МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ______

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

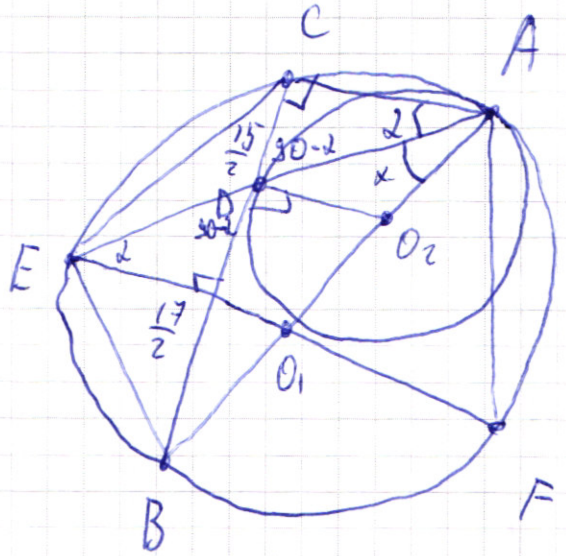
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



] $\angle CAE = \alpha$

1) нетрудно заметить, что центр Ω, центр ω и точка A лежат на 1-й прямой т.к. у Ω и ω A - точка касания ⇒ у них общая касательная в этой точке ⇒ перпендикуляр к касательной в точку A проходит через центр Ω и через центр ω

2) по лемме архимеда дуга CE не содержащая точку A равна дуге EB не содержащей точку A ⇒ AE - биссектриса $\angle CAB$ ⇒ $\angle CAE = \angle EAB$. Из вписанности четка ECAB ⇒ $\angle CAE = \angle CBE$ и $\angle EAB = \angle ECB$ ⇒

все 4 угла равны $\Rightarrow$ ΔCEB равнобедр (из равенства углов ECB и CBE) но в нем проведена высота к основанию $\Rightarrow$ это и медиана $\Rightarrow$ это ~~~~ серпер к ~~CB~~ хорде CB $\Rightarrow$ EF - диаметр окружности Ω $\Rightarrow$ $\angle EAF = 90$

~~~~. Тк ~~$\angle AEB$~~ $CA \perp CB$ и $EF \perp CB$ $\Rightarrow$ $CA \parallel EF$ $\Rightarrow$ $\angle CAE = \angle AEF$ $\Rightarrow$ $\angle F = 90 - \angle AEF = 90 - \angle CAE$.

3) по свойству биссектрисы $\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{15}{17}$ $\Rightarrow$ из ΔCAB $\Rightarrow$ $2\alpha = \arccos\left(\frac{15}{17}\right)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\arccos\left(\frac{15}{17}\right)}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle AFE = 90 - \frac{\arccos\left(\frac{15}{17}\right)}{2}$ ~~$= \frac{\arccos\left(\frac{15}{17}\right)}{2}$~~

4) т.к. AB и EF - диаметры $\Rightarrow$ их пересечение - центр ~~~~ Ω ~~~~, обозначим его за O_1, а центр ω обозначим за O_2

заметим что O_2D - радиус проведенный в точку касания $\Rightarrow$ $O_2D \perp BC$ $\Rightarrow$ $O_2D \parallel EF$ $\Rightarrow$ по обобщ теореме Фалеса $\Rightarrow$

$\frac{AO_2}{O_2O_1} = \frac{15}{17}$ $\Rightarrow$ $\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{15}{32}$ $\Rightarrow$ $\exists r = O_2D$, $\exists R = O_1A$

заметим, что $2R = \frac{\frac{32}{2}}{\sin 2\alpha}$ $\Rightarrow$ $R = \frac{32}{4\sin 2\alpha} = \frac{8}{\sin 2\alpha}$ $\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)
~~~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$\Rightarrow r = \frac{15}{32} \cdot \frac{8}{\sin 2\alpha} = \frac{15}{4\sin 2\alpha}$

