МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x}\frac{1}{x^3}$$

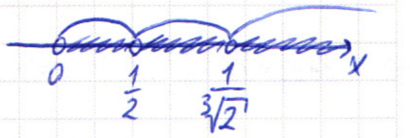
$\Updownarrow$

$\cancel{\log_{2x^3} x^9 > 0}$

$\cancel{\log_{2x^3} x}$

условия на существование логарифмов:

$$\begin{cases} 2x^3>0 \Rightarrow \\ 2x^3\ne 1 \Rightarrow \\ x^9>0 \Rightarrow \\ 2x>0 \Rightarrow \\ 2x\ne 1 \Rightarrow \\ \frac{1}{x^3}>0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x>0 \\ x\ne\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x>0 \\ x>0 \\ x\ne\frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases}$$



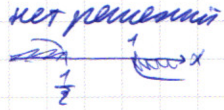
$x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};+\infty\right)$

т.к. $\sqrt{\ } \ge 0$, то надо:

$\log_{2x}\frac{1}{x^3}\ge 0$

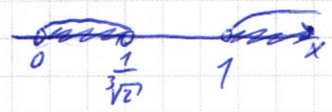
$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x>1 \\ \frac{1}{x^3}\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2};1\right] \\ \begin{cases} 2x<1 \\ \frac{1}{x^3}\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений} \end{array}\right.$$



на существование корня:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^3>1 \\ x^9\ge 1 \end{cases} \Rightarrow x\ge 1 \\ \begin{cases} 0<2x^3<1 \\ 0<x^9\le 1 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \end{array}\right.$$

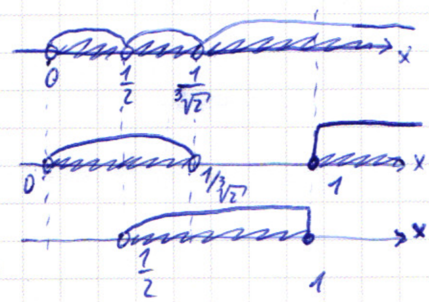


соберём условия вместе:

на $\exists$ log:

на $\sqrt{\ }$

на прав. часть, которая $\ge\sqrt{\ }$



получаем, что решения надо искать при $x\in\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup\{1\}$

теперь можем работать с исходным неравенством:

возведём в квадрат:

$$\log_{2x^3}x^9 \le \log^2_{2x}\frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \frac{\log_2(x^9)}{\log_2(2\cdot x^3)} \le \frac{\log_2^2(x^{-3})}{\log_2^2(2x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9\log_2 x}{1+3\log_2 x} \le \frac{(-3\log_2 x)^2}{(1+\log_2 x)^2} \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{1+3\log_2 x} \le \frac{\log_2^2 x}{(1+\log_2 x)^2} \Rightarrow$$

1) $\log_2 x=0 \Rightarrow x=1$

$\frac{0}{1}\le\frac{0}{1}$

$0\le 0$ подходит!

2) $x\ne 1$; $\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

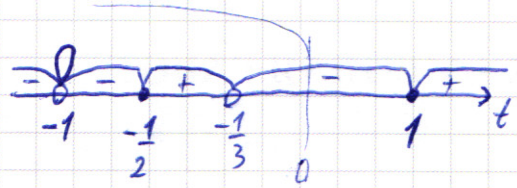
замена: $\log_2 x=t$, $t<0$ (т.к. все подходящие $x<1$ остались)

$$\frac{1}{1+3t}-\frac{t}{(1+t)^2}\le 0 \Rightarrow$$

(см. стр. 2)

$$\frac{1}{1+3t} - \frac{t}{(1+t)^2} \le 0 \Rightarrow \frac{1+2t+t^2 - t - 3t^2}{(1+t)^2(1+3t)} \le 0 \Rightarrow \frac{1+t-2t^2}{(1+t)^2(1+3t)} \le 0 \Rightarrow \frac{(t-1)(-2t-1)}{(1+t)^2(1+3t)} \le 0$$

$$\frac{(t-1)(2t+1)}{(1+t)^2(1+3t)} \ge 0$$



$t<0 \Rightarrow$ решения: $t \in [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}) \Rightarrow \log_2 x \in [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3})$, функция $\log_2(x)$ монотонно возраста-ющая $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x \in [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}) \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{1}{2} \; |\cdot 2$

