МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ (т.к. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

(1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\Downarrow$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{8\cdot(-\sqrt{17})}{17\cdot 2} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

из (1): $\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{17}$

• если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{17}+\sin 2\alpha = -\frac{4}{17}$ $\quad \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha = -1 + \frac{8\cdot 4}{17} = \frac{15}{17} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-8\cdot 17}{17\cdot 15} = -\frac{8}{15}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow (1-\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\left(-\frac{8}{15}\right) = 2\operatorname{tg}\alpha$

$1-\operatorname{tg}^2\alpha = -\frac{15}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha$

$4\operatorname{tg}^2\alpha - 15\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$

$D = 225 - 16 = 201$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{15\pm\sqrt{201}}{8}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3y-2x\geq 0 \\ (x^2-2x+1)+\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)=\frac{25}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2-15xy+3y+4x^2+2x-2=0 \quad (1) \\ y\geq \frac{2x}{3} \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \end{cases}$$

(1) $9y^2-3y(5x-1)+4x^2+2x-2=0$

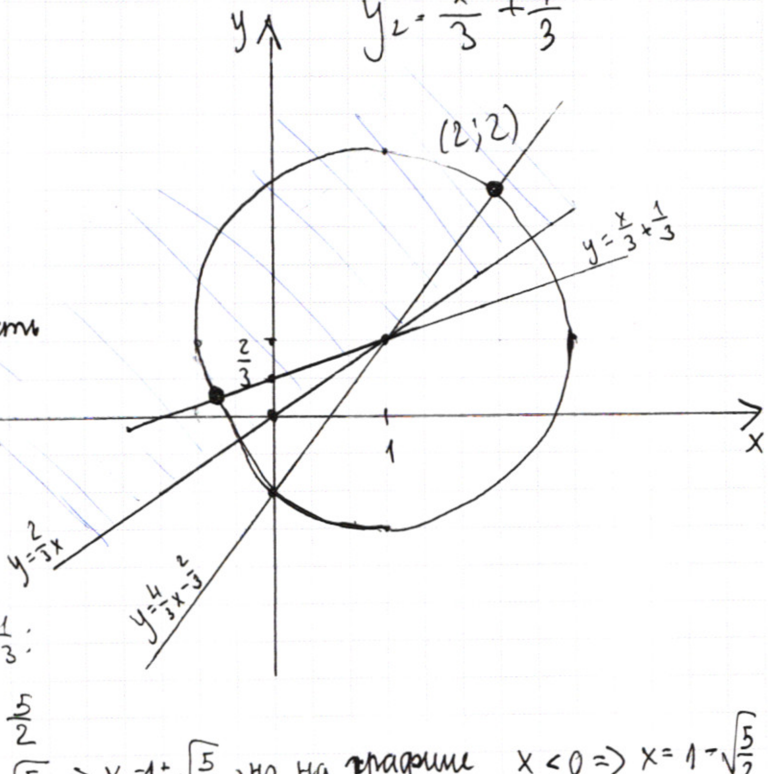
$D=9(5x-1)^2-9\cdot 4(4x^2+2x-2)=$

$=9(25x^2-10x+1)-9(16x^2+8x-8)=$

$=9(9x^2-18x+9)=9(3x-3)^2$

$$y=\frac{3(5x-1)\pm\sqrt{9(3x-3)^2}}{18}=\frac{15x-3\pm(9x-9)}{18} \Rightarrow \quad y_1=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}, \quad y_2=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$$

Тогда $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3} \\ y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ y\geq\frac{2}{3}x \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \end{cases}$ – окружность с центром $\left(1;\frac{2}{3}\right)$ и $R=\frac{5}{3}$



Точка $(2;2)$ – реш, т.к $(2-1)^2+\left(2-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$ и $\frac{4}{3}\cdot 2-\frac{2}{3}=2$

~~реш~~ Перес окружности и прямой $y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$:

$(x-1)^2+\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$\frac{10}{9}(x-1)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow (x-1)^2=\frac{5}{2}$

