# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$f(x)$

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина $Y$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $TY$. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра $XZ$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_5\frac{12}{5}+\log_5\frac{13}{12}$

$\log_5\frac{13}{5}$

$y^{\log_5\frac{12}{5}}-y^{\log_5\frac{12}{5}}\cdot y^{\log_5\frac{13}{12}}+1\geq 0$

$y^{\log_5\frac{12}{5}}-y^{\log_5\frac{13}{5}}+1\geq 0$

$y^{\log_5\frac{12}{5}}-y^{\log_5\frac{13}{5}}\geq -1$

$y^{\log_5\left(\frac{12}{5}+\frac{1}{5}\right)}-y^{\log_5\frac{12}{5}}\leq 1$

$y^{\log_5\frac{13}{5}}-y^{\log_5\frac{12}{5}}\leq 1$

☑ черновик ☐ чистовик

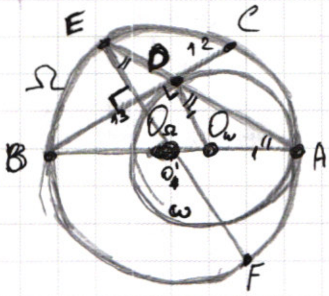
(Поставьте галочку в нужном поле)

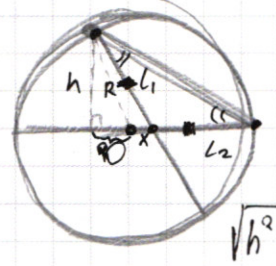
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4).

$CD=12$
$BD=13$




$R^2=a^2+h^2$

$L_1=L_2$

$\sqrt{h^2+(a+x)^2}=R-x$

$\underbrace{h^2+a^2}_{R^2}+2ax+\cancel{x^2}=R^2-2Rx+\cancel{x^2}$

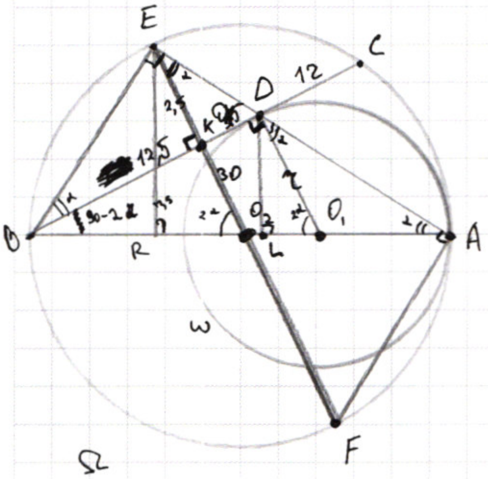
$2ax=-2Rx$

$ax=-Rx$

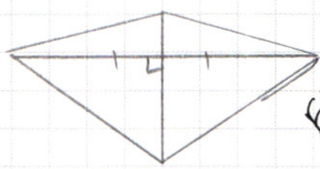
$x(a+R)=0$

$x=0$

$\Rightarrow EF\cap AB=O_2$




$BD=13$
$DC=12$
$BK=KC$
$13-x=12+x$
$2x=1$
$x=0,5$



$EK\cdot tg\alpha=\frac{1}{2}$

$EK=\frac{1}{2\cdot tg\alpha}$

$BC=25$

$R^2+R^2-2R^2\cdot\cos4\alpha=25^2$

(1) $2R^2(1-\cos4\alpha)=25^2$

$\cancel{2\cdot\frac{25^2}{4\cdot\sin^2 2\alpha}\cdot 2\cdot\sin^2 2\alpha=25^2}$

$R\cdot\cos(90-2\alpha)=12,5$ $\quad R\cdot\sin2\alpha=12,5$

$R=\frac{25}{2\cdot\sin2\alpha}$

$\sin^2 2\alpha=\frac{1-\cos4\alpha}{2}$

$\boxed{(1)\quad R\cdot\sin2\alpha=\frac{25}{2}}$

$\boxed{(2)\quad R\cdot\sin^2\alpha\cdot tg\alpha=\frac{1}{4}}$

$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$1+25=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$O_2K=R\cdot\cos2\alpha$