5) ~~EF - диаметр~~ $\Rightarrow$ ~~$EF = 2R$~~

$AO_1 = O_1F = R$

Тк O_1 - центр $\Omega \Rightarrow EO_1 = O_1A = R \leq$

заметим, что $\angle EO_1A = 180 - 2\alpha$ по сумм углов тр. кс. , а $\angle AO_1F = 2\alpha$ как смежный $\Rightarrow S\,AFE = S\,EO_1A + S\,AO_1F =$
$= \frac{1}{2}R^2(\sin(180-2\alpha) + \sin(2\alpha))$

Ответ: $\angle AFE = 90 - \alpha$; $S_{AFE} = \frac{1}{2}R^2(\sin(180-2\alpha) + \sin(2\alpha))$; $R = \frac{8}{\sin 2\alpha}$; $r = \frac{15}{4\sin(2\alpha)}$.

~~№1~~

~~$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$~~ ~~$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} =$~~

~~$= \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta) + \sin 2\alpha$~~

№5

Заметим, что $f(t) \geq 0$, где t - натуральное число. Т.к. $f(p) \geq 0$ тк $\left[\frac{\text{натуральное}}{\text{натуральное}}\right] \geq 0$ и т.к. любое составное представимо в виде произведения простых, а это по условию равно сумме $f(p_i)$, где p_i простой делитель t. ~~составного~~ ~~от~~ ~~которого~~ ~~берется~~

$\Rightarrow$ Заметем, что $f(a) = f(1) + f(a)$

$\Rightarrow f(1) = 0$ т. е. $f(t) \geq 0$ ~~где t натур.~~

при любом $t \in N$

Заметим следующее

~~$f(\frac{a}{b}) = f(a) + f(b)$~~

$$f(a) = f(\tfrac{a}{b}) + f(b) = f(a) + f(b) + f(\tfrac{1}{b})$$

$$f(a) = f(a) + f(b) + f(\tfrac{1}{b})$$

$$* = \boxed{f(b) = -f(\tfrac{1}{b})}$$ $\Rightarrow$ для любого положительного не целого рацион. числа верно то, что оно меньше либо равно $0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ посчитаем ~~все~~ ~~все~~ все значения $f(x)$ в натуральных точках ~~при~~ где

$x \in [2; 25]$

~~$f(1) = 0$~~

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

Заметим что из $* \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x/y) = f(x) - f(y)$

всего 10 точек где $f(x) = 0$

7 точек, где $f(x) = 1$

3 точки, где $f(x) = 2$

1 точка, где $f(x) = 3$

2 точки, где $f(x) = 4$

~~3~~ 1 точка, где $f(x) = 5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. Нужно найти кол-во комбинаций x и y таких, что $f(x)-f(y)<0$

т.е. $f(y)>f(x)$, где $x, y \in N$ $2 \leq x, y \leq 25$

заметим, что ~~тк f(23)=5~~

(на промежутке $[2;25]$) тк всего 1 точка, где $f(x)=5$ и это мак знач $\Rightarrow$

$f(x)-f(23)<0$ в 23 точках

~~аналогично~~ тк 5 в 1-й точке и больше ост 23 точек т.е. 23 пары, где $f(y)=-5$

аналогично 4 приним в 4 точках и ~~при~~ 4 больше чем знач в $10+7+3+1=21$ но тк таких точки 2 $\Rightarrow$ кол во вариантов умнож на 2. т.е. 42 пары, где $f(y)=-4$