$x-1=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, но на графике $x<0 \Rightarrow x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}=\frac{4-\sqrt{10}}{6}$

Ответ: $(2;2)$ $\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}};\frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$x^2+6x+3^{\log_4(x^2+6x)} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

$t=x^2+6x,\ t>0$

$$t+3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5}$$

$$4^{\log_4 t}+3^{\log_4 t} \geq 4^{\log_4 t^{\log_4 5}}$$

$$4^{\log_4 t}+3^{\log_4 t} \geq 4^{\log_4 5\cdot\log_4 t}$$

$$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$$

Верно при любом $\log_4 t$, тогда

$$x^2+6x>0$$

$$x(x+6)>0$$

Ответ: $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

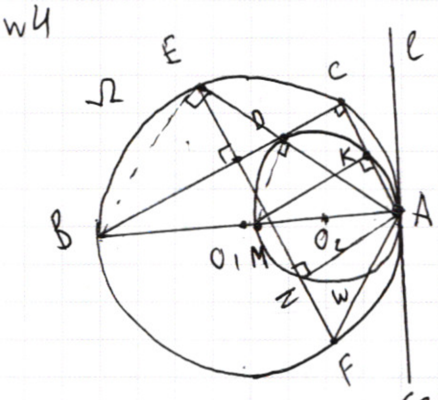
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



O_2 - центр w

O_1 - центр Ω

R - радиус Ω

r - радиус w

Решение:

Дано: окр Ω и w касаются в A, AB - диаметр Ω, BC - хорда Ω касается w, $EF \perp BC$, $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$

Найти: R, r, $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$

1. проведем общую касат. к окружностям через A, тогда $BA \perp l$ по св-ву касат $\Rightarrow$ на ~~пр~~ отрезке BA лежит диаметр окр w, т.к O_2A тоже $\perp l$

$\Rightarrow B - O_2 - A$. Пусть $AB \cap w = M$, $AC \cap w = K$, тогда $AM = 2r$

2. $BD^2 = BM \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$ (пусть $x = R - r$), тогда

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = 4xR \Rightarrow xR = \left(\frac{13}{4}\right)^2$

3. $\angle MKA = \angle BCA = 90°$ как углы, опир. на диаметр $\Rightarrow$ по приз пар. прямых $MK \parallel BC$, тогда $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{KC} = \frac{AK}{KC} + 1 = \frac{AM}{BM} + 1 = \frac{2r}{2R-2r} + 1 = \frac{r}{R-r} + 1 = \frac{r+R-r}{R-r} =$

$= \frac{R}{R-r} = \frac{R}{x} \Rightarrow CK = AC\frac{x}{R}$

4. $DC^2 = CK \cdot CA = AC^2 \cdot \frac{x}{R} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 = AC^2\frac{x}{R} \Rightarrow AC^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \frac{R}{x}$

5. по т Пифагора $BC^2 + CA^2 = BA^2 \Rightarrow 9^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\frac{R}{x} = 4R^2 \quad | \cdot x(x)$

$9^2x^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 Rx = 4R^2x^2$

$9^2x^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^2 = 4\left(\frac{13}{4}\right)^4$

$9^2x^2 = \left(2 \cdot \frac{13^2}{4^2} + \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 4}\right)\left(\frac{2 \cdot 13^2}{4^2} - \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 4}\right) =$

$= \frac{234}{8} \cdot \frac{104}{8} \Rightarrow x^2 = \frac{13^2}{4 \cdot 9} \Rightarrow x = \frac{13}{6} \Rightarrow R = \frac{13^2 \cdot 6}{4^2 \cdot 13} = \frac{13 \cdot 3}{8} = \frac{39}{8} \Rightarrow r = \frac{39}{8} - \frac{13}{6} =$

$= \frac{65}{24}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4 (продолжение)

6. $\angle MDA = \angle BEA = 90^\circ$ т.к опираются на диаметр, $\Rightarrow DM \parallel EB$ по призн $\parallel$ пр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{MA}{MB}$ по т Фалеса $\Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{65 \cdot 2 \cdot 6}{24 \cdot 13 \cdot 2} = \frac{5}{4} \Rightarrow AD = \frac{5}{4} ED$

