МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cancel{\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \ (*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$(*)$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha)(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$(\sin 2\alpha)(2\cos^2 2\beta) - \sin(2\alpha) + \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

Восп. методом подстановки блока.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2}{5} \quad (**) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha(\cos 2\beta) + \cos 2\alpha(\sin 2\beta) = -\sqrt{5}/5 \\ \cos 2\beta = \sqrt{5}/5 \\ \sin 2\beta = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

3

$(**)$

$2\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad |:2$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \sqrt{5}/5$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{\frac{25}{25}-\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{4\cdot 5}{5\cdot 5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha \pm (\cos 2\alpha)\cdot 2 + 1 = 0$ (1), (2)

$\left[\begin{array}{l} \cancel{\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 0} \\ \cancel{\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 0} \end{array}\right.$

$\cancel{\sin 2\alpha \pm 2\cos 2}$

$\cancel{\sin 2\alpha \pm 2(1 - 2\sin^2}$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{\operatorname{tg} 2\alpha + 2 + \operatorname{tg} 2\alpha \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 0} \\ \cancel{\operatorname{tg} 2\alpha - 2 + \operatorname{tg} 2\alpha \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 0} \end{array}\right.$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$\cancel{\sin(\frac{\pi}{2} \pm 2\alpha)}$

$\cancel{\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) \pm}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = -1$

$2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0 \,|: \cos^2\alpha$

$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$

$\cancel{\operatorname{tg}\alpha = -2 \pm \sqrt{4}}$

$D = 4 + 12 = 16 = 4^2$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-2 \pm 4}{6} = \frac{-1 \pm 2}{3} = \left[\begin{array}{l} -1 \\ 1/3 \end{array}\right.$

$\cancel{\operatorname{tg}\alpha = -1}$

$\cancel{\operatorname{tg}\alpha = 1/3}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2$

Продолжение на странице

№ 10!

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x - x^2 + |10x-x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Замена $10x - x^2 = t$

$$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

$$t + |t|^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \qquad \underline{t>0}\,!$$

$$t + |t|^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$$

т.к. $t>0 \Rightarrow |t| = t$

$$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$$

$$\cancel{t\left(1 + t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1}\right) \geq 0}$$

~~Заметим, что $t>0 \Rightarrow t(\ldots) \geq 0$ ($\forall t>0$ $t(\ldots)\geq 0$)~~