$EK=R-R\cos2\alpha$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$

$0,5=EK\cdot tg\alpha$

$0,5=R(1-\cos2\alpha)\cdot tg\alpha$

$0,5=R\cdot2\sin^2\alpha\cdot tg\alpha$

$\boxed{\alpha=arctg\frac{1}{5}}$

$\frac{2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha\cdot tg\alpha}=\frac{25}{2}\cdot\frac{4}{1}$

$\frac{1}{tg^2\alpha}=25\to\boxed{tg\alpha=\frac{1}{5}}$

$ctg\alpha=5$

$s^2+c^2=1$

$1+ctg^2=\frac{1}{s^2}$

$1+25=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ $\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$

$R\cdot\frac{1}{26}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

$R=\frac{\cancel{26}^{13}\cdot5}{\cancel{4}_2}$ $\quad R=\frac{65}{2}=32,5$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{2} = EK\cdot\frac{1}{5} \to EK = 2,5$

$O_2K = R - EK = 30$

$\frac{12,5}{h} = \frac{32,5}{30} \to h = \frac{30\cdot 12,5}{32,5} = \frac{30\cdot 12,5}{325}$

$\frac{h}{DL} = \frac{12,5}{13} \to DL = \frac{13\cdot h}{12,5} = \frac{13}{\cancel{12,5}}\cdot\frac{30\cdot \cancel{12,5}}{32,5} = \frac{13\cdot 30}{32,5}$

$r\cdot\sin 2\alpha = \frac{13\cdot 30}{32,5}$

$r = \frac{13\cdot 30}{32,5}\cdot\frac{1}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\cancel{13}\cdot \overset{6}{\cancel{30}}\cdot 26}{\frac{\cancel{65}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}} = \frac{26\cdot 6}{5} = \frac{26\cdot 6\cdot 2}{10} = 31,2$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5}{13}$

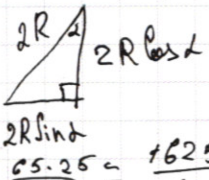
$\times\, 26$
$\quad 12$
$+\, 52$
$\; 26$
$\; 312$

$\angle AFE = \frac{1}{2}\cdot\angle ELA = \frac{180-2\alpha}{2} = 90-\alpha$

$\angle ELA = 180 - 2\alpha$

$tg\angle AFE = \cancel{tg(\alpha-90)}\ ctg\,\alpha = 5$

$\boxed{\angle AFE = arctg\,5}$




$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha\cdot 2R\cos\alpha =$

$= R^2\cdot\sin 2\alpha = \left(\frac{65}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{13} = \frac{65\cdot \overset{5}{\cancel{65}}}{4}\cdot\frac{5}{\cancel{13}} = \frac{65\cdot 25}{4} = \frac{1625}{4} = \underline{406,25}$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

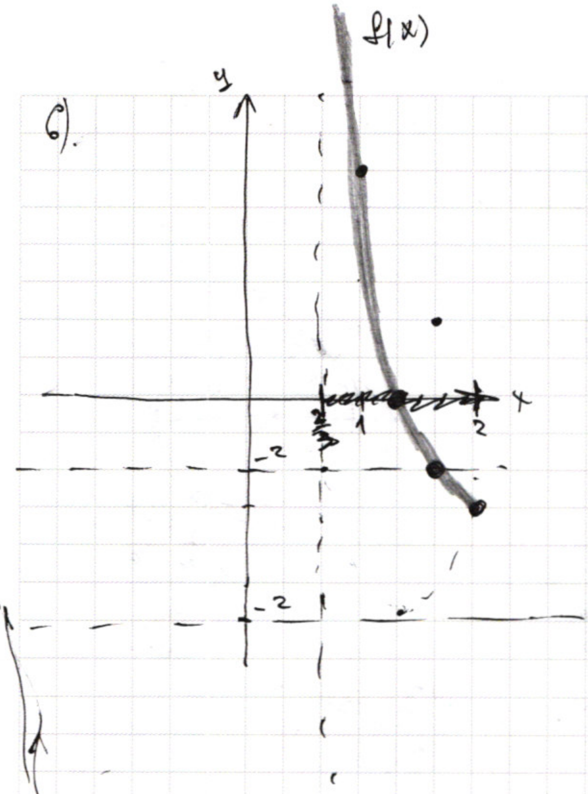
$\times\, 65$
$\quad 25$
$+\, 325$
$\; 130$
$\; 1625$