7. $AD \cdot DE = BD \cdot DC \Rightarrow \frac{5}{4} ED^2 = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2}$

$ED^2 = 13 \Rightarrow ED = \sqrt{13} \Rightarrow AD = \frac{5}{4}\sqrt{13}$

8. $AE = AD + DE = \frac{9}{4}\sqrt{13}$

9. по т син $2R = \frac{EA}{\sin\angle AEF} \Rightarrow \sin\angle AEF = \frac{9\sqrt{13} \cdot 4}{4 \cdot 39} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\Downarrow \angle AEF = \arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}$

10. $\triangle ECD \sim \triangle BAD$ по углам ($\angle ECB = \angle EAB$ ~~по св-ву~~ т.к опир. на одну хорду)

$\Rightarrow \frac{EC}{AB} = \frac{ED}{DB} \Rightarrow EC = \frac{39 \cdot \sqrt{13} \cdot 2}{4 \cdot 13} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

11. $CA \parallel EF$ по св-ву пер. пр $\Rightarrow CAFE$ - трапеция, т.к она вписана в окр, то $CAFE$ - р/б трап $\Rightarrow AF = EC = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

12. проведем $AN \perp EF$, тогда $\frac{AN}{AF} = \sin\angle AEF = \frac{3\sqrt{13}}{13} \Rightarrow AN = \frac{3\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13}}{13 \cdot 2} =$

$= \frac{9}{2} \Rightarrow$ по т Пифагора $NF = \sqrt{AF^2 - AN^2} = \sqrt{\frac{9 \cdot 13}{4} - \frac{9}{4}} = 3\sqrt{3}$

13. $EF = 2NF + AC = 6\sqrt{3} + \sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2 - 9^2} = 6\sqrt{3} + \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{4^2}} = 6\sqrt{3} + \frac{15}{4}$

14. $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} EF \cdot FA \cdot \sin\angle AEF = \frac{1}{2}\left(6\sqrt{3} + \frac{15}{4}\right) \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} =$

$= \frac{9}{4}\left(6\sqrt{3} + \frac{15}{4}\right) = \frac{9(24\sqrt{3} + 15)}{16} = \frac{216\sqrt{3} + 135}{16}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$, $r = \frac{13}{6}$, $\angle AEF = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{13}$

$S = \frac{216\sqrt{3} + 135}{16}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

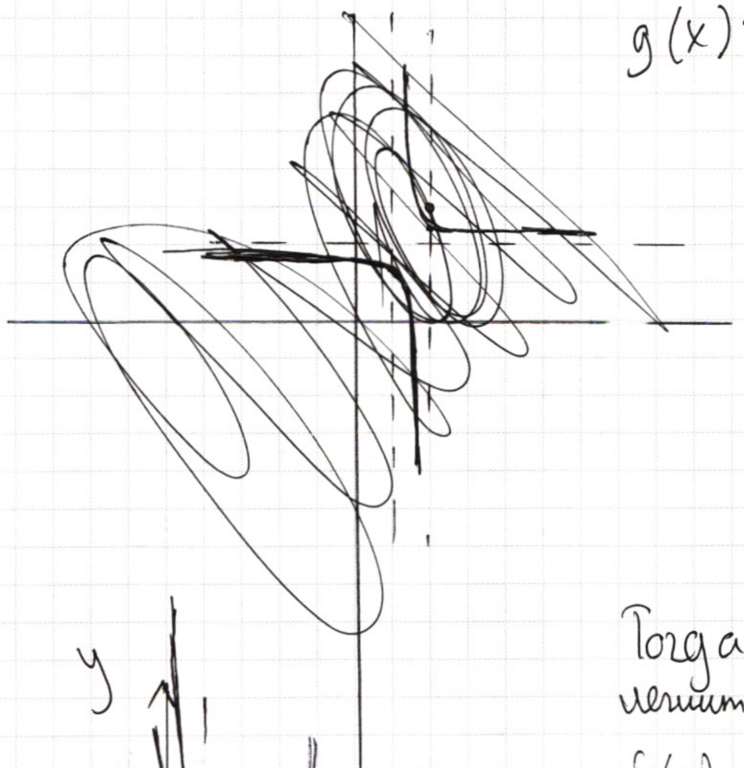
ч6 $\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$ для всех $x\in(1;3]$

