МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

Преобразуем сумму синусов в произведение:

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

Подставим (1):

$-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{\cancel{2}}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Тогда $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{5}{25}} = \pm\sqrt{\frac{20}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

1) $\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha =$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big|\cdot\sqrt{5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

Воспользуемся универсальной триг. подстановкой:

$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + 2\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1 \quad \Big|\cdot 1+tg^2\alpha$

$2tg\alpha + 2 - 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 3 \end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

После универсальной подстановки:

$$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} - 2\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1 \Big| \cdot (1+tg^2\alpha)$$

$2tg\alpha - 2 + 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Итого tg принимает ровно три разл. значения:

~~$-1, 3, -3$~~ $-1, 3, \frac{1}{3}$

Ответ: $-1; \frac{1}{3}; 3$.

№2.

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

$x - 6 = a$

$2y - 1 = b$

Тогда $x - 12y = 6 + a - 6(b+1) = a - 6b$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \iff \begin{cases} a \geq 6b \\ a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

При $b=0$ $a=0$, это решение не подходит. Поделим на b^2

$\frac{a^2}{b^2}-13\frac{a}{b}+36=0$

$\frac{a}{b}=t$

$t^2-13t+36=0$

$D=169-144=25$

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{13+5}{2}=9 \\ t=\frac{13-5}{2}=4 \end{array}\right.$

То есть $a=9b$ либо $a=4b$. Второй вариант не подходит, потому что $a\geqslant 6b$. Тогда подставим a во второе уравнение:

$36b^2+9b^2=90$

$45b^2=90$

$b^2=2$

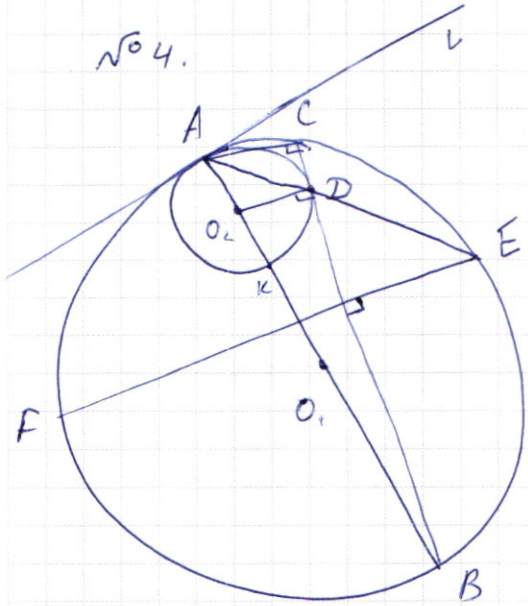
$b=\pm\sqrt{2}$

1) $\begin{cases} b=\sqrt{2} \\ a=9\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2y-1=\sqrt{2} \\ x-6=9\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ x=6+9\sqrt{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} b=-\sqrt{2} \\ a=-9\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2y-1=-\sqrt{2} \\ x-6=-9\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ x=6-9\sqrt{2} \end{cases}$

Ответ: $\left(6+9\sqrt{2};\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(6-9\sqrt{2};\ \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$.

№4.



$CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$

R_1, R_2 — ?

$\angle AFE$ — ?

S_{AEF} — ?

R_1 — радиус Ω, R_2 — радиус ω

$\angle O_2DB=90°$ т.к. BD кас.

$\angle ACB=90°$, т.к. опирается на диам.

Тогда $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$. Значит

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BO_2}{BA}$$

$BA=2R_1$

$BO_2=2R_1-R_2$

$$\frac{BD}{BC}=\frac{2R_1-R_2}{2R_1}=1-\frac{1}{2}\frac{R_2}{R_1}$$

$$1-\frac{BD}{BC}=\frac{R_2}{2R_1}$$

$$R_2=2R_1\left(1-\frac{BD}{BC}\right).$$

Пусть $K=AB\cap\omega$. Тогда $BK\cdot BA=BD^2$. $BK=2(R_1-R_2)$

$$2(R_1-R_2)\cdot 2R_1=BD^2$$

$$4R_1\left(R_1-2R_1\left(1-\frac{BD}{BC}\right)\right)=BD^2$$

$$4R_1^2\left(1-2+2\frac{BD}{BC}\right)=BD^2$$

$BC=CD+BD=\frac{17+15}{2}=$
$=16$

$$R_1=\sqrt{\frac{BD^2}{4\left(2\frac{BD}{BC}-1\right)}}=\frac{BD}{2\sqrt{\frac{2BD}{BC}-1}}=\frac{17}{4\sqrt{\frac{17}{\cancel{32}\ 16}-1}}=$$