$$\cancel{1 + t^{\log_3}}$$

$$t + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq 0$$

Замена $\log_3 t = a$

$t = 3^a$

$$3^a + 4^a \geq 5^a$$

Введем

$f(x) = 3^a + 4^a$

$g(x) = 5^a$

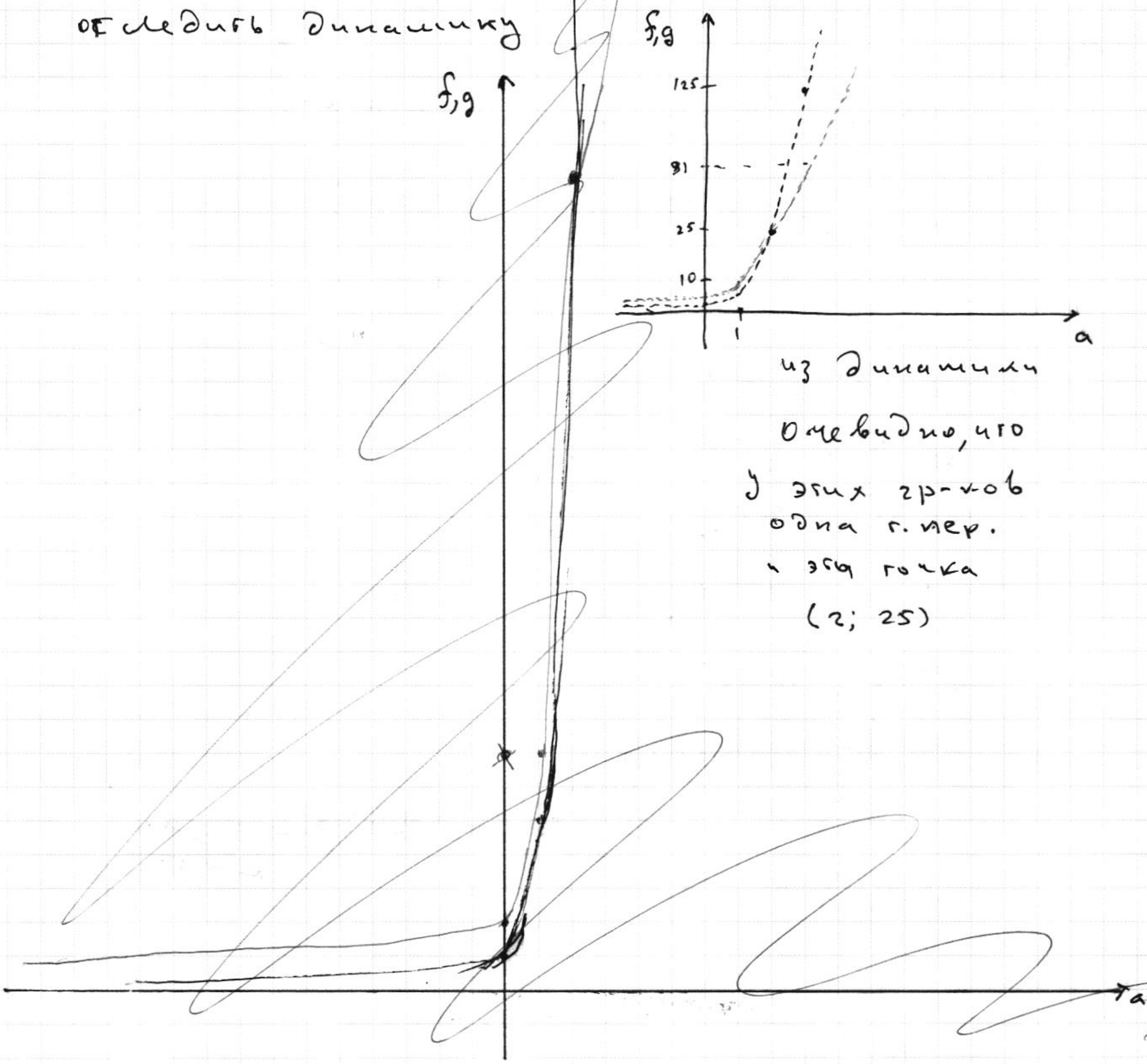
$f_{(a)} = 3^a + 4^a$

a	1	0	2	3
f	7	2	25	91

$g_{(a)} = 5^a$

a	0	1	2	3
g	1	5	25	125

нарисуем эскиз, чтобы отследить динамику



из динамики очевидно, что у этих гр-ков одна т. пер. и эта точка (2; 25)

следовательно

$f(x) \geq g(x)$ для $a \leq 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Обратная замена:

$a = \log_3 t$

$\log_3 t \leq 2$

$\log_3 t \leq \log_3 3^2$

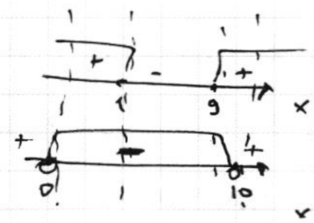
$\log_3 t \leq \log_3 9$

$\begin{cases} t \leq 9 \\ t > 0 \end{cases}$

Обратная замена

$t = 10x - x^2$

$\begin{cases} 10x - x^2 \leq 9 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geq 0 \\ x^2 - 10x < 0 \end{cases} \Rightarrow$