$f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$

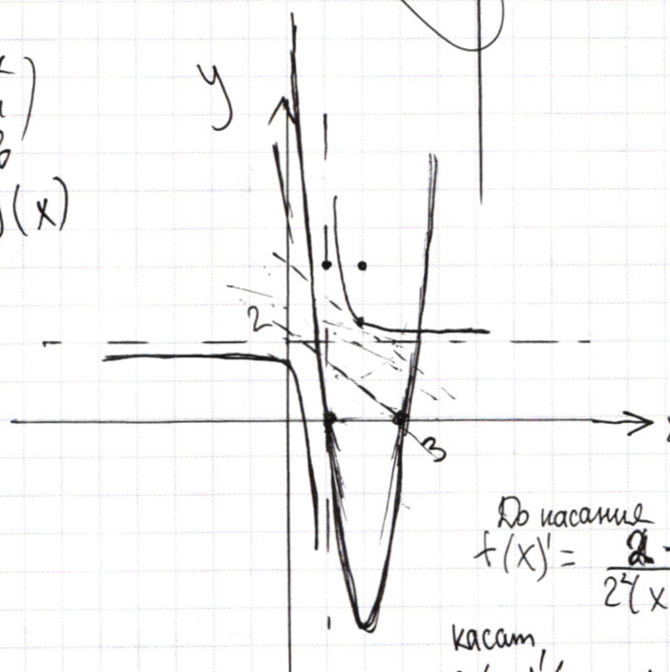
$f(x)=2+\frac{1}{2x-2}$

$g(x)=8x^2-34x+30$

$g(x)=2(4x-5)(x-3)$



(набросок ~~графика~~ графиков $f(x)$ и $g(x)$)



Тогда прямая $ax+b$ лежит между графиками $f(x)$ и $g(x)$ (на $(1;3]$)

· если $a<0$, то прямая $ax+b$ (где a - const)

$ax+b=0$

$a3+b=0$

$b=-3a$ (в этом случае прямая пер. параболу)

До касания

$f(x)'=\frac{\cancel{2}-0}{2^2(x-1)^2}=\frac{2}{4^2(x-1)^2}$

касат

$f(x_0)'(x-x_0)+f(x_0)$ $f'(x_0)=a$

$\Rightarrow a(x-x_0)+f(x_0)$

$\frac{4^2(x_0-1)^2}{2}=\frac{1}{a}$

$(x_0-1)^2=\frac{2}{4^2a}$

$x_0-1=$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

5. $f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ (y - натуральное)

$f(1)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(y)=f(y)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$, тогда $f(y)=-f\left(\frac{1}{y}\right)$

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$f(2)=0$
$f(3)=0$ — простые числа
$f(5)=1$
$f(7)=1$
$f(11)=2$
$f(13)=3$
$f(17)=4$
$f(19)=4$
$f(23)=5$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$
$f(6)=f(2)+f(3)=0$
$f(8)=f(4)+f(2)=0$
$f(9)=f(3)+f(3)=0$
$f(10)=f(2)+f(5)=1$
$f(12)=f(4)+f(3)=0$
$f(14)=f(2)+f(7)=1$
$f(15)=f(5)+f(3)=1$
$f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(18)=f(9)+f(2)=0$
$f(20)=f(2)+f(10)=1$
$f(21)=f(3)+f(7)=1$
$f(22)=f(11)+f(2)=2$
$f(24)=f(6)+f(4)=0$
$f(25)=f(5)+f(5)=2$
$f(26)=f(13)+f(2)=3$
$f(27)=f(9)+f(3)=0$

Тогда $f(x)-f(y)<0$, тогда
$f(x)<f(y)$

1) если $f(x)=0$ - 10 случаев, то
$f(y)$ - любое кроме 0 (15 случаев)
$\Rightarrow$ таких пар $10\cdot15=150$