для $f(y)=-3$ ~~20 точек~~ 20 пар

для $f(y)=-2$ 3·17 пар

для $f(y)=-1$, 7·10 пар

$\Rightarrow$ всего $23+42+70+51$ ~~...~~ пар точек

Ответ: 186 пар натуральных чисел

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

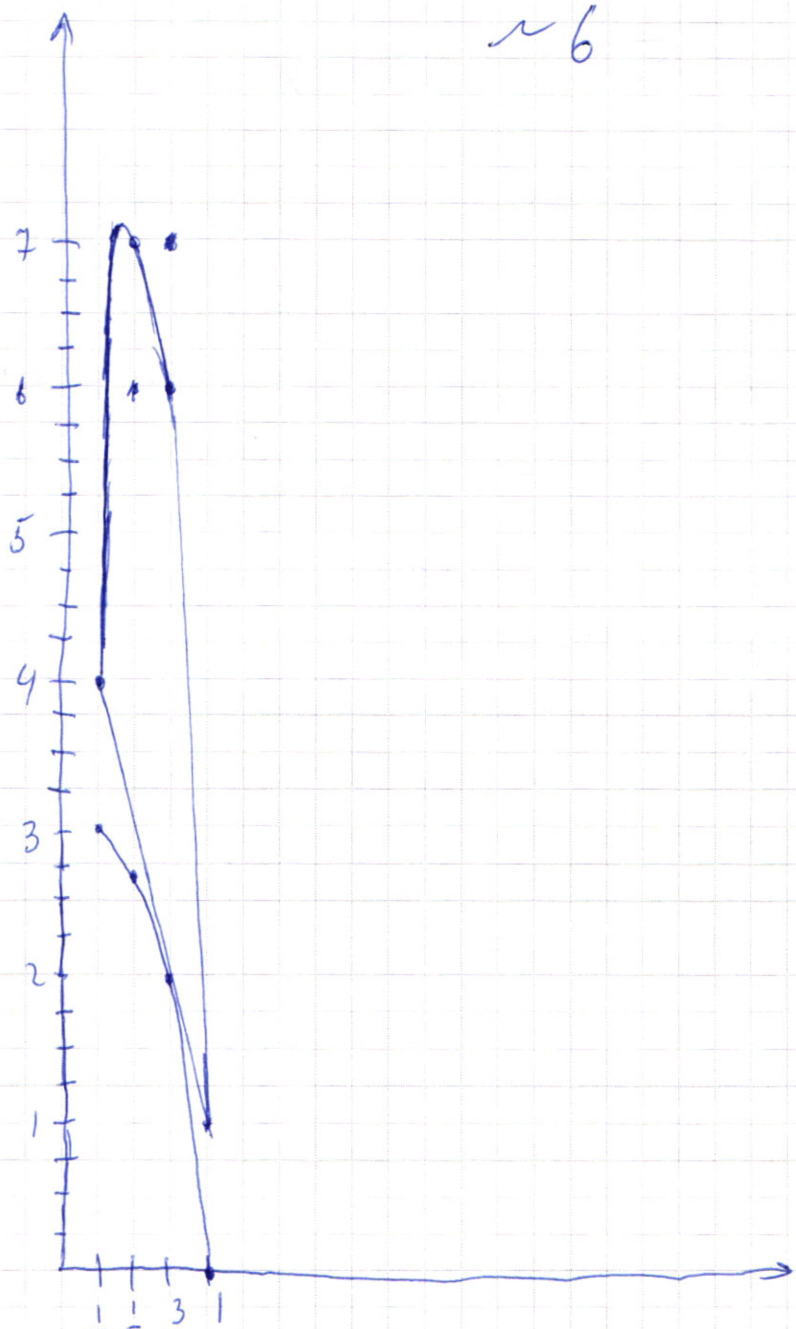
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$Q(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$

$f(x) = -32x^2+36x-3$

$P(x) = ax+b$



Заметим, что прямая проходящая чрез точки $(\frac{1}{4}; 4)$ и $(1; 1)$ на промежутке $[\frac{1}{4}; 4]$ в любой точке больше либо равна любой другой прямой удовлетворяющей условию в любой точке принадлежащей промежутку

Так же заметим, что она удовлитворяет условию т.к. на всем промежутке эта прямая больше либо равно $Q(x)$ и меньше либо равно $f(x)$

$\Rightarrow$ заметим, что уравнение этой прямой

$y = \cancel{\ldots} -4x + 5$

$(*) =$ так же заметим, что ~~эт~~ прямая ~~в точках~~ больше чем $Q(x)$ при $x = \frac{1}{4}$ и $x = 1$