$1625 : 4 = 406,25$
$-16$
$\;\; 25$
$\; -24$
$\;\;\; 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

б).




$$\frac{8-6x}{3x-2} = -\frac{6x-8}{3x-2} = -\frac{2(3x-2)-4}{3x-2} =$$

$$= -2 + \frac{4}{3x-2} =$$

$$= -2 + \frac{\frac{4}{3}}{x-\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = -2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x-\frac{2}{3}}$$

$x = 1$: $f(x) = -2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{1}$

$x = \frac{4}{3}$ $f(x) = -2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$

$x = 2 \cdot$ $f(x) = -2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$

$g(x) \leq ax + b \leq f(x)$

5). $f(x)$ $\quad D(f) = R > 0$

$\forall a,b \in D(f)$ : $f(ab) = f(a) + f(b)$

$$\boxed{f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \quad \text{простые } p \quad \text{— целая часть}}$$ $f(p) = p // 4$

$4 \leq x \leq 28$

$4 \leq y \leq 28$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x/y) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

ab

f(a)+f(b)

$f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(2 \cdot \frac{1}{8}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{8}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$g(x) = 18x^2 - 51x + 28$

$g(x) = 18\left(x^2 - \frac{51}{18}x + \frac{28}{18}\right)$

$2\left(9x^2 - 2 \cdot 3x \frac{51}{12} + 28\right)$

$2\left(\left(3x - \frac{51}{12}\right)^2 + 28 - \left(\frac{51}{12}\right)^2\right)$

$2\left(3x - \frac{51}{12}\right)^2 + 56 - \frac{51 \cdot 51}{12 \cdot 6}$

$6\left(x - \frac{51}{36}\right)^2 + 56 - \frac{51^2}{36 \cdot 2}$

2
3
5
7
11
13
17
19
23

$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y$

$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} = \sin x \cdot \sin y$

$\sin(2\alpha+4\beta) \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{\cos 2\beta - \cos(4\alpha-6\beta)}{2}$

$\sin 2\alpha \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{\cos 2\beta - \cos(4\alpha+2\beta)}{2}$

$\sin 2\alpha + \sin(2\alpha+2\beta) = 2 \cdot \sin(2\alpha+\beta) \cdot \cos\beta$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

~~Sin(α+~~

$$\begin{cases} \sin(a+b) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(a+2b) + \sin a = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$\cos b = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2b = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}$

$\cos 2b = \sqrt{1-\frac{8^2}{17^2}} = \frac{\sqrt{9\cdot 25}}{17} = \frac{15}{17}$

$\sin a + 4\cos a = -1$

$\sin a\cdot\frac{15}{17} + \cos a\cdot\frac{8}{17} + \sin a = -\frac{2}{17}$

~~$\sqrt{17}(\sin(a+b)) = -1$~~

$\cancel{\frac{32}{17}\sin a}$ $16\sin a + 8\cos a = -2$

$8\sin a + 4\cos a = -1$

$\sin a \pm 4\cos a = -1$

$\sin(a+2b) - \sin(a+b) = 2\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\cos\left(a+\frac{b}{2}\right)$

$\sin a = \frac{-1-4\cos a}{8}$

$8x+4y=-1$

$x-4y=-1$

$9x=-2$

$8x+4y=-1$

$x+4y=1$

$7x=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1+tg^2=\frac{1}{Cos^2}$

$Ctg^2+1=\frac{1}{Sin^2}$

$\pm\sqrt{1-x^2}=-1\mp 4x$

$1-x^2=16x^2\pm 8x+1$

$\sin x\pm 4\cos x=-1 \iff \left[\begin{array}{ll}\sin x+4\cos x=-1 & (1)\\ \sin x-4\cos x=-1 & (2)\end{array}\right.$

$\sin x=-1-4\cos x$

$\sin^2 x=1+8\cos x+16\cos^2 x$

$\sqrt{1-x^2}=-1-4x$

$\sqrt{1-x^2}=-1+4x$

$-\sqrt{1-x^2}=-1-4x$

$\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha=$

$=\cancel{(2\cos\alpha)^2+2\cdot 2\cos\alpha\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)+\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2}$