2) если $f(x)=1$ - 7 случаев, то
$f(y)=2,3,4,5$ - 8 случаев $\Rightarrow$
таких пар $7\cdot8=56$

3) если $f(x)=2$ - 3 случая, то $f(y)=3,4,5$ - 5 случаев $\Rightarrow$
таких пар $3\cdot5=15$ 4) $f(x)=3$ - 2 случая $\Rightarrow f(y)=4,5$ - 3 случая $\Rightarrow$
всего пар $2\cdot3=6$ 5) $f(x)=4$ (2 случ) $\Rightarrow f(y)=5$ (1 случай) $\Rightarrow$ пар 2
$f(x)=5$ - $f(y)$ - таких нет

$\Rightarrow$ всего $150+\overset{206}{56}+\overset{221}{15}+\overset{227}{6}+2=229$ Ответ: 229 пар

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$

$4\left(x - \frac{10}{4}\right)(x - 3)$

$(4x - 10)(x - 3)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f($

$f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) +$ ~~$f(1) = 0$~~

$\frac{3}{4}$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

3, 5, 7

$f(2) = 0$

$f(4) = 0$

$f(17) = 4$

$f(23) = 5$

$\frac{5}{2}$

$\frac{9}{4}$

$f(x) - f(y)$

$x = \frac{17 + 7}{8}$ $\frac{24}{3}$

$\frac{17 - 7}{8}$ $\frac{10}{4}$ $6 = \frac{5}{4}$

$f(2) = 0$ $f(4) = 0$

$f(3) = 0,\ f(4) = 0,\ f(5) = 1,$

$\times\ 15$
16
90
15

$2(4x^2 - 17x + 15)$

$17^2 - 16 \cdot 15$

$17^2 - 15 \cdot 16$

$17 \cdot 17 = 119 + 170 = 289$, $289 - 240 = 49$

$= 189 - 120 = 79$ $\quad 7$

(a, b)

$8 - 34 + 30$

$-\frac{b}{2a} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

-4 $\quad ax + b$

$4 \cdot 8 - 68 + 30$

$32 + 30$

$62 - 68$

$32 + 30$

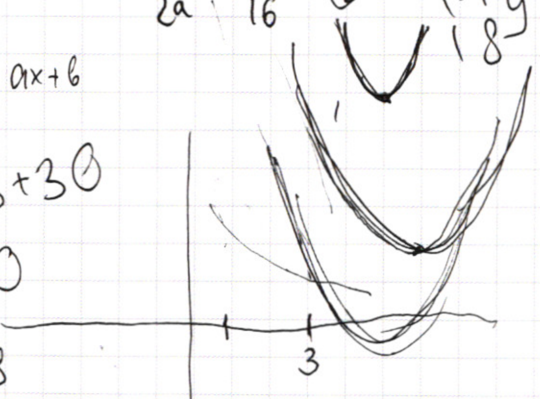
-4

$4x - 3$

$2 + \frac{4x - 4}{2x - 2}$

$\frac{1}{2(x-1)}$

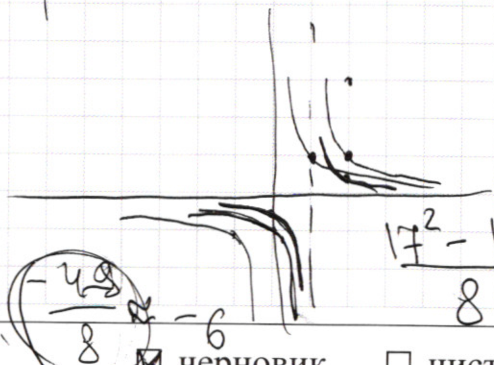
$\times\ 15$
16
90
15
240



$\frac{1}{x-1}$ $\quad \frac{1}{x}$

$2 - 1$

1



$+30$

$\frac{240 - 17^2}{8} = \frac{-49}{8}$ $\quad -6$

$\frac{17^2 - 17^2 \cdot 2}{8}$

$\frac{17^2}{8} - \frac{34 \cdot 17}{8} + \frac{30 \cdot 8}{8}$

$-\frac{17^2 + 30 \cdot 8}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^{\log_a b} = b$