$$=\frac{17}{4\cdot\sqrt{\frac{1}{16}}}=17.$$ Тогда $R_2=2\cdot17\left(1-\frac{17}{32}\right)=$

$$=2\cdot17\cdot\frac{15}{32}=\cancel{\frac{255}{32}}\ \frac{255}{16}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проведем касательную к Ω и ω AL. Тогда.

$\angle AFE = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE} = \angle LAE = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} = \frac{1}{2}\angle AO_2D$

Из подобия $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$

$\frac{BD}{BC} = \frac{O_2D}{AC}$

$AC = \frac{BC \cdot O_2D}{BD} = \frac{16 \cdot \frac{255}{32}}{\frac{17}{2}} = \frac{\frac{255}{2}}{\frac{17}{2}} = \frac{255}{17} = 15$

~~То есть $AE = 2CD$~~

Тогда $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{225 + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 225}{4}} = \frac{15}{2}\sqrt{5}$

Т. косинусов для $\triangle AO_2D$:

$AD^2 = O_2A^2 + O_2D^2 - 2O_2A \cdot O_2D \cos\angle AO_2D$

$\cos\angle AO_2D = \frac{O_2A^2 + O_2D^2 - AD^2}{2O_2A \cdot O_2D} = \frac{2R_2^2 - AD^2}{2R_2^2} =$

$= 1 - \frac{AD^2}{2R_2^2} = 1 - \frac{\frac{\cancel{225} \cdot 5}{\cancel{4}}}{2 \cdot \frac{17^2 \cdot 15^2}{1024}} = 1 - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{17^2}{512}} = \cancel{1 - \frac{5 \cdot 512}{2 \cdot 17^2}} =$

$= 1 - \frac{5 \cdot \cancel{512}^{128}}{289 \cdot 4} =$

Т.к. $\triangle ABC$ прямоуг., то $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{289 - 256} = \sqrt{33}$

Тогда $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{33 + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{357}{4}}$

По т. косинусов для $\triangle AO_2D$:

$AD^2 = AO_2^2 + DO_2^2 - 2AO_2 \cdot DO_2 \cos\angle AO_2D$

$\cos\angle AO_2D = \frac{AO_2^2 + DO_2^2 - AD^2}{2AO_2 \cdot DO_2} = \frac{2R_2^2 - AD^2}{2R_2^2} = 1 - \frac{AD^2}{2R_2^2} =$

$= 1 - \frac{357}{8 \cdot \frac{17^2 \cdot 15^2}{256}} = 1 - \frac{357}{\frac{289 \cdot 225}{32}} = 1 - \frac{\cancel{357}^{7} \cdot 32}{\cancel{289}_{17} \cdot \cancel{225}_{75}} = 1 - \frac{224}{1245} = \frac{1021}{1245}.$

☐ черновик ☑ чистовик

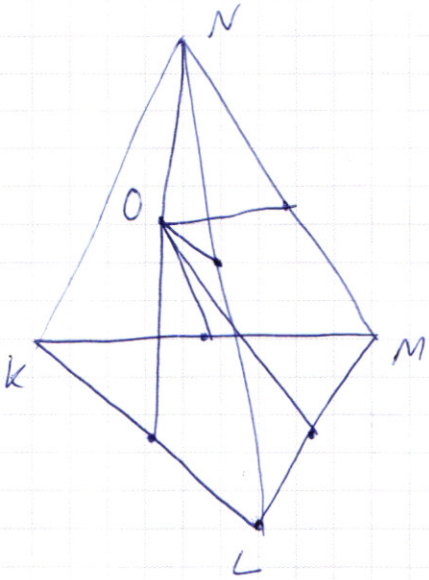
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Тогда $\angle AFE = \arccos\frac{1021}{1245}$

Ответ: $R_1 = 17$, $R_2 = \frac{255}{16}$; $\angle AFE = \arccos\frac{1021}{1245}$

№7.