$\cancel{x^2 - 10x + 9 \geq 0}$

$\cancel{x^2 - 10x \geq 0}$

$\cancel{x \in (0;1] \cup [9;10]}$

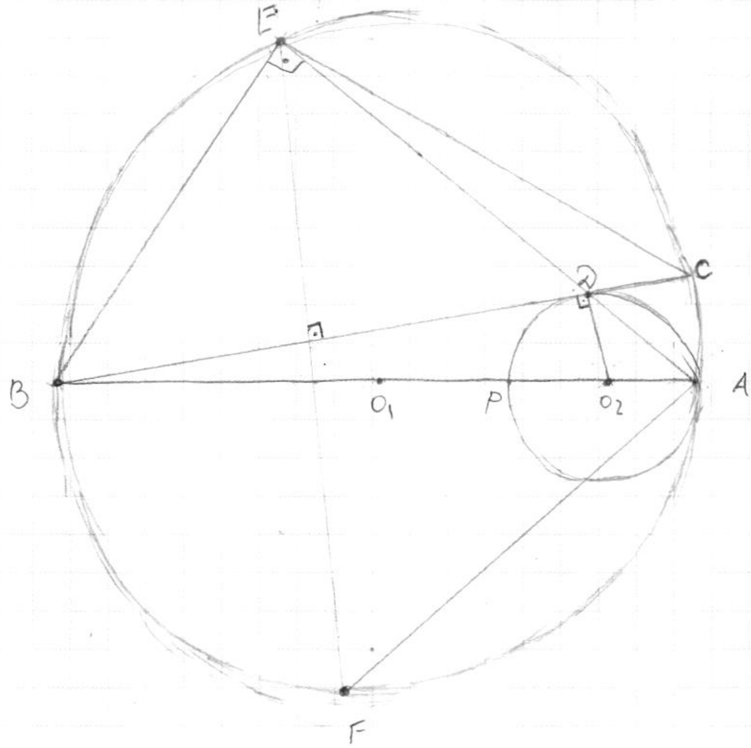
$x \in (0;1] \cup [9;10)$

Ответ: $(0;1] \cup [9;10)$.

No 4

Дано:
$CD = 15/2$
$BD = 17/2$

R, r
$\angle AFE = ?$
$S(AFE) = ?$



1. Доп. постр: AF – хорда, EB – хорда

2. Пусть O_1 и O_2 – центры $\omega(R)$, $\omega(r)$

3. построим O_2D – радиус в т. кас BC и $\omega(O_2 r)$ ⇒

⇒ $O_2D \perp BC$, пусть $BA \cap \omega(O_2; r) = P$

4. Рассм BD – кас.

BP ~~BA~~ – секущая.

$BD^2 = BP \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$

5. рассм △ BDO_2 – п/у

$BD^2 + DO_2^2 = BO_2^2$

$BD^2 + r^2 = (2R - r)^2$

5.1 △ BEA – п/у т.к опирается на диаметр.

5.2 Заметим, что △ BEC – р/б.

из ч. 4 и 5:

$(2R - 2r) \cdot 2R = (2R - r)^2 - r^2$ верное рав-во.

6. ∠EFA и ∠EBA опир. на одну дугу ⇒ ∠EBA = ∠EFA ⇒ будем искать ∠EBA

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(2R-2r)\cdot 2R = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

№ 2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \quad (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \quad (**) \end{cases}$$

$\cancel{x^2-24yx+144y^2=2xy-12y-x+6}$

(**)

$\cancel{x^2+36y^2-12x-36y=45}$

$\cancel{x^2+(6y)^2-12x-36y=45}$

$\cancel{x^2+(6y)^2-12(x+3y)=45}$

(1) $x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$ $\qquad x \geqslant 12y$

$x^2-24yx+144y^2 = 2xy-12y-x+6$

$x^2-26yx+144y^2+12y+x-6=0$

$x^2+x(-26y+1)+144y^2+12y-6=0$

$D=(26y-1)^2-4(144y^2+12y-6)=$

$=\underline{13^2\cdot 2^2y^2}-4\cdot 13y+\underline{1}-\underline{4\cdot 12^2y^2}-4^2\cdot 3y+24$