$x^2+6x>0$

65

$\left(2\cdot\left(\frac{13}{4}\right)^2+\frac{5}{2}\cdot\frac{13}{4}\right)$

$\left(\frac{169+65}{8}\right)\left(\frac{169-65}{8}\right)$

$\left(\frac{234}{8}\right)\frac{104}{8}$

$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-3^{\log_4 x^2+6x}$

$x^2+6x=t$ $\quad t>0$

$t \geq |t|^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}$

$4^{\log_4 t}$

$\frac{\boxed{\cancel{234}}\cdot 104}{8\cdot 8\cdot 9}$

$x^2+6x=0$

$4\cdot^{\log_4 t^{\log_4 5}}$

$4^{\log_4 5\cdot\log_4 t}$

$\frac{\sqrt3+\sqrt4}{\sqrt{12}} \geq \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \frac{1}{\sqrt4}+\frac{1}{\sqrt3} \geq \frac{1}{\sqrt5}$

$\sqrt3+\sqrt4 \geq \sqrt{\frac{12}{5}}$

$\sqrt3+2 \geq$

$4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}-3^{\log_4 t}$

$4^z \geq 5^z-3^z$

$4^z+3^z \geq 5^z$

$3^x+4^x \geq 5^x$

$4^z \geq 5^z$

$\log_4 4^z \geq \log_4 5^z$

$z \geq z\log_4 5$

$z(1-\log_4 5) \geq 0$

$\log_3(3^z+4^z) \geq \log_3(5^z)$

$\log_3(3 \quad \geq z\log_3 5$

$4^{\log_4 t\cdot 3\log_4 t}$

$4^{\log_4 t\cdot\log_4 3}$ $\quad \frac14+\frac13 \geq \frac15$

$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4} \geq t^{\boxed{\log_4 5}}$

$\left(\frac35\right)^x+\left(\frac45\right)^x \geq 1$

$\left(\frac35\right)^x+\left(\frac45\right)^x \geq 1$

$\log_3(3^x+4^x) \geq \log_3 5^x$

$\log_{\frac{\sqrt{12}}{5}} x$

$x \geq \log_{\frac{\sqrt{12}}{5}}\frac12$

$\frac{39}{8}-\frac{13}{6}$

$\frac{\boxed{39\cdot3}-13\cdot4}{24}=\frac{13(9-4)}{24}=\frac{13\cdot5}{24}$

$\left(\frac35\right)^x\left(\frac45\right)^x \geq 2$

$\left(\frac35\right)^x+\left(\frac45\right)^x \geq 2\frac{12^{x/2}}{5^x} \geq 1$

$2\frac{\sqrt{12}^x}{5^x} \geq 1$

$2\cdot 12^{\frac{x}{2}} \geq 5^x$

~~$2\cdot 12^{\frac{x}{2}} \geq \log$~~

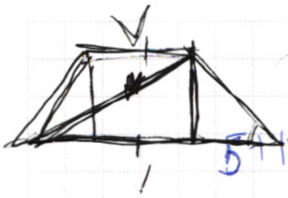
~~$\log_5 2\,12^{\frac{x}{2}}$~~

$\left(\frac{\sqrt{12}}{5}\right)^x \geq \frac12$

$\frac{6\cdot13\cdot3}{4}$ $\quad \frac{13}{2}$

~~$\log_2$~~ $1+\frac{x}{2}\log_2 12 \geq x\log_2 5$

$2+x6$



$5+13=18$

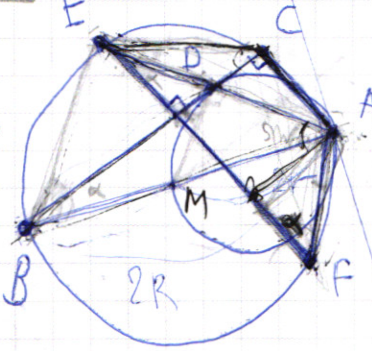
$CD=\frac{5}{2}$ $BD=\frac{13}{2}$

$4R^2=9^2+CA^2$

$CA\cdot CK=\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\frac{9}{4^2}(169-144)$ 25 9

$\cancel{\frac{ED}{BD}}=\cancel{\frac{DC}{}}$



$\frac{AE}{AD}=\frac{AD}{}+\frac{ED}{AD}=$

$ED\cdot DA=\frac{65}{4}$

$(2R)^2$ $\frac{13}{4}$ $\frac{3\cdot 5}{4}$

$\frac{5\cdot 2\cdot 2}{24}$

$=4R\cdot r$

$\frac{2R}{2r}=\frac{R}{r}$

$CA\frac{R}{R}=AK$

$CA=AK\cdot\frac{R}{r}$

$9(13^2-9\cdot 4^2)$

$\frac{(39)^2-9^2\cdot 4^2}{4^2}=$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2=4R^2-4R\cdot r$ 9^2+CA^2

$\boxed{\left(\frac{13}{2}\right)^2=2R\cdot(2R-2r)}$

$CA^2-4R\cdot r$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2=4Rx$ $\frac{39}{8}$ $\frac{39}{4}$

$\frac{AD}{AE}=\frac{AD+DE}{AD}$

$\frac{2r}{2R}$ $\frac{13}{2DE}$

$\boxed{\frac{AK}{CK}=\frac{2r}{(2R-2R)}}$

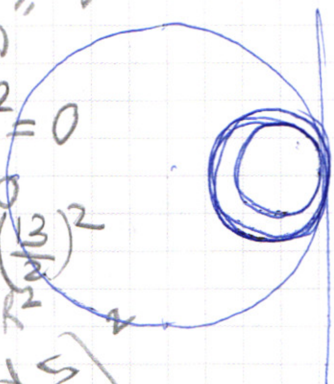
$\frac{2R-2r}{2r}=CK$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2/4R=x$

$\frac{9}{4}(13-1$

$DE\cdot AD=\frac{5}{2}\cdot\frac{13}{2}$

$AD=\frac{5}{2}$



$4R^2-4R\cdot r-\left(\frac{13}{2}\right)^2=0$

$R^2-R\cdot r-\left(\frac{13}{4}\right)^2=0$

$D=r^2+4\cdot\left(\frac{13}{4}\right)^2=r^2+\left(\frac{13}{2}\right)^2$

$CA^2+\ \ \ =4R^2$

$\frac{CK}{CA}=\frac{CK}{CK+KA}=$

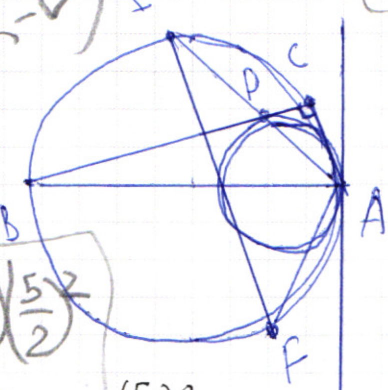
$R=r\pm\sqrt{r^2+\left(\frac{13}{2}\right)^2}$ $4R\cdot r$

$r+\sqrt{r^2+\left(\frac{13}{2}\right)^2}$

$\left(\frac{R}{R-r}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\boxed{\frac{CA}{CK}}=\frac{CK+KA}{CK}=1+\frac{r}{R-r}$

$1+\frac{13/2}{5/2}$



$CA^2=$

$\boxed{4R^2=9^2+\left(\frac{R}{R-r}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^2}$

$\cancel{CA=C}$ $CA=CK\cdot 1+\frac{r}{R-r}$

$\frac{CA}{CK}=\frac{R}{R-r}$

$4R^2(R-r)=9^2(R-r)+R\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$CK=CA\frac{R-r}{R}$ $\frac{CK}{CA}=\frac{R-r}{R}$

$\frac{4R^2(13)^2}{2\cdot 4R}=\frac{9^2+(13)^2}{R\ 8}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\alpha = ?$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cancel{\cos} 2\beta \cdot \cos 2\beta$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{17}$

$tg\alpha$

$\cos^2(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\cancel{\alpha}\cdot\cos\cancel{\beta}\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\beta$

$\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta-\alpha)\right)$

$2\beta \quad -2\alpha-2\beta$

$\frac{1}{2}\left(\sin\cancel{2\alpha}+\cancel{2\beta} + \sin(+2\alpha)\right)$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\beta\cdot\sin\alpha$

$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\cdot tg\beta}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin^{2\alpha+2\beta}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cancel{1-2\cos\alpha\cos\alpha+1}\ \cancel{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha}$

$2\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg 2\alpha \boxed{\frac{2tg\alpha}{1-tg^2}}$

$= \frac{4}{17}$

$\frac{2tg\alpha}{2 -}$

$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}} + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$= -\frac{4}{17}$

$\cos 2\alpha + 2\beta = +\frac{4}{\sqrt{17}} \quad \sin 2\beta\,\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin 2\alpha} =$

$\cancel{2\cos^2\alpha} - 1$

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{17} - \frac{4}{17} = -\frac{8}{17}$

$\boxed{\cos 2\alpha = \frac{15}{17}}$

$\boxed{\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}}$

$-\frac{32}{17}\cdot\frac{1}{\cancel{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}$

$\cancel{2\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) - 1}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = \frac{32-1}{17} = \frac{32-17}{17} = \frac{15}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

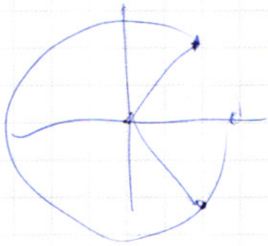
$\cos 2\beta = \cos(2\alpha + 2\beta)$

$2\beta = 2\alpha + 2\beta + 2\pi n$

$2\beta = -2\alpha - 2\beta + 2\pi n$

$2\alpha = -2\pi n$

$\alpha = -\pi n$



$\frac{4-\sqrt{10}}{6} \ ? \ 0$

$4-\sqrt{10} \quad 2$

$4 \quad \sqrt{10}$

$(3y-2x)$

$3y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$9y^2 - 3y(5x-1) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 9(5x-1)^2 - 9 \cdot 4(4x^2 + 2x - 2) =$

$= 9(25x^2 - 10x + 1) - 9(16x^2 + 8x - 8) = 9(9x^2 - 18x + 9)$

$3 \cdot 3 \cdot 2$

$(3x^2+3)$

$\frac{12}{9} + \frac{9}{9} + \frac{4}{9}$ $\quad 3x^2 - 6x \quad + 3y^2 - 4y$ $\quad 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \ \overset{?}{<} \ 0$

$= \frac{16+9}{9}$ $\quad (x^2 - 2x + 1)$ $\quad 1 < \frac{5}{2}$

$\frac{4}{3} - \frac{2}{3}$

$\frac{8}{3} - \frac{2}{3} \quad \frac{6}{3}$ $\quad \frac{4}{3} \quad \frac{2}{3}$ $\quad \frac{2}{3} y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

$\frac{2}{3} \cdot 2$

$21 \quad 25$

$\frac{4}{3} + 1 + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} + \frac{9}{9} + \frac{4}{9}$ $\quad (x-1)^2 + \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

$(x-1)^2 + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

$\boxed{15x + 9}\, x - 3 - 9$

$3(3x-3)$ $\quad \frac{24x}{18} - \frac{12}{18} = \frac{4x}{3} - 2$ $\quad (x+1)^2 \frac{(x-1)^2}{9}$

$9x - 9$ $\quad \boxed{15}x - 3 - 9x + 9 = 6x + 6$ $\quad (x-1)^2 = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{25}{9} = \frac{5}{2}$

$\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}$ $\quad 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2$ $\quad \frac{6x}{18} + \frac{6}{18}$

$4 - \quad \frac{16}{9} \quad 2 \cdot 1 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)