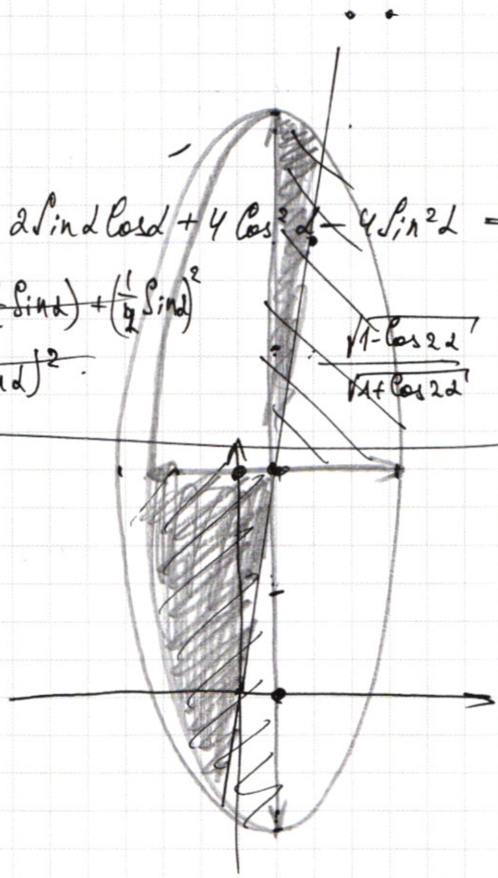
$\cancel{\left(2\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2}$

$\frac{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$

$$\begin{array}{r} 135\\ \times\ 23\\ \hline 405\\ +270\ \\ \hline 3105\end{array}$$

$(x-1)^2+\frac{(y-6)^2}{3^2}=10$

$\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{10})^2}+\frac{(y-6)^2}{(3\sqrt{10})^2}=1$



$(y-6)(x-1)\geq 0$

$x-1>0 \quad x>1$

$y-6>0 \quad y>$

$y^2-12xy+36x^2=(y-6)(x-1)$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$

$y^2-12xy+36x^2=y(x-1)-6(x-1)$

$y^2+y(-12x-x+1)+36x^2+6x+6=0$

$y^2+y(1-3x)+6(6x^2+x+1)=0$

$y-6x\geq 0$

$y\geq 6x$

$D=(1-3x)^2-24(6x^2+x+1)=$

$=\ [illegible]\ -135x^2-30x-23=$

$=-(135x^2+30x+23)=0$

$D_1=15^2-23\cdot 135<0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1). $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(\overset{\alpha}{x}+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-\overset{\beta}{y}) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot \sin \underset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{x}\cdot \cos \underset{\frac{\alpha-\beta}{2}}{y} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cancel{2\sin\beta\cdot\cos(2\alpha+3\beta) = -\frac{2}{17}+\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{(\sqrt{17})^2} \longrightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{17}{17}-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad |\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$\pm\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1 \mp 4\cos 2\alpha$

$\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1-4\cos 2\alpha$ $\quad$ $1-\cos^2 2\alpha = 1+8\cos 2\alpha+16\cos^2 2\alpha$

$\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1+4\cos 2\alpha$

$-\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1-4\cos 2\alpha$

$-\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1+4\cos 2\alpha$

$tg\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$tg\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

$|:\cos^2\alpha$

$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{2\cdot tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

2). $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\sqrt{x(y-6)-(y-6)}=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

$(3x)^2-3x\cdot2\cdot3+(3)^2+y^2-y\cdot2\cdot6+(6)^2=45+45$

$(3x+3)^2+(y-6)^2=90$

$\begin{cases} y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \\ y-6x\geq0 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

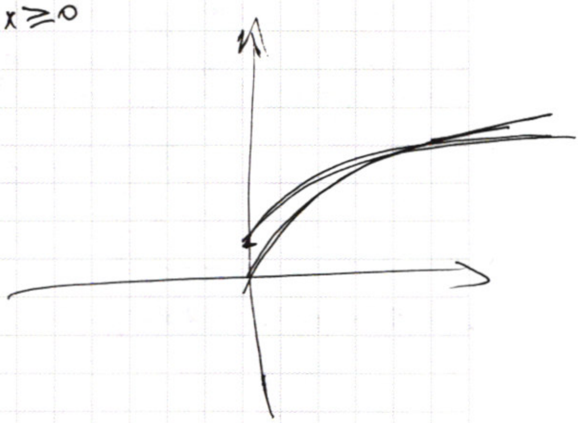
$\begin{cases} 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \\ y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} \end{cases}$