$KL = 3$

$KM = 1$

$MN = \sqrt{2}$

$LM - ?$

$R_{min} - ?$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$ на $\mathbb{Q}_+$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ $\forall p$

$f(1)=f(1)+f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$

Но ~~$f(1)=f(x)$~~ $f(1)=f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Значит $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

Нам надо, чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, то есть $f(x)-f(y)<0$

Итого нам надо найти пары натуральных $(x;y)$ $2\le x\le 25$, $2\le y\le 25$, таких, что $f(x)<f(y)$.

Составим таблицу значений f:

x	f(x)
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1

x	f(x)
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2

Значение	Кол-во
0	10
1	7
2	3
3	1
4	2
5	1

Если $f(y)=0$, то подх. x нет

Если $f(y)=1$, то подх. x 10 штук.

Если $f(y)=2$, то подх. x 17 штук.

Если $f(y)=3$, то подх. x 20 штук

Если $f(y)=4$, то подх. x 21 штука

Если $f(y)=5$, то подх. x 23 штуки

Итого получаем $10\cdot7+17\cdot3+1\cdot20+$
$+21\cdot2+23\cdot1=195$ пар

Ответ: 195 пар

№6.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3 \qquad x\in\left[\frac{1}{4};\ 1\right]$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5} = f(x)$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4+\frac{4}{1-5} = \cancel{0}\ 3$$

$$f(1) = 4+\frac{4}{4-5} = 0$$

$$g(x) = -32x^2+36x-3$$

$$x_0 = \frac{-36}{-2\cdot 32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

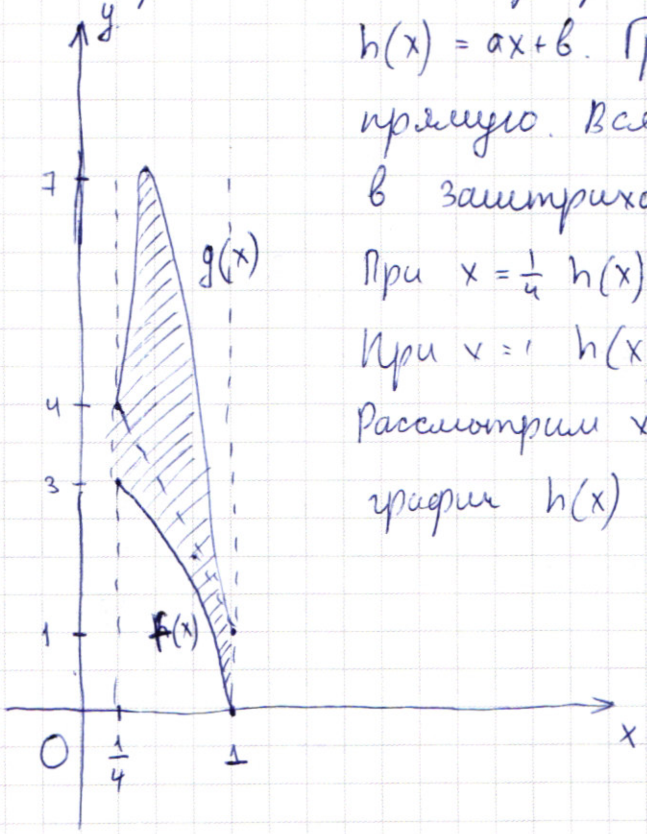
$$g\left(\frac{9}{16}\right) = -32\cdot\frac{81}{256} + \frac{36\cdot 9}{16} - 3 = -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 = -\frac{81}{8} + \frac{162}{8} - \frac{24}{8} =$$

$$= \frac{57}{8} = 7\frac{1}{8}$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = -32\cdot\frac{1}{16} + \frac{36}{4} - 3 = -2+9-5 = 4$$

$$g(1) = -32+36-3 = 36-35 = 1$$

Построим эскиз графиков на интервале $\left[\frac{1}{4};1\right]$:



$h(x) = ax+b$. График представляет собой прямую. Вся прямая должна лежать в заштрихованной области.

При $x=\frac{1}{4}$ $h(x)$ принимает значения от 3 до 4.

