sqrt{x^2-4x+24}-144+36x-36\sqrt{x^2-4x+24}-48=0$

$22x^2+\cancel{20x}-88x+168-28\sqrt{x^2-4x+24}-2x\sqrt{x^2-4x+24}=0$

$\cancel{22t-360-28\sqrt{t}}$

$\cancel{(22x^2-88x+168)^2}=(11x^2-44x+84)=\sqrt{x^2-4x+24}(x+14)$

$121x^4-22\cdot 44x^3+(44x)^2+168(11x^2-44x)+84^2=(x^2-4x+24)(x^2+28x+196)$

$121x^4-2\cdot 484x^3+1936x^2+1848x^2-7392x+84^2=x^2\ldots$

$+24x^2+672x+4704+x^4+28x^3+196x^2-4x^3-112x^2-784x$

$120x^4-968x^3-24x^3+1848x^2-108x^2-7392x-112x+$

$+84^2-4704=0$

$120x^4-992x^3+1740x^2-7504x+2352=0$

$30x^4-248x^3+435x^2-1876x+588=0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos\frac{x}{2}\neq 0$ $\quad \cos 2\alpha \neq 0$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\neq 0$ $\quad (\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)\neq 0$

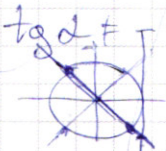
$\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0$

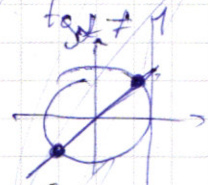
$\sin\alpha\neq\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha\neq 1$

$\cos\alpha$ $\sin\alpha\neq-\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha\neq -1$





$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k$

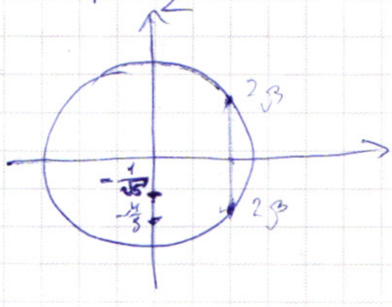
$2b=x-y$

$a+b=x$

$a-b=y$

$2a=x+y$

$\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$



$\sin x+\sin y = \sin(a+b)+\sin(a-b) =$

$= \sin a\cdot\cos b+\cancel{\sin b\cdot\cos a}+\sin a\cdot\cos b -$

$-\cancel{\sin b\cdot\cos a} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = -\frac{2}{5}$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}\\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$

$+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\cos 2\beta = +\frac{2}{5}$

$\sqrt{5}\cos 2\beta = +2$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

1) $\sin 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

1) $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha = -1$

$\cancel{2\sin 2}\,4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1 = -1$

$\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha(\cos\alpha+2\sin\alpha) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\cancel{\cos\alpha=0}\\ 2\sin\alpha=-\cos\alpha\end{array}\right.$$

$2\operatorname{tg}\alpha = -1$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha = -1$

$\cancel{2\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha+1=-1}$

$\cancel{2\sin 2\alpha\ 2\sin\alpha}$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-1+2\sin^2\alpha = -1$

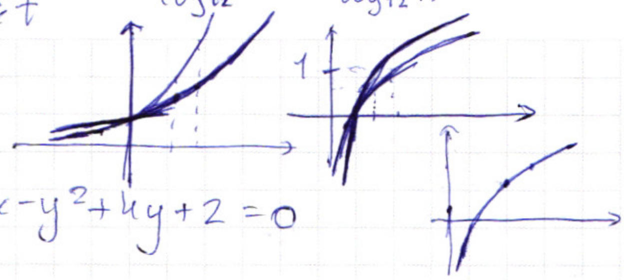
$\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\ \sin\alpha=-2\cos\alpha\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=0\\ \operatorname{tg}\alpha=-2\end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13}$ $\quad \log_{12} 12^{t} + \log_{12} 12^{5^{\log_{12} t}}$



~~$x^2 - 4xy$~~

~~$x^2 - 4x$~~ $xy - x + y^2 - 4y = 2$

$x^2 - 5xy + x + 4y^2 + 2y - 2 = 0$

$x^2 - 5xy + x + 4y^2 + 2y - 2 - xy + x - y^2 + 4y + 2 = 0$

$x^2 - 6xy + 2x + 3y^2 + 6y = 0$

$4y^2 + 2y - 2 = 0$

$2y^2 + y - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1;$

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$x^2 + 18x > 0$

$5^{\log_{12} t} + t \geq$ ~~$|x^2+18x|$~~ $t^{\log_{12} 13}$

$12^{\frac{13}{5}}$

$t = \log 12^{\log_{12} t}$

$\log_{12} 12^{t}$

$\log_{12} 13 \cdot \log_{12} t$

$\frac{13}{5}$

$12^{\log_{12} 5 \cdot \log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13}$

$12^{\log_{12} 5 \cdot \log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 12^{\log_{12} t \cdot \log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$1 + \frac{t}{t^{\log_{12} 5}} \geq t^{\log_{12} 13 - \log_{12} 5}$

$1 + t^{1 - \log_{12} 5} \geq t^{\log_{12} \frac{13}{5}}$

$1 + t^{\log_{12} \frac{12}{5}} \geq t^{\log_{12} \frac{13}{5}}$

$t^{\log_{12} \frac{13}{5}} - t^{\log_{12} \frac{12}{5}} \leq 1 = t^0$

$12^{\log_{12} t \cdot \log_{12} \frac{13}{5}} - 12^{\log_{12} t \cdot \log_{12} \frac{12}{5}} \leq 12^0$

~~$\log_{12} t \cdot \log_{12} \frac{13}{5}$~~

$\log_{12} t \cdot \log_{12} \frac{13}{5} \leq \log_{12} t \cdot \log_{12} \frac{12}{5}$

$(12^{10})^{\log_{12} \frac{13}{5}} - (12^{10})^{\log_{12} \frac{12}{5}} \leq 1$

$\left(\frac{13}{5}\right)^{10} - \left(\frac{12}{5}\right)^{10} \leq 1$

$\frac{13^{10} - 12^{10}}{5^{10}} \leq 1$

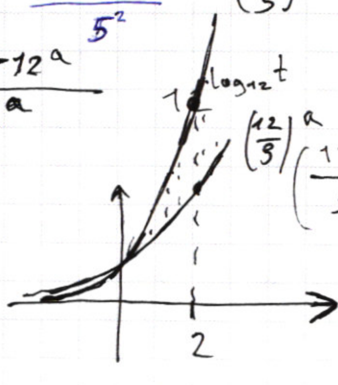
$13^2 = 12^2 + 5^2$

$13^{10} = 12^{10} + 5^{10} + \ldots$

$\frac{13^2 - 12^2}{5^2}$ $\quad \left(\frac{13}{5}\right)^a$

$\frac{13^a - 12^a}{5^a}$

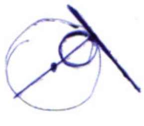
$\left(\frac{13}{5}\right)^a \cdot \ln \frac{13}{5}$



$\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_{12} t} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_{12} t} \leq 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

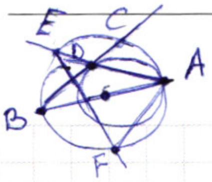


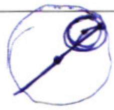
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

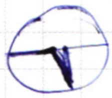
ШИФР

(заполняется секретарём)





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



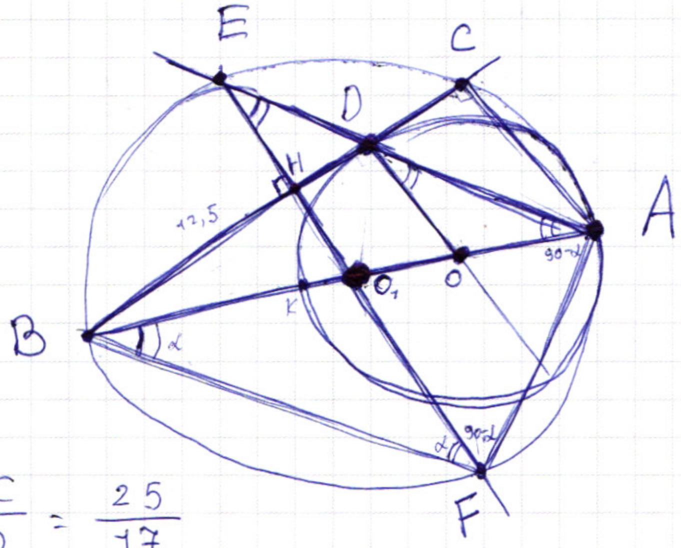
$BD = 17$

$CD = 8$

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

r - ? R - ?



$$\begin{array}{r} 144 \\ +\ 81 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\frac{BA}{BO} = \frac{BC}{BD} = \frac{25}{17}$$

$$\frac{BO+r}{BO} = \frac{25}{17}; \quad \frac{r}{BO} = \frac{8}{17};$$

$$BK \cdot BA = BD^2 = 289$$

$$\cancel{BK \cdot (BK+2r)}\ BK(BK+2r) = 289$$

$$\frac{r}{BK+r} = \frac{8}{17}$$

$$8BK + 8r = 17r; \quad 9r = 8BK; \quad BK = \frac{9}{8} r$$

$$\frac{9}{8} r \left(\frac{9}{8} r + 2r \right) = 289$$

$$\frac{81}{64} r^2 + \frac{9}{4} r^2 = 289; \quad \cancel{90r^2}\ 81r^2 + 9 \cdot 16 r^2 = 289 \cdot 64$$

$$\cancel{81r^2}\ 225 r^2 = 289 \cdot 64$$

$$\frac{BO}{r} = \frac{17}{8}$$

$$r = \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{136}{15}$$

$$BO = \frac{17 \cdot \cancel{8}}{15} \cdot \frac{17}{\cancel{8}} = \frac{289}{15}$$

$$\frac{BO}{BO_1} = \frac{BD}{BH} = \frac{17}{12,5}; \quad BO_1 = \frac{12,5}{17} \cdot BO = \frac{12,5}{17} \cdot \frac{289}{15} = \frac{12,5 \cdot 17}{15} = R$$