$\begin{cases} 6(x-1)(y-6)=6(y-6x)^2 \\ y-6x\geq0 \end{cases}$

$9(x-1)^2+2\cdot3(x-1)(y-6)+(y-6)^2$

$(3(x-1)+(y-6))^2$

$(3x+y-9)^2=90+6(y-6x)^2$



$t=25$

$25^{\log_5 12}+25\geq13^{\log_5 25}$

$144+25\geq13^2$

N3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(x^a)'=ax^{a-1}$

ОДЗ:

$26x-x^2>0$

$x^2-26x<0$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2\geq13^{\log_5(26x-x^2)}$

Замена: $26x-x^2=y$, $y>0$

$y^{\log_5 12}+y\geq13^{\log_5 y}$

$y^{\log_5 12}+y\geq y^{\log_5 13}$

$y^{\log_5 12}\left(1-y^{\log_5 13-\log_5 12}\right)\geq-y$

*

$13^{\log_5 y}=y^{\log_5 13}$

$y^{\log_5 12}\left(1-y^{\log_5\frac{13}{12}}\right)+y\geq0$

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$y\left(y^{\log_5 12-1}\left(1-y^{\log_5\frac{13}{12}}\right)+1\right)\geq0$

$\log_b a^{\log_b c}=\log_b c^{\log_b a}$

$\left(y^{\log_5\frac{12}{5}}\left(1-y^{\log_5\frac{13}{12}}\right)+1\right)\geq0$

$\cancel{\log_b c}\cdot\log_b a=\log_b a\cdot\cancel{\log_b c}$

$y^{\log_5\frac{12}{5}}\left(1-y^{\log_5\frac{13}{12}}\right)\geq-1$

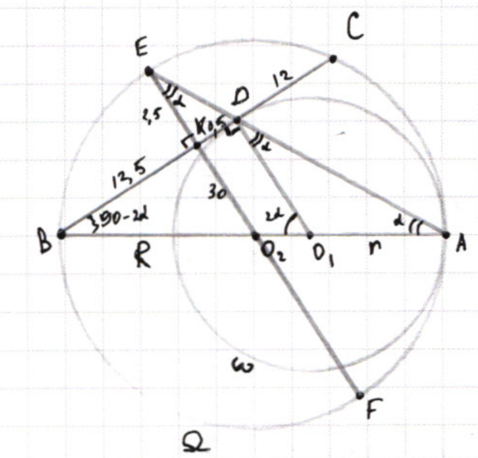
$1=1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



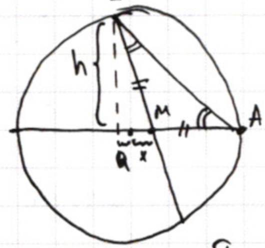

1). Проведём $O_1D$. $O_1D \perp BC$ (радиус к касательной)

$EF \perp BC \Rightarrow EF \parallel O_1D \Rightarrow \angle ADO_1 = \angle AEO_2 = \alpha$

$\triangle O_1DA$ – равноб. ($O_1D = O_1A = r$) $\Rightarrow \angle O_1AD = \angle ADO_1 = \alpha$

Тогда $\triangle EO_2A$ – равноб.