При $x=1$ $h(x)$ принимает значения от 0 до 1.

Рассмотрим $x=\frac{1}{4}$. Т.к. $f(x)$ вогнутая, то график $h(x)$ касается $f(x)$ в точке $(1/4;\ 3)$.

$\frac{-16}{(4x-5)^2} = -4$

$(4x-5)^2 = 4$

$\left[\begin{array}{l} 4x-5=2 \\ 4x-5=-2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \cancel{3/8}\ \frac{7}{4} - \text{неуд.} \\ x = \frac{3}{4} \end{array}\right.$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = 4 + \frac{4}{4\cdot\frac{3}{4}-5} = 4 + \frac{4}{3-5} = 4-2=2$

Ур-е касательной: $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) =$

$= -4\left(x-\frac{3}{4}\right)+2 = -4x+3+2 = -4x+5$

Что совпадает с первой крайней прямой. А это значит, что это единственная прямая, уд. условию

Ответ: $a=-4$; $b=5$.

№ 3.

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$ ОДЗ: $10x-x^2>0$

Модуль раскрывается однозначно из-за ОДЗ: $x^2-10x<0$

$x \in (0;10)$

$10x + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2 = t$, $t>0$

$t + t^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 t}$ Обе части положительны. Пролог. по основанию 5

$\log_5(t+t^{\log_3 4}) \geqslant \log_3 t$

$\log_5(t+t^{\log_3 4}) \geqslant \frac{\log_5 t}{\log_5 3}$

$\log_5 (t+t^{\log_3 4})^{\log_5 3} \geqslant \log_5 t$

$(t+t^{\log_3 4})^{\log_5 3} \geqslant t$ ~~Верно $\forall\ t>0$.~~

~~То есть $x \in (0;10)$.~~

~~Ответ:~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Запишем это условие:

$\frac{a}{4}+b=3$

Напишем ур-е касательной в точке $\left(\frac{1}{4};3\right)$

$f(x)=4+\frac{4}{4x-5}$

$f(x_0)=3$

$f'(x)=\left(\frac{4}{4x-5}\right)'=-\frac{4}{(4x+5)^2}\cdot 4=-\frac{16}{(4x+5)^2}$

$f'(x_0)=-\frac{16}{(1-5)^2}=-1$

Ур-е касательной: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=$

$=-1\left(x-\frac{1}{4}\right)+3=-x+\frac{1}{4}+3=-x+\frac{13}{4}$

$y(1)=-1+\frac{13}{4}=\frac{9}{4}>1$, поэтому нер-во не будет вып.

Запишем ур-е прямой, проход. г-з точки $\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $(1;1)$

$\begin{cases}4=\frac{1}{4}a+b\\1=a+b\end{cases}$ $\quad\frac{3}{4}a=-3$ $\quad a=-4,\ b=5$

$y=-4x+5$

Заметим, что прямая $h(x)$ не может быть выше этой прямой, потому что иначе она будет принимать большие значения ~~в~~ при $x=1$. Это одна из крайних прямых.

Вторая крайняя прямая — параллельна этой и касающаяся ~~в точке~~ $f(x)$:

$a=-4=f'(x_0)$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) =$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cancel{\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta} + \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta -$

$- \cancel{\sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

№2.

$x-12y = \sqrt{2y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$x^2+36y^2-12x-36y = x^2-12x+36+36y^2-36y+9 =$

$= (x-6)^2+(6y-3)^2 = 90$

$x \geqslant 12y$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$(x-12y)^2 = (2y-1)(x-6)$

$(x-6)^2 \geqslant 0$

$\cancel{2y-1 = x-12y}$

$9(2y-1)^2 \geqslant 0$

$t^2-13t+36=0$

$D = 169-144 = 25$

$3\sqrt{10}$

$x=6$

$t = \frac{13+25}{2} = 19$ $\quad a=19b$ ✓

$y = \frac{1}{2}$

$t = \frac{13-25}{2} = -6$ $\quad a=-6b$ —

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10-x^2)}$

$45 = \frac{(x-6)^2+9(2y-1)^2}{2} \geqslant \sqrt{9(x-6)^2(2y-1)^2} = 3|(x-6)(2y-1)| =$

$=3(x-6)(2y-1)$

$15 \geqslant (x-6)(2y-1) = (x-12y)^2$

$0 \leqslant x-12y \leqslant \sqrt{15}$

$x-6 = a$ $\quad x = a+6$ $\quad x-12y = a+6-6(b+1) =$

$a \geqslant 6b$

$2y-1 = b$ $\quad 2y = b+1$ $\quad = a+6-6b-6 =$

$= a-6b$

$$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2 = 90 \end{cases}$$

$a^2-12ab+36b^2 = ab$

$a^2-13ab+36b^2=0 \quad |:b^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Big| : \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\cos 2\beta + \sin 2\beta\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\cos 4\beta + \sin 4\beta\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{tg\alpha} = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{cases} 2tg\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta - \sin 2\beta\, tg^2\alpha = -\frac{\sqrt5}{5}(1+tg^2\alpha) \\ 2tg\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta - \sin 4\beta\, tg^2\alpha + 2tg\alpha = -\frac{2}{5}(1+tg^2\alpha) \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\begin{cases} \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \cancel{2}\ \frac{2}{\sqrt5}$

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \Big| \cdot\sqrt5$$

$$-\cos 2\beta + 2\sin 2\beta + \sqrt5\sin 2\alpha = -\frac{2\sqrt5}{5}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 \geq 0$

$x^2 - 10x \leq 0$

$x \in [0;10]$

$10x - x^2 > 0$

$x^2 - 10x < 0$

$x \in (0;10)$

$10x + (x^2 - 10x)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$\cancel{\log_3 (10x - (x^2 - 10x}$

Обе части неотриц. пролог.

$10x - x^2 \geq 5^{\log_3(10x - x^2)} + (x^2 - 10x)^{\log_3 4}$

$\log_2 16 = \frac{\log_4 16}{\log_4 2} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

$\cancel{\log_2 4} =$

$|x^2 - 10x| = -(x^2 - 10x) = 10x - x^2$

$\cancel{\log_2 16 = \frac{\log_4 16 \cdot 2}{\log}}$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 = t$

$t > 0$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t(1 + t^{\log_3 4 - 1}) \geq 5^{\log_3 t}$ $\cancel{\log_3 t}$ $| \log_3$

$\log_3 t + \log_3(1 + t^{\log_3 4 - 1}) \geq \log_3(5^{\log_3 t}) = \log_3 t \cdot \log_3 5$

$\cancel{\log_a b = \frac{\log_b a}{\log}}$

$\cancel{\log_3 t +}$

$t + t^{\log_3 4} \geq \cancel{5a}\ 5^{\log_3 t}$

$\cancel{\log_3 t = \frac{\log_5 t}{\log_3 5}}$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_5(t + t^{\log_3 4}) \geq \log_3 t$

$\log_3 t = \frac{\log_5 3}{\cancel{\log_5 t}}$ $\frac{\log_5 t}{\log_5 3}$

$\log_5(t + t^{\log_3 4}) \geq \frac{\log_5 t}{\log_5 3}$

$119 : 7$, 119, 7, 0

$9 \cdot 25$

$3 \cdot 25$

357×32

$75 \times 17 = 525 + 75 = 1245$

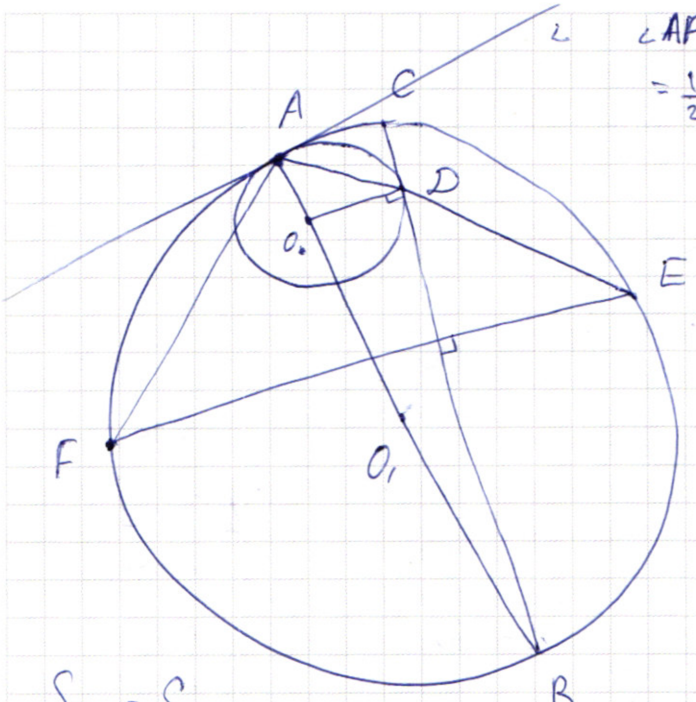
$\cancel{357 : 9}$, $\cancel{27}$, $\cancel{3}$, $\cancel{87}$

$357 : 3 = 119$, 3, 5, 27

$225 : 3 = 75$, 21, 15

$1245 - 224 = 1021$

$70 + 51 + 20 + 42 + 23 = 195$ (121, 141, 163)



$\angle AFE = \angle LAE$

$= \frac{1}{2}$

$R_1, R_2 - ?$ $\angle AFE - ?$

$CD = \frac{15}{2}$ S_{AEF}

$BD = \frac{17}{2}$

$O_2D \parallel FE$

$BC = \frac{15+17}{2} = 16$

$BD^2 = B_1K \cdot BA$

$BD^2 = 2R_1(2R_1 - 2R_2)$

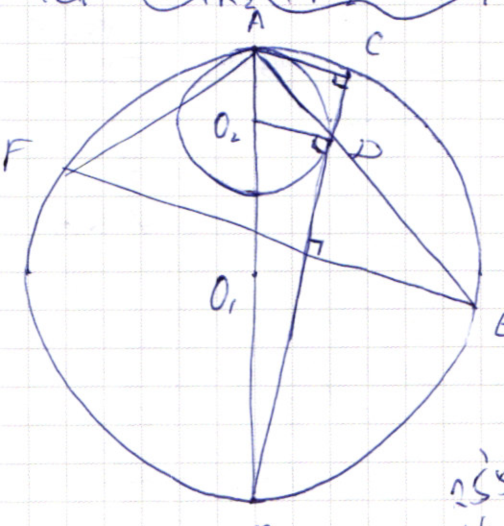
$BD^2 = 4R_1(R_1 - R_2)$

$S_{AEF} = S_{ECF}$

$\triangle BO_2D$ прямоуг., то

$\cancel{BD^2} = BD^2 + R_2^2 = (2R_1 - R_2)^2$

$\cancel{4R_1^2 - 4R_1R_2 + R_2^2 = 4R_1^2 - 4R_1R_2 + R_2^2}$



$AC^2 = 4R_1^2 - BC^2$

$\frac{R_2}{AC} = \frac{BD}{BC}$

$\frac{R_2^2}{AC^2} = \frac{BD^2}{BC^2}$ $BD^2 = \frac{BC^2 \cdot R_2^2}{4R_1^2 - BC^2}$

$\frac{BD}{BC} = \frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = 1 - \frac{R_2}{2R_1}$

$\frac{R_2}{2R_1} = 1 - \frac{BD}{BC}$

$R_2 = 2R_1\left(1 - \frac{BD}{BC}\right)$

$\frac{R_2}{R_1} = 2\left(1 - \frac{BD}{BC}\right)$

$BD^2 = 4R_1\left(R_1 - 2R_1 + 2R_1\frac{BD}{BC}\right) =$

$= \cancel{BD}$ $BD^2 = 4R_1\left(2R_1\frac{BD}{BC} - R_1\right) = 4R_1^2\left(2\frac{BD}{BC} - 1\right)$

$R_1 = \frac{BD^2}{4\left(2\frac{BD}{BC} - 1\right)}$

255 | 16
16 | 15
95

640 | 289

$\begin{array}{r} 128 \\ \times\ 5 \\ \hline 640 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 15 \\ \hline 85 \\ 17 \\ \hline 255 \end{array}$ 15.1 $\begin{array}{r} 33 \\ +\ 4 \\ \hline 132 \\ +\ 225 \\ \hline 357 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ \hline 149 \\ 17 \\ \hline 319 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{289 - 256} =$

№5.

$f: \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ $\forall$ простого p

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$, что $f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(x) \ge 0$ при $x \in \mathbb{N}$

$f(\frac{1}{3}) = f(\cancel{3} + \cancel{f(\frac{1}{9})} = \cancel{f(\frac{1}{9})}$

$f(\frac{1}{5}) =$

$\cancel{f(3)} = 1$ $\quad f(1) = f(5 \cdot \frac{1}{5}) = 1 + f(\frac{1}{5}) = \cancel{1} - 1$

$f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow \quad f(\frac{1}{5}) = -1$

$f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

$f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$. $\quad f(x) < f(y)$.

Надо найти число таких пар.

$f(1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 2f(1)$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(2k) = f(k)$

$f(2^{\alpha}) = 0$

$f(3^{\alpha}) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Число пар таких, что $f(x) < f(y)$

$\cancel{f(2)=0}$

$f(3)=0$

x	f(x)
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2

$-32x^2+36x-3=$

$=4+\frac{4x}{4x-5}$

$-32x^2+36x-7=\frac{48}{4x-5}$

$(-32x^2+36x-7)(4x-5)=$

$=$

$t+t^{\log_3 4}=5^{\log_3 t}$

$\log_5(t+t^{\log_3 4})=$

$=\log_3 t$

$\log_5$

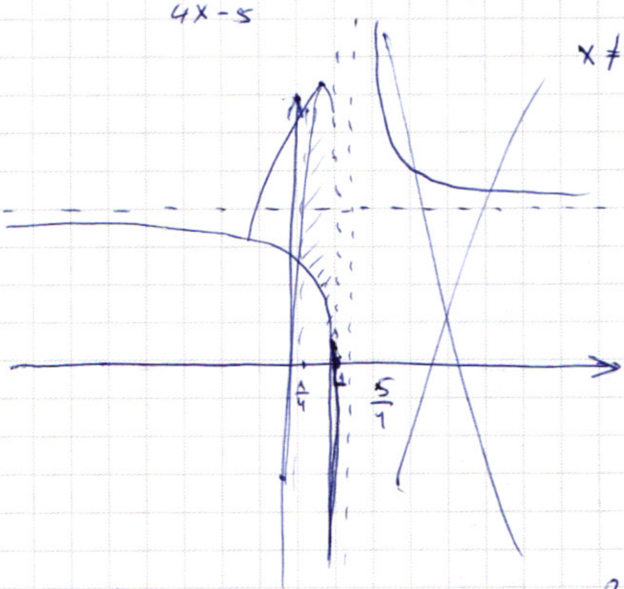
знам. число знам.

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$$\begin{array}{r|l} 16x-16 & 4x-5 \\ \underline{16x-20} & 4 \\ 4 & \end{array}$$

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$x \ne \frac{5}{4}$



$4+\frac{4}{4x-5}=0$

$\frac{4}{4x-5}=-4$

$4x-5=-\cancel{4}\,1$

$4x=4$

$x=1$

$x_0=-\frac{b}{2a}=$

$=\frac{\cancel{36}\,9}{\cancel{64}\,16}=$

$=\frac{9}{16}$

$y_0=-\cancel{32}\cdot\frac{81}{\cancel{256}}+\frac{36\cdot 9}{\cancel{16}\,4}-3=$

$=-\frac{81}{8}+\frac{81}{4}-3=$

$=-\frac{81}{8}+\frac{162}{8}-\frac{24}{8}=$

$=\cancel{162}\ \frac{81-24}{8}=$

$=\frac{57}{8}=7\frac{1}{8}$

$-32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac{1}{4}-3=$

$=-2+9-3=9-5=4$

$4^{15}-\frac{4}{5}=$

$=\frac{16}{5}$

$-32-3+36=$

$(t+t^{\log_3 4})'=$

$=1+\log_3 4\cdot t^{\log_3 4-1}=0$

$\log_3 4\cdot t^{\log_3 4-1}=-1$

$\cancel{t^{\log}}$

~~min знам~~

$t+t^{\log_3 4}>0$

$10x-x^2$

$t\in[0;25]$

$x_0=-\frac{10}{-2}=5$

$50-25=25$

$t_{max}=25$

$t_{min}\ \cancel{7}$

$\cancel{t}^x=a^{\log_5 3}$

$t=\log_t a^{\log_5 3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)