помним: $x \in (\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$

$\sqrt{2} \vee 1$

тогда получаем подходят: $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$

и тогда Ответ: $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}) \cup \{1\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

число $\overline{abcdefg}$

рассмотрим разные случаи выбора "3-х последовательных степе~~ней~~ ней десятки", чтобы смотреть остатки:

1, 10, 100 — очень мало, мы не выйдем в сумме за тысячи

10, 100, 1000 : MAX сумма $= 999+99+3 < \cancel{1000}\ 2000$ явно, а нам надо 12414 ⇒ ⇒ тоже не подходит

100, 1000, 10000 : MAX $\Sigma = 9999+999+99 = = 11000 + 97 < 12000$ тоже мало!

1000, 10000, 100000 это уже рассмотреть можно, как и следующую послед-ть: 10000, 100000, 1000000

а если пойти дальше: 100000 ~ 10000000, то в сумме будет участвовать слагаемое: $(a \cdot 1000000)$, а т.к. это число > 12414 при $a \neq 0$, то ⇒ $a=0$, ~~но~~ но тогда наше число уже не семизначное

Итог: рассмотрим 2 случая:

1) 1000, 10000, 100000 ⇒ $\Sigma = 12414 = \overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 3g + 3f\cdot 10 + 3e\cdot 100 + 1000\cdot \overset{\cdot 2\cdot}{d} + 10000\cdot c$

$\Sigma \underset{10}{\equiv} 4$ ⇒ $3g \underset{10}{\equiv} 4$ ⇒ $g = 8$ однозначно ⇒ тогда в разряд десятков
сравнимо по модулю 10

у нас попадёт 2 (т.к. $8\cdot 3 = 24$, "2" в след. разряд) ⇒ $3f + 2 \underset{10}{\equiv} 1$ ⇒ $f = 3$ ⇒

⇒ сотни: $1 + 3e \underset{10}{\equiv} 4$ ⇒ $e = 1$ ⇒ тысячи: $2d \underset{10}{\equiv} 2$ ⇒ $d = \{1; 6\}$ ⇒

$d=1$ ⇒ $c \underset{10}{\equiv} 1$ ⇒ $c = 1$

$d=6$ ⇒ $c+1 \underset{10}{\equiv} 1$ ⇒ $c = 0$

$\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$: 1 или 0 (не деление!)

В итоге получаем число вида:

a: 9 вар. (1, 2, ..., 9); b: 10 вар. (0, 1, 2, ..., 9); $\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix}1\\6\end{Bmatrix}$ 1 3 8

таких чисел: $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ запомним

⇓ (см. стр 4)

Теперь разберём случай: $\begin{matrix}10000\\100000\\1000000\end{matrix} \Rightarrow \Sigma = 3g + 3f\cdot 10 + 3e\cdot 10^2 + 3d\cdot 10^3 + 2c\cdot 10^4 + b\cdot 10^5$

начало рассуждений и значения аналогичны: $g = 8$; $f = 3$; $e = 1$

далее: $3d \underset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow d = 4$; $1 + 2c \underset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow c = \{0; 5\}$

теперь посмотрим на b: $b \geq 1 \Rightarrow \Sigma \geq 100\,000 \Rightarrow$ наша сумма будет очень большой, если $b \neq 0 \Rightarrow b = 0$

рассмотрим $c = 5 \Rightarrow 2c\cdot 10^4 = 2\cdot 5\cdot 10^4 = 10^5 = 100\,000$, тоже много! $\Rightarrow$

$\Rightarrow c = 5$ можем выкинуть. А оставшийся вариант возможен:

a						
9 вар.	0	0	4	1	3	8

1, 2, ..., 8, 9

$4138 \cdot \cancel{4}^{3} = 12414$ ✓

а таких чисел 9, и они не совпадают с предыдущими совсем

Итого мы рассмотрели все возможные варианты выбора 3-х последов. степеней числа 10, и для каждого нашли кол-во чисел, удовлетворяющих условию $\Rightarrow$ всего нужных 7-миз. чисел: $\underline{180 + 9}$

Ответ: 189

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92 \end{cases} \Big| - \Rightarrow x-8y=216$$

$x=8y+216 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{\cancel{-}(8y-x)(8y+x)}=8y+92$

$\sqrt[3]{-216(16y+216)}=8y+92$

$4\sqrt[3]{-27(2y+27)}=4(2y+\cancel{\ }23)$

~~2y = 27~~

$-27(2y+27)=(2y+23)^3$ пусть $2y+23=k$, $\cancel{\ }$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow -27(k+4)=k^3$

$k^3+27k+27\cdot4=0$

$(k+3)(k^2-3k+36)=0$

$\Downarrow$

$D=9-4\cdot36<0 \Rightarrow$ корней квадрат. нет! $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} k^3+27k+27\cdot4 & k+3 \\ \hline k^3+3k^2 & k^2-3k+36 \\ -3k^2+27k+108 & \\ -3k^2-3k & \\ 36k+108 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Единственное решение: $k=-3 \Rightarrow 2y+23=-3 \Rightarrow$

~~помним, что у нас был~~

$\Rightarrow y=-13 \Rightarrow x=112$

Ответ: $(x;y)=(112;-13)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x = 8y + 216$ $\quad 216|4 \; 54$ $\quad 124 = 4\cdot 31$ $\quad 3(124^2 - 16\cdot 9$

$y = \frac{x}{8} + 27$ $\quad 64\left(\frac{x^2}{64} + 2\cdot 27 \cdot \frac{x}{8}\right)$

$x - 124 = \sqrt[3]{8^2\left(\frac{x}{8}+27\right)^2 - x^2}$

$124^3 + 27^2\cdot 8^2 = 4^2(27^2\cdot 4 + 31^2\cdot 124) = 8^2(27^2+31^3)$

$x^3 - 3\cdot 124x^2 + 3\cdot 124^2 x - 124^3 = \cancel{x^2} + 16\cdot 27x + (27\cdot 8)^2 - \cancel{x^2}$

$x^3 - 3\cdot 4\cdot 31x^2 + 3\cdot 112\cdot 136x - 64(27^2+31^3) = 0$

$(8y-x) = a$ $\quad \begin{cases} x - \sqrt[3]{ab} = 124 \\ 8y - \sqrt[3]{ab} = -92 \end{cases} \Big| - \Rightarrow 8y - x = -216 = a$

$(8y+x) = b$

$a = -216$

теперь сложим: $b - 2\sqrt[3]{ab} = 32$ $\quad 124 - 92 = 32$

$b - 32 = 2\sqrt[3]{ab} = 2\sqrt[3]{-216b}$

$b^3 - 3\cdot 32b^2 + 3\cdot 32^2 b - 32^3 = 8(-216b).$ $\quad 216\cdot 8 = 1728;\ 1728 + 3072 = 4800$ $\quad 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12$

$1024 \cdot 3 = 3072$

$b^3 - 3\cdot 32b^2 + 4800b - 32^3 = 0$

$b(b^2 + 4800) - 32(3b^2 + 32^2) = 0$ $\quad 32^2 = 1024$

$12414 = \overline{cdefg} + \overline{defg} + \overline{efg} = c\cdot 10000 + (2d)\cdot 1000 + 3e\cdot 100 + 3f\cdot 10 + 3g$; $3g \equiv_{mod 10} 4$

38

~~1) cdefg = 12414 => такое 30 чисел~~

2)

$\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{e}\ \underline{f}\ \underline{g}$

1 2 4 1 4

как минимум 100000, 10000, 1000 $\Rightarrow$ a b c 4 1 3 8 (2d); 1 2 4 1 4

10 100 1000 x

100 1000 10000 x

последняя цифра: 8

$8\cdot 3 = 24$

$2 + 3f = 11 \Rightarrow f = 3$

$1 + 3e \equiv_{mod 10} \ldots 4 \Rightarrow e = 1$ $\quad 2d \equiv_{10} 2$

$3d \equiv_{mod 10} 2 \Rightarrow d = 4$ $\quad d = \{1; 6\}$

$c = \{1; 0\}$

a и b $\forall \Rightarrow 9\cdot 10\cdot 2 = 180$

0 2, 1 5, 2 8, 11 14 17, 6 20, 7 23, 26 29

1 13, 4 22, 7 25, 10 28, 13 31, 16

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

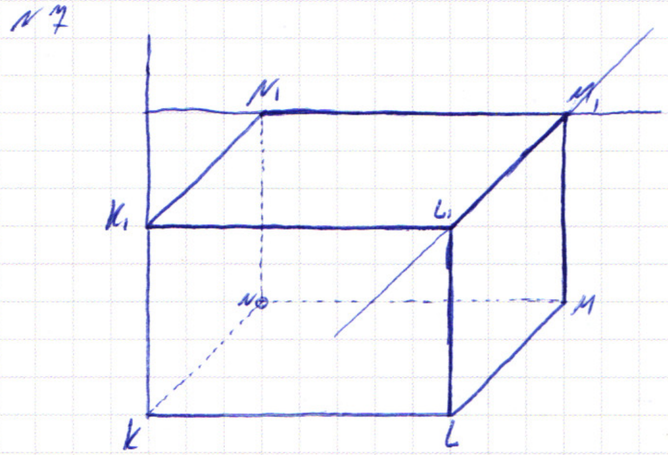
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7



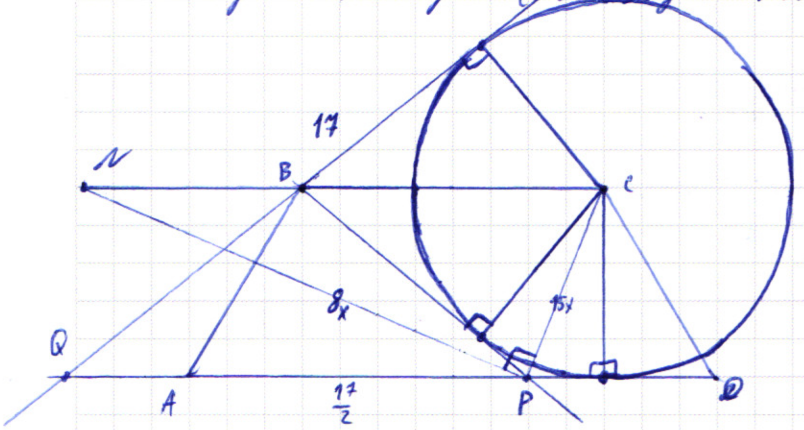
$\sqrt{3}(\cos x\cos y - \sin x \sin y) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$

$\sin x\cos 2y + \cos x \sin 2y + \sqrt{3}(\cos x \cos 2y - \sin x \sin 2y) =$

$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$

8

$\sin x\cos 2y + \cos x\sin 2y + \sqrt{3}(\cos x\cos 2y - \sin x \sin 2y) = \frac{8}{5}\sqrt{3}(\cos x\cos y - \sin x \sin y)$



$\angle ADC$ – ?

$\angle NQC$ – ?

S_{NCDQ} – ?

$NC = 17$

$AP = \frac{17}{2}$

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$

$NP = 8x$

$CP = 15x$

$1 + c \underset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow c = 0$

$3d \underset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow \underline{d = 4}$

$e = 1$

$f = 3$

$g = 8$

$\overline{0\,0\,4\,1\,3\,8}$ – 9 чисел

$\Rightarrow \underline{b = 0}$

$3g + 3f\cdot 10 + 3e\cdot 10^2 + 3d\cdot 1000 + 10000\cdot c + 100000\cdot b = 12414 \Rightarrow$

1 2 4 1 4

— — — — — — —

a b c d e f g

1000000

100000

10000

$\begin{array}{r} 4138 \\ \times\ 3 \\ \hline 12414 \end{array}$

черновик ☑ чистовик ☐

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

лев. ($\sqrt{}$)

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^3 \geq 1\\ x^3 \geq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\ x \geq 1\end{cases} \Rightarrow x \geq 1\\ \begin{cases}0 < 2x^3 < 1\\ 0 < x^3 < 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\ 0 < x < 1\end{cases} \Rightarrow x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\end{array}\right.$$

т.к. $\sqrt{} \geq 0 \Rightarrow$ (прав)

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x \geq 1\\ \frac{1}{x^3} \geq 1\end{cases} \quad \begin{cases}x \geq \frac{1}{2}\\ x \leq 1\end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\\ \begin{cases}2x < 1\\ \frac{1}{x^3} < 1\end{cases} \quad \begin{cases}x < \frac{1}{2}\\ x > 1\end{cases} \ X\end{array}\right.$$