2). Пусть $O_2 \notin EF$; $EF \cap AB = M$




$EM^2 = h^2 + (a+x)^2$

$AM = R - x$

$h^2 + a^2 = R^2$

Т.о., $EM^2 = h^2 + a^2 + 2ax + x^2 =$
$= R^2 + 2ax + x^2$

$AM^2 = R^2 - 2Rx + x^2$

$EM^2 = MA^2 \Rightarrow \cancel{R^2} + 2ax + \cancel{x^2} = \cancel{R^2} - 2Rx + \cancel{x^2}$

$2ax = -2Rx$

$x(a+R) = 0$

$x = 0 \Rightarrow M$ совп. с $O_2$;

$EF \cap AB = O_2$

3). EF – диаметр; $EF \perp BC \Rightarrow$ делит BC пополам: $BK = KC$, $BK = 13 - KD$, $KC = 12 + KD$ $\Rightarrow KD = 0,5$; $BK = 12,5$

4). $\angle DO_1B = 2\alpha$ (внешний) $\Rightarrow \angle DBO_1 = 90 - 2\alpha$

$BK = 12,5 = R\cos(90 - 2\alpha) = R\sin 2\alpha \Rightarrow R \cdot \sin 2\alpha = 12,5$ (1)

5). $O_2K = R \cdot \sin(90 - 2\alpha) = R \cdot \cos 2\alpha$; $EK = R - R\cos 2\alpha$; $KD = EK \cdot tg\alpha = R(1 - \cos 2\alpha) \cdot tg\alpha = 0,5$

$R \cdot 2\sin^2\alpha \cdot tg\alpha = 0,5$ (2)

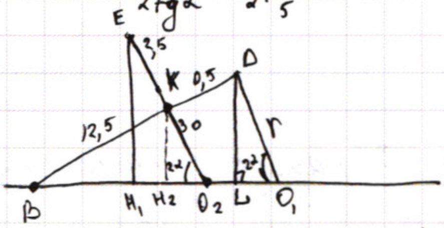
$\frac{(1)}{(2)} = \frac{R \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{R \cdot 2\sin^2\alpha \cdot tg\alpha} = \frac{25 \cdot 2}{2 \cdot 1} \Rightarrow \frac{1}{tg^2\alpha} = 25 \Rightarrow \boxed{tg\alpha = \frac{1}{5}}$

№4 (продолжение).

$tg\alpha = \frac{1}{5} \to \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ (3): $R\cdot\frac{1}{26}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{4} \to R = \frac{26\cdot5}{4} = 32,5$ $\boxed{R = 32,5}$

6). $EK = \frac{1}{2tg\alpha} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{5}} = 2,5$ $KO_2 = R - EK = 30$ $\triangle BO_2E$ - равноб ($BL = LE$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow EH_1 = BK$ (высоты к равным сторонам)




$\frac{EH_1}{KH_2} = \frac{32,5}{30}$ $EH_1 = 12,5$

$KH_2 = \frac{30\cdot12,5}{32,5}$

$\frac{KH_2}{DL} = \frac{12,5}{13} \to DL = \frac{13\cdot KH_2}{12,5}$

$\frac{DL}{r} = \sin2\alpha \to r = \frac{DL}{\sin2\alpha} = \frac{13\cdot KH_2}{12,5\cdot\sin2\alpha} = \frac{13\cdot30\cdot\cancel{12,5}}{\cancel{12,5}\cdot\sin2\alpha\cdot32,5} = \frac{13\cdot30}{32,5\cdot2\cdot\underbrace{\sin\alpha}_{\frac{1}{\sqrt{26}}}\cdot\underbrace{\cos\alpha}_{\frac{5}{\sqrt{26}}}} =$

$= \frac{\cancel{13}\cdot\cancel{30}^{6}\cdot26}{\cancel{32,5}\cdot2\cdot\cancel{5}} = \frac{26\cdot6}{5} = 31,2$

$\boxed{r = 31,2}$

7). $\angle AFE = \frac{1}{2}\cdot\angle ELA = 90 - \alpha$ $tg\angle AFE = ctg\alpha = 5 \to \boxed{\angle AFE = arctg5}$

8). $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF$ ($\angle EAF = 90^\circ$ - оп. на диаметр)

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot2R\sin\alpha\cdot2R\cos\alpha = R^2\cdot\sin2\alpha = \left(\frac{65}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{13} = 406,25$

$\boxed{S_{\triangle AEF} = 406,25}$

Ответы в прямоугольных рамках.

N1. $tg\alpha$-?