$\cancel{4y^2(13^2-12^2)-4(13y-12y)-23}$

$\cancel{4\cdot 25y^2-4y-23}$

$4y^2(13^2-12^2)-4(13y+12y)+25=0$

$4y^2\cdot 25-4\cdot 25y+25=0$

$4y^2-4y+1=0 \Rightarrow (2y)^2-2\cdot(2y)+1=(2y-1)^2$

$$x = \frac{26y-1 \pm (2y-1)}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{28y-2}{2} = 14y-1 \\ x = \frac{24y}{2} = 12y \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 14y-1 \\ x = 12y \end{array}\right. \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 14y-1 \\ x = 12y \end{array}\right. \\ \cancel{x} \quad x(x-12)+36(y^2-y)=45 \\ x \geqslant 12y \end{cases}$$

$$(14y-1)(14y-1-12)+36(y^2-y)=45$$

$$(14y-1)(14y-13)+36(y^2-y)=45$$

$$\cancel{196y^2-14\cdot13y}$$

$$14\cdot14y^2-14\cdot13y-14y+\cancel{13}+36y^2-36y=45$$

$$14\cdot14y^2-14\cdot13y-14y+36y^2-36y=32$$

$$7\cdot14y^2-7\cdot13y-7y+\cancel{2}\,18y^2-18y=16$$

$$7\cdot14y^2-7\cdot14y+18y^2-18y=16$$

$$7\cdot7y^2-7\cdot7y+9y^2-9y=8$$

$$49y^2-49y-9y+9y^2=8$$

$$49y^2-58y+9y^2-8=0$$

$$58y^2-58y=8$$

$$58y^2-58y-8=0.$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 13 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$y^2-y-\frac{8}{58}=0$$

$$D = 1+\frac{32}{58} = \frac{58+32}{58} = \frac{90}{58}$$

$$k=-29$$

$$\cancel{D = 29^2+58\cdot8 = \frac{58^2}{4}+58\cdot8 = 58\left(\frac{58}{4}+8\right) =}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{90}{58}}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \dfrac{1+\sqrt{\frac{90}{58}}}{2} \\ x = 6 + 7\sqrt{\frac{90}{58}} \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{1-\sqrt{\frac{90}{58}}}{2} \\ x = 6 - 7\sqrt{\frac{90}{58}} \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{180+\sqrt{2}}{2} \\ x = 12\left(\dfrac{180+\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{180-\sqrt{2}}{2} \\ x = 12\left(\dfrac{180-\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$12y(12y-12) + 36(y^2 - y) = 45$$

$$12\cdot 12y^2 - 12\cdot 12y + 36y^2 - 36y = 45$$

$$(144+36)y^2 - 144y - 36y = 45$$

$$180y^2 - 180y - 45 = 0$$

$$y^2 - y - \frac{45}{180} = 0$$

$$D = 1 + \frac{180}{180} = 2$$

$$y = \frac{180 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$3\cdot 6\cdot 6$

$\times\,\begin{array}{r}36\\3\\\hline 98\end{array}$

Ответ: $\left\{\left(6+7\sqrt{\frac{90}{58}};\ \frac{1}{2}+0{,}5\sqrt{\frac{90}{58}}\right);\ \left(6-7\sqrt{\frac{90}{58}};\ \frac{1}{2}-0{,}5\sqrt{\frac{90}{58}}\right);\right.$

$\left.(98+6\sqrt{2};\ 90+0{,}5\sqrt{2});\ (98-6\sqrt{2};\ 90-0{,}5\sqrt{2})\right\}$

(1) $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0 \quad | : \cos^2\alpha$

$3 + 2tg\alpha - tg^2\alpha = 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$tg\alpha = \frac{2 \pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = -1 \end{array}\right.$

разделил на $\cos x$ т.к
$\cos\alpha \neq 0$ – по. усл.

Ответ: $\{3; \frac{1}{3}; -1\}$

(2) $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$D = 4 + 12 = 16 = 4^2$

$tg\alpha = \frac{-2 \pm 4}{6} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ -1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{1}{3} \\ tg\alpha = -1 \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

напишем ур-я границ, введем ф-ии

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$

~~$f(x) = \frac{16(x-1)}{4x-5}$~~

$16x-16 \,|\, 4x-5$
$16x-20 \,|\, 4$
4

$f(x) = 4 + \frac{4}{4x-5}$

ф. дробнолин.
гр. гипербола
асимптоты:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ f(x) = 4 \end{cases}$$

$g(x) = ax+b$

ф. лин

$a \neq 0$
гр. - мн-во прямых общего вида

$a = 0$
гр - прям $\parallel Oy$

$h(x) = -32x^2+36x-3$

ф. кв. гр. парабола
ветви ↓

$x_b = +\frac{36}{64}$

$y_b = \dots$

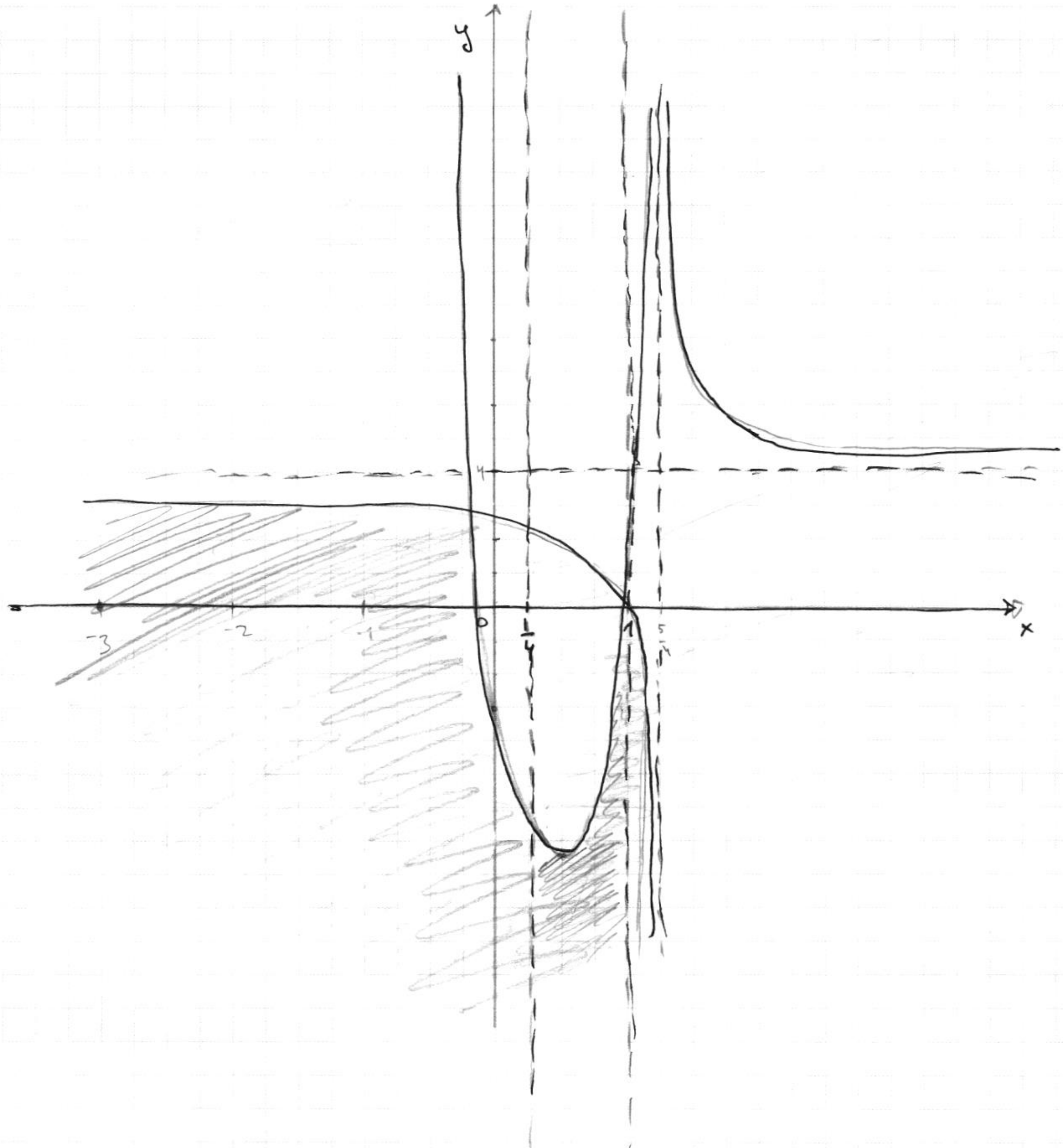
x	0	1
y	-3	1

$\frac{36}{64} > \frac{1}{4}$

$64 \,|\, 4$
$4 \,|\, 16$
24

$\frac{36}{64} > \frac{16}{64}$

решим эту задачу на плоскости xOy



Прямые должны проходить под пароболой
и под гиперболой

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \sqrt{1-\frac{5}{25}} \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2(1-2\sin^2\alpha) + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha + 1 = 0$