условие:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^3 \geq 1\\ x^3 \geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}0 < 2x^3 < 1\\ 0 < x^3 < 1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x \geq 1\\ x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\end{array}\right.$$

$0 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad 1$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad 1$

~~решения~~

$\sqrt[3]{2} < 2$

$x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup \{1\}$

$$\frac{9 \log_2 x}{3\log_2 x + 1} \leq \frac{-3 \log_2 x}{\log_2 x + 1} \Rightarrow$$

проверка $x = 1$: $\frac{0}{0+1} \leq \frac{0}{0+1}$

$0 \leq 0$ $\sqrt{}$ явл. решением

$x > 1$: $\log_2 x > 0$, $\log_2 x \uparrow$ ф-ия

$$\frac{3}{3\log_2 x+1} + \frac{1}{\log_2 x+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{3\log_2 x+3+3\log_2 x+1}{(\log_2 x+1)(3\log_2 x+1)} \leq 0$$

$\log_2 x = t$, $t > 0$

$$\frac{3t+2}{(t+1)(3t+1)} \leq 0$$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-1 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad t$

нет решения!

$0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $\log_2 x < 0$, ф-ия $\uparrow$:

$$t < 0 \qquad \frac{3}{3t+1} + \frac{1}{t+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{3t+2}{(t+1)(3t+1)} \geq 0$$

$t < 0$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-1 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad t$

$\log_2 x \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ $\qquad t \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$

$x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right] \cup \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 1\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} x-124=\sqrt[3]{64y^2-x^2} \\ 8y+92=\sqrt[3]{64y^2-x^2} \end{cases} \quad x-124=8y+92$$

$$x=8y+216=8(y+27)$$

$(z^3)^2$

$$8y+92=\sqrt[3]{64y^2-64(y+27)^2}$$

$y^2-(y^2+54y+27^2)=-54y-27^2$

$$8y+92=4\cdot\sqrt[3]{-54y-27^2}$$

$$2y+23=\sqrt[3]{-27(2y+27)}$$

$$8y^3+4y^2\cdot23\cdot3+3\cdot2y\cdot23^2+23^3=-54y-27^2$$

$$8y^3+12\cdot23y^2+y(6\cdot23^2-54)+23^3+27^2=0$$

№ 2

$$\sqrt{\log_{2x^3}x^9}\le\log_{2x}x^{-3}$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} 2x^3>0 \Rightarrow x>0 \\ 2x^3\ne1 \Rightarrow x\ne\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x^9>0\Rightarrow x>0 \\ x^{-3}>0 \Rightarrow x>0 \\ 2x>0 \Rightarrow x>0 \\ 2x\ne1 \Rightarrow x\ne\frac{1}{2} \end{cases}$$

$0 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \frac{1}{2} \quad x$

$\log_{2x}x^{-3}>0$

$\log_{2x^3}x^9>0$

$\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x<1 \\ x^{-3}<1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x\ge1 \\ x^{-3}\ge1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^3<1 \\ x^9<1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^3\ge1 \\ x^9\ge1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{x^3}<1 \Rightarrow x>1$ — $\varnothing$

$x\ge\frac{1}{2}$

$\frac{1}{x^3}\ge1$

$x\le1$

$\begin{cases} x\ge\frac{1}{2} \\ x\le1 \end{cases}$ ✓ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \frac{1}{2} \quad 1$

$x^3<\frac{1}{2}$ — $x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$x^9<1$ — $x<1$

$\rightarrow$ $x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ✓

$\begin{rcases} x\ge\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x>1 \end{rcases} x>1$

$x>1$) $x\le1 \Rightarrow x$

единств. возможный вариант: $x\in$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 8y + 216$

$2y + 27 < 0$

$\sqrt[3]{-216(16y+216)} = 8y + 32$

$2\sqrt[3]{-216(2y+27)} = 4^{2}(2y+23)$

$216 - 8 \cdot 13$

104

112

$13 \times 8 = 104$

~~$2y+25=k$~~ $2y+23=k, k<4$

~~$-216(k+2)=$~~

$-216(k+4) = 8k^3$

$8k^3 + 216k + 216 \cdot 4 = 0$

142

$k^3 + 27k + 108 = 0$

$k^3 + 27k + 27 \cdot 4 = 0$

~~$27 \quad 27 \cdot 3 + 27 \cdot 12$~~

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)