$(*)$ так же заметим, что эта прямая имеет ровно 1 ~~прямую~~ общую точку с $Q(x)$ т.к уравнение $-4x + 5 = \frac{16x-16}{4x-5}$

имеет ровно 1 решение

т.к. при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ $4x-5 \neq 0$

$$-4x+5 = \frac{16x-16}{4x-5}$$

$$-(4x-5)^2 = 16x-16$$

$$-16x^2 - 40x - 25 = 16x - 16$$

$$-16x^2 + 24x - 9 = 0$$

$$D = 24^2 - 16 \cdot 9 \cdot 4 = 0$$

$$2^6 \cdot 3^2 - 2^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ уравнение имеет 1 решение $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ из $(*)$ и $(*)$ $\Rightarrow$ что прямая касается $Q(x)$ $\Rightarrow$ эта прямая единственное решение нер-ва

$Q(x) \leq P(x) \leq f(x)$ на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$ $\Rightarrow$ $a = -4$ и $b = 5$ – единственное решение

Ответ: $a = -4$; $b = 5$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

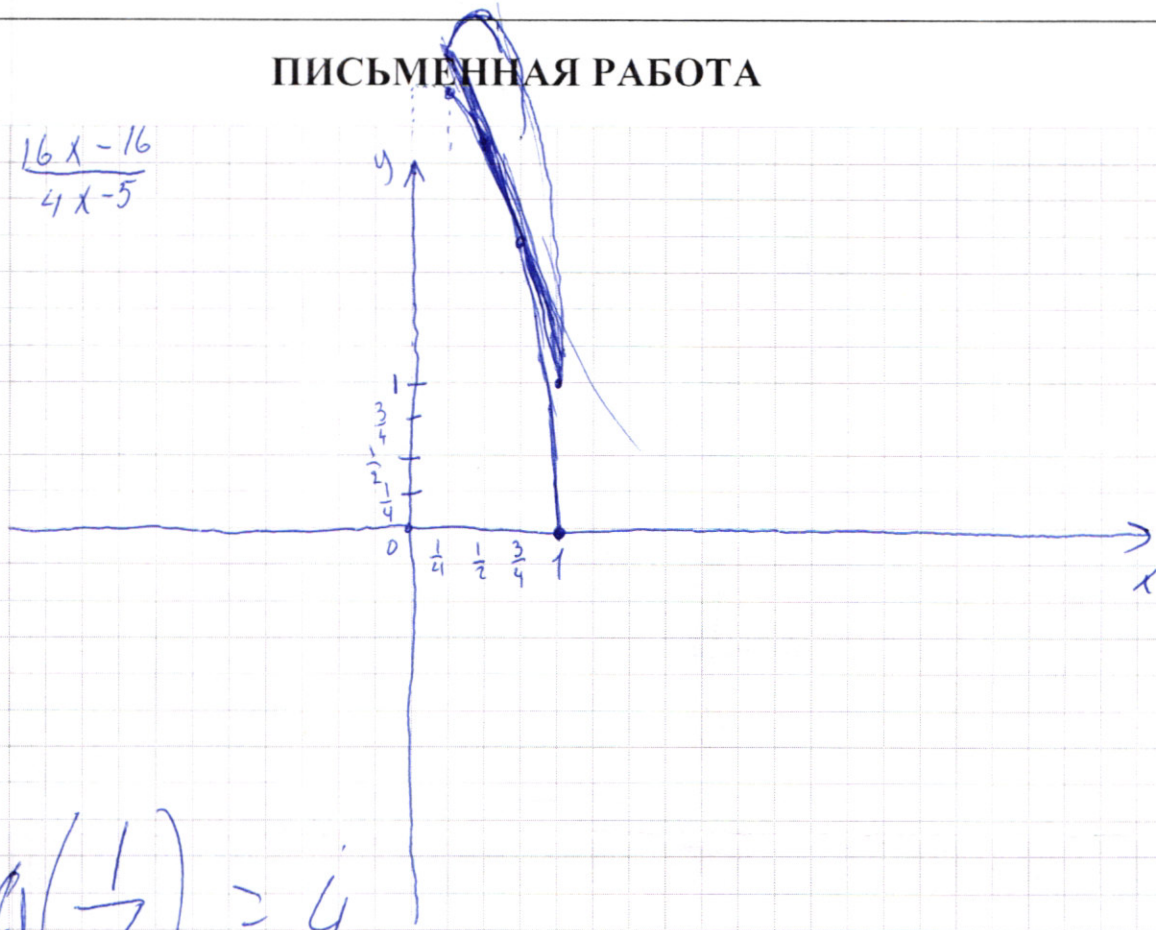
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$



$Q\left(\frac{1}{4}\right) = 4$

$Q\left(\frac{1}{2}\right) = 7$

$Q\left(\frac{3}{4}\right) = 6$

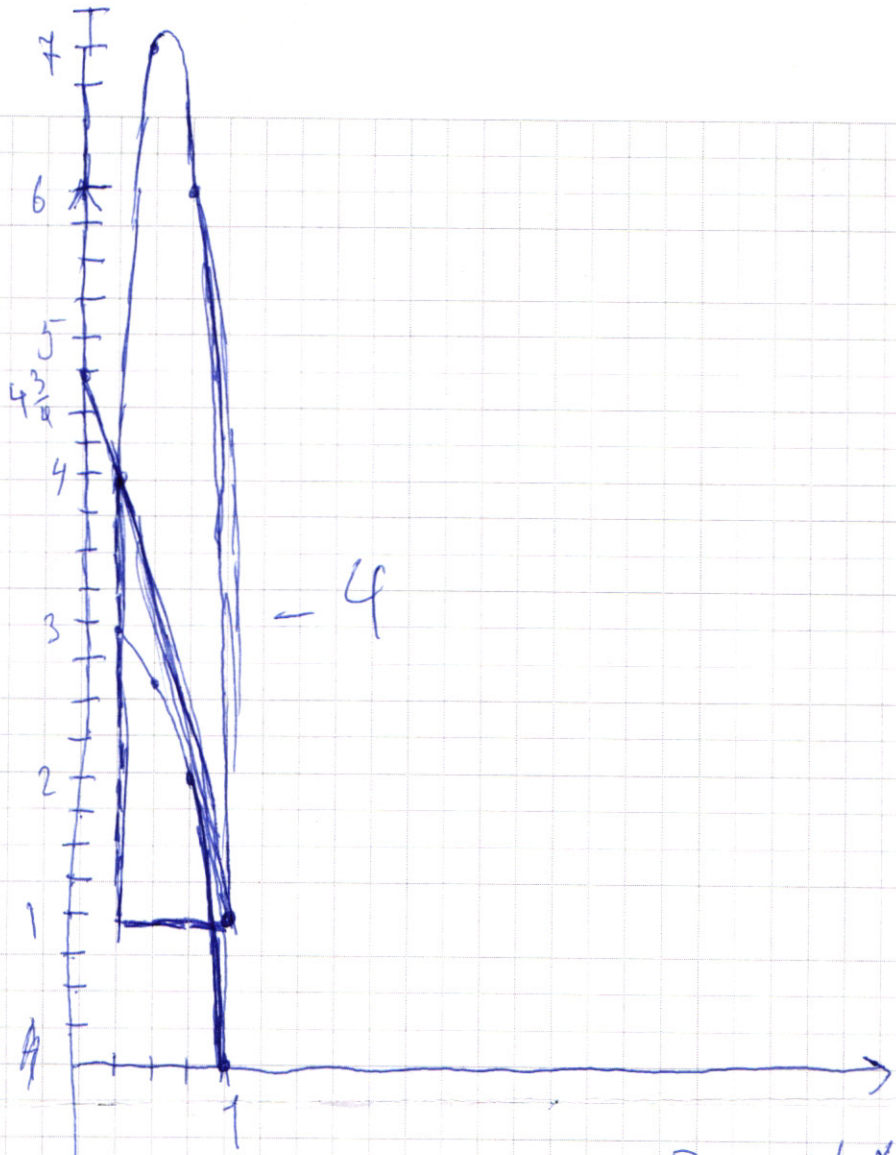
$Q(1) = 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$-(4x-5)^2 = 16x-16$$

$8\cdot3 \quad 8\cdot3=0$

$$-4x+5 = \frac{16x-16}{4x-5}$$

$x\in[\frac{1}{4};1$

$$-3x+4\frac{3}{4} = \frac{16x-16}{4x-5} \qquad -16x^2+24x-9=0$$

$24^2-9\cdot16\cdot4$

$$-16x^2+40x-25=$$

$-3x+4\frac{3}{3}$

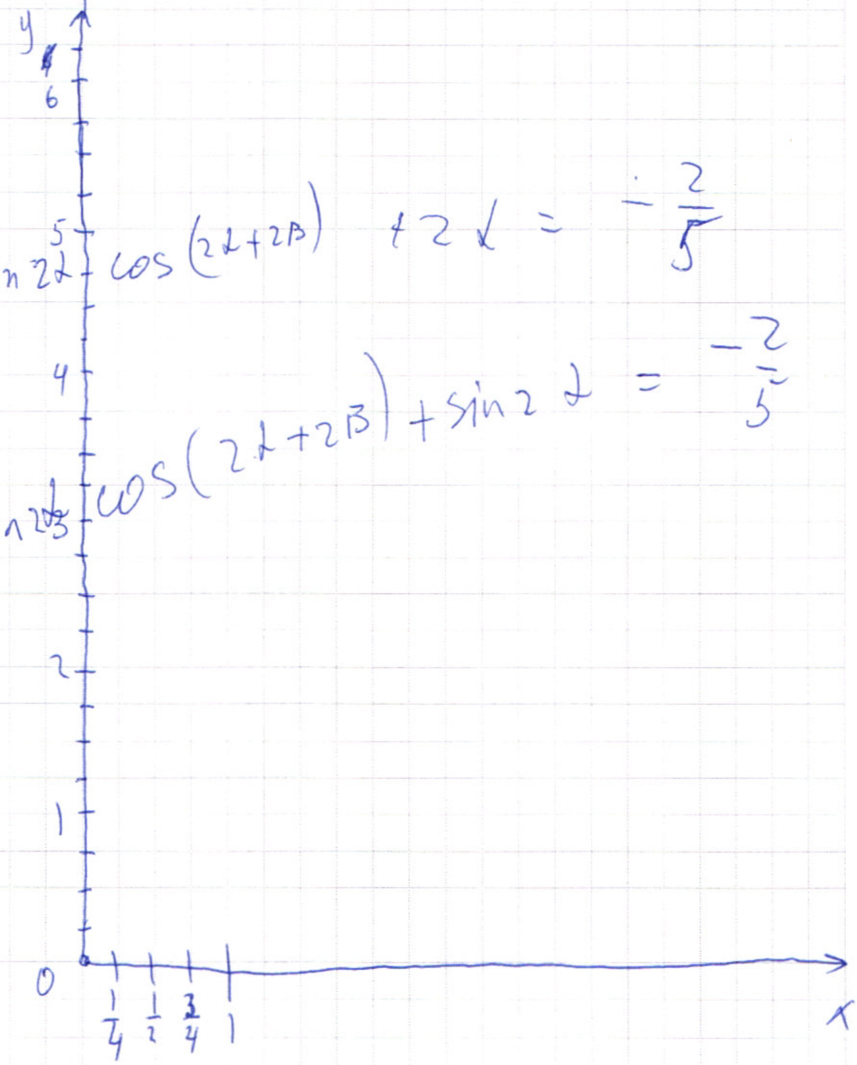
$$=16x-16$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos(2\alpha+2\beta) \quad + 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha + \sin 2\beta$

$|\cancel{x} - \frac{1}{5}$

$\sqrt{\frac{4}{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= -\frac{2}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}(-\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha)$

$f(p^2) = \left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{p}{4}\right] = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f(b)$

$(a) = f\left(\frac{a}{b}\right) + f(b)$

$f(2) = 0$

$f(14) = 1 = f(7) + f(2)$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(7) = f(14) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(5) = 1$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(a) = f(1) + f(a)$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(5) =$

$f(11) = 2$

$f(3) = 0 = f\left(\frac{1}{2} \cdot 6\right)$

$f(12) = 0$

$\frac{2}{\sqrt{5}} =$

$= f(0) + f(6) = 0$

$f(13) = 3$

$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin(2\beta) - \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\beta$

$f(5) = 1$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{b}{a}\right) + f(a)$

$+ \sin 2\alpha$

$3 \cdot 17$

$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin(2\beta) + \cos 2\beta \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{34}{5} \quad 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x/y)<0$?

$f(p_1)+f(p_2)=f(p_1p_2)=\left[\frac{p_1}{4}\right]+$

$+\left[\frac{p_2}{4}\right]$

$\frac{1}{y}<1$

$f(p)\geq 0$

$f(\frac{x_1}{y_1})=f(x_1)+f(\frac{1}{y_1})$

$27-18-3=6$

$4 \quad 6 \quad \frac{36\cdot 3}{4} \quad \frac{32}{16}$

$f(4)+f(2)=f(2)+f(2)+f(2)$

$\frac{9\cdot 32}{16}-18+$ $\quad \frac{3}{4}$ $\quad -32+36-3=1$

$\frac{1}{4}x^2+13xy+$

$-8+18-3$ $\quad \frac{1}{3}x^2+13xy+\frac{9y^2}{2}\cdot 13$

$\frac{32}{16}=2$ $\quad \frac{1}{16}$ $\quad -\cancel{4}2+9-3\quad 7=\frac{1}{2}$

$8+\cancel{7}4=\frac{1}{4}$

$y=\frac{1}{2}$

черновик ✓ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x^2 \cancel{+} - 12x + 36) - 36 + (36y^2 - 36y + 9) - 9$

$(x \cancel{+} - 6)^2 + (6y - 3)^2 = 90$

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$\frac{1}{2}x +$

$$\begin{cases} (x - 12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ x - 12y \geq 0 \end{cases}$$

$(x - \cancel{+} y)^2$

$-24xy + 144y^2$

$+ 12y - x + 6$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6.$

$x^2 - 26xy + 144y^2 = 6 - 12y - x$

$(x - 12y)^2 + (x + 12y)$

$\cancel{36y^2 + 12y + 1 = 1}$

$x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x \cancel{-6} = 6$

$12xy + 6y + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$\left(x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(144y^2 + 12y + \frac{1}{4}\right)$

$-26xy = 6,5$

$(x + \frac{1}{2})^2 + (12y + \frac{1}{2})^2 - 26xy = 6,5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

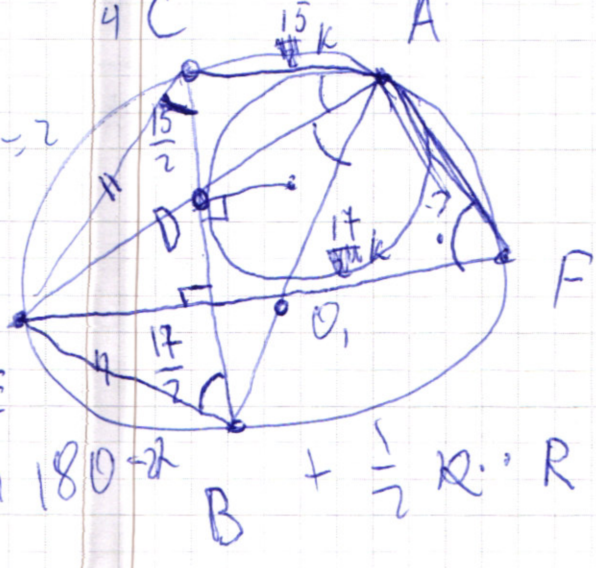
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{3}{4}$ $\quad \frac{12-18}{3-5}$ $\quad \frac{-12}{4}$

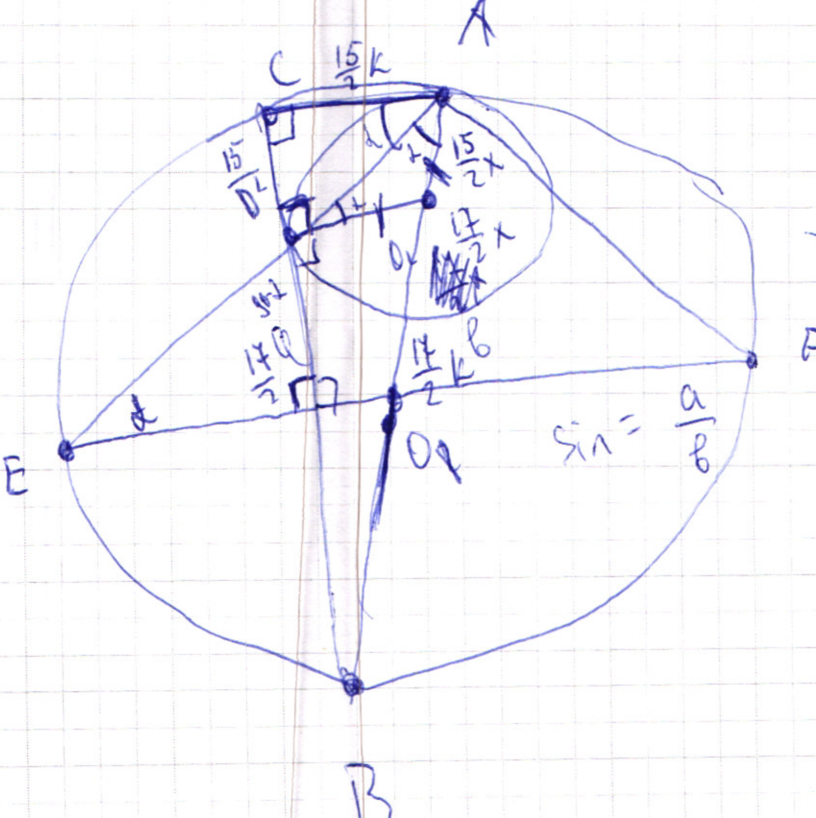
$\frac{-4}{-2} = 2$

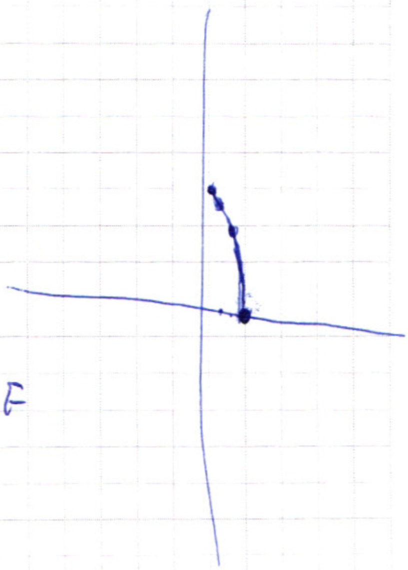


$2\frac{2}{3}$

$\frac{-8m}{-3} = \frac{8}{3}$

$\frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 180 - 2\alpha + \frac{1}{2} R \cdot R$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 32x^2 + \cancel{(a-3b)}\ (a-3b)x + (b-3) \le 0 \\ \end{cases}$$

$$\frac{-4ax^2 + (16-4b+5a)x + (5b-16)}{4x-5} \le 0$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} - ax + b$$

$$\frac{16x - 16 - (4x-5)(ax+b)}{4x-5}$$

$$\frac{16x - 16 - 4ax^2 - 4bx + 5ax + 5b}{4x-5} \le 0$$