$-4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha(\cos\alpha) + 3 = 0$

$\frac{25-5}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4\cdot 5}{5\cdot 5}$

$\sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{4\cdot 5}{5\cdot 5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} =$

$= \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta$

$tg = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$4\cos^2\alpha + 16\cdot 3$

$4(\cos^2\alpha + 12)$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \quad |: \cos 2\alpha$

$tg\, 2\alpha + 2 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos(\frac{\pi}{2} - 2\beta)\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + (\cos^2\frac{\pi}{2} - \cos^2 2\beta)\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}(-)$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta(2\cos^2\alpha - 1) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$-4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 3 = 0$

$-4\, tg^2\alpha + 2tg\alpha + \frac{3}{\cos^2\alpha} = 0$

$tg\, 2\alpha(1+\sin 2\alpha) + \cos 2\alpha = 0$

$tg\, 2\alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$

$\frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$

$1 + 7^{\log_3 \omega} - 7^{\log_3 \omega} = 0$

$3^3 + 3^4$

$3^3(1 + 3^{n-3})$

$7^{\log_3 3} +$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$ $\cancel{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = \cancel{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$ $\cancel{\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha +}$

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \cancel{\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$

$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$

$\cancel{2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = \frac{2}{5}}$

$$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin(2\alpha)\cos(4\beta)+\sin(4\beta)\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} \ (*)$$

(*)

$$\sin(2\alpha)(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta - \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2\sin 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -0{,}2$$

$$\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -0{,}2$$

$$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$3^{\log_3 10}$

$4^{\log_4 2} =$

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1 - 1$

$2\cos^2\alpha - 1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1+t^{\log_3 4-1}=t^{\log_3 5-1}$

$t^{\log_3 \frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}}=-1$

$1+t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1}\geq 0$

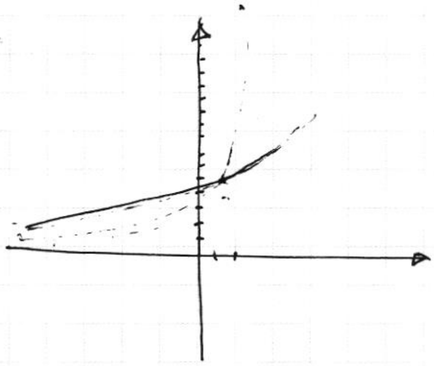
$1+t^{\log_3\frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}}=0$

$\frac{4}{3}^{\log_3 t}-\frac{5}{3}\log_3 t=-1$

$t\left(1+4^{\log_3 t}-5^{\log_3 t}\right)\geq 0.$

$1+4^a-5^a\geq 0$

$1+4^a\geq 5^a$



$\frac{3}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^a\geq\left(\frac{5}{3}\right)^a$

$4^a\geq 5^a$

$t+4^{\log_3 t}=5^{\log_3 t}$

$\log_3 t=a$

$t=3^a$

$3^a+4^a\geq 5^a$

$\begin{array}{r}25\\ \times\ 5\\ \hline 125\end{array}$

$\begin{array}{r}16\\ +\ 9\\ \hline 25\end{array}$

$\begin{array}{r}16\\ \times\ 4\\ \hline 64\end{array}$

$\begin{array}{r}27\\ +\ 64\\ \hline 91\end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2-10x+9=0$

$k=-5$

~~D = 2...~~ $D=25-9=16=4^2$

$$\begin{array}{r}-\begin{array}{r}25\\9\end{array}\\\hline 16\end{array}$$

$x=\frac{5\pm4}{1}=\left[\begin{array}{l}9\\1\end{array}\right.$