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

1). $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos2\beta$

Т.о., $-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos2\beta = -\frac{2}{17} \to \cos2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos4\beta = \frac{15}{17}$ $\sin4\beta = \frac{8}{17}$

2). $\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos2\alpha\cdot\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin2\alpha \pm 4\cos2\alpha = -1$ (1)

$\sin2\alpha\cdot\frac{15}{17} + \cos2\alpha\cdot\frac{8}{17} \overset{+\sin2\alpha}{=} -\frac{2}{17}$ $15\sin2\alpha + 8\cos2\alpha \overset{+\sin2\alpha}{=} -2$

Замена: $\sin2\alpha = x$ $\cos2\alpha = y$, $x, y \in [-1; 1]$ $16\sin2\alpha + 8\cos2\alpha = -2 \to 8\sin2\alpha + 4\cos2\alpha = -1$ (2)

$\begin{cases} x \pm 4y = -1 \\ 8x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 4y = -1 \\ 8x + 4y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 4y = -1 \\ 8x + 4y = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ - н.у.} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right.$

Т.о. $\sin2\alpha = 0$

$2\alpha = \pi n$

$\alpha = \frac{\pi n}{2}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \iff \begin{cases} y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \\ (y-6x)^2=(y-6)(x-1)^{*} \\ y-6x\geq 0 \end{cases}$$

$*\quad y^2-12xy+36x^2=y(x-1)-6(x-1)$

$y^2+y(-12x-x+1)+36x^2+6x-6=0$

$y^2+y(1-3x)+6(6x^2+x-1)=0$

$D=(1-3x)^2-4(36x^2+6x-6)=-135x^2-30x+25=-5(27x^2+6x-5)$

№3.

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $x^2-26x>0$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2\geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Замена: $26x-x^2=t$, $t>0$

$$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$$

$$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13} \quad |:(t>0)$$

$$t^{\log_5 12-1}+1\geq t^{\log_5 13-1}$$

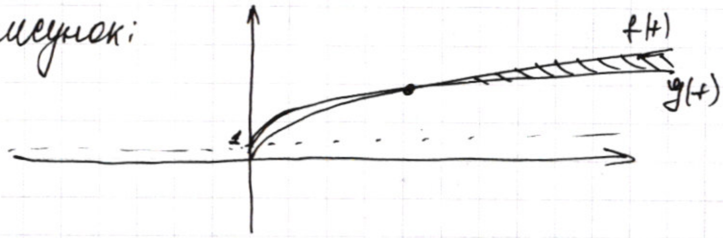
$$\underbrace{t^{\log_5\frac{12}{5}}+1}_{g(t)}\geq \underbrace{t^{\log_5\frac{13}{5}}}_{f(t)}$$

$f(t)=t^{\log_5\frac{13}{5}}$

$g(t)=t^{\log_5\frac{12}{5}}+1$

$\left.\begin{matrix}\log_5\frac{12}{5}\\ \log_5\frac{13}{5}\end{matrix}\right| <1 \Rightarrow$ Графики выпуклые вверх.

Приблиз. рисунок:




Степень $t$ в $f(t)$ больше, чем в $g(t)$, ~~[illegible]~~

$$\left.\begin{matrix}g'(t)=\log_5\frac{12}{5}\cdot t^{\log_5\frac{12}{5}-1}\\ f'(t)=\log_5\frac{13}{5}\cdot t^{\log_5\frac{13}{5}-1}\end{matrix}\right| \Rightarrow f'(t)>g'(t) \Rightarrow \text{одна точка пересечения}$$

при всех $t>0$

Подберем $t=25$ – т. пересеч.

$$25^{\log_5\frac{12}{5}}+1=25^{\log_5\frac{13}{5}}$$

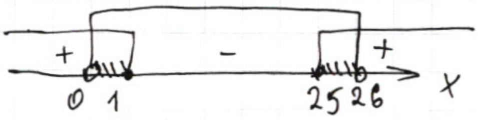
$$\frac{144}{25}+1=\frac{169}{25}$$

Т.о., $\begin{cases}\text{при } t\geq 25 & f(t)\geq g(t)\\ \text{при } 0<t\leq 25 & f(t)\leq g(t)\end{cases}$

Обратная замена:

$$0<26x-x^2\leq 25 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-26x+25\geq 0\\ -x^2+26x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-25)(x-1)\geq 0\\ -x(x-26)>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-25)\geq 0\\ x(x-26)<0\end{cases}$$




~~[illegible]~~

$x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ.