МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$ (*)

Заметим, что $\sqrt{xy-6x-y+6}=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

В (*) тогда равносильна $\begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x^2-2x+1)+(y^2-12y+36)= \\ =45+9+36 \end{cases}$

Замена $\boxed{u=y-6,\ v=x-1.}$

$(*)\Leftrightarrow \begin{cases} u-6v=\sqrt{uv} \\ 9v^2+u^2=45+9+36=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-6v=\sqrt{uv} \\ 9v^2+u^2=90. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-6v)^2=uv \\ 9v^2+u^2=90 \\ u-6v\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-12uv+36v^2=uv \\ 9v^2+u^2=90 \\ u-6v\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2-13uv+36v^2=0 \ (1) \\ 9v^2+u^2=90 \\ u-6v\geq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ решаем (1) отн u по обр. Т. Виета $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=9v \\ u=4v \end{array}\right. \\ 9v^2+u^2=90 \\ u-6v\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=9v \\ 9v^2+(9v)^2=90 \\ 9v-6v\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u=4v \\ 9v^2+(4v)^2=90 \\ 4v-6v\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=9v \\ 90v^2=90 \Leftrightarrow v^2=1 \\ 3v\geq 0 \Leftrightarrow v\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u=4v \\ 25v^2=90 \\ v\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=9v=9 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=4\cdot v=-4\cdot\frac{\sqrt{90}}{\cancel{25}\,5} \\ v=-\frac{\sqrt{90}}{\cancel{25}\,5} \end{cases} \end{array}\right.$ Обр. замена: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=-\frac{\sqrt{90}}{\cancel{25}\,5} \\ y-6=-\frac{4\sqrt{90}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=6+9=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{90}}{5} \\ y=6-\frac{4\sqrt{90}}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ:

$$\boxed{(x,y)\in\left\{(2;15);\left(1-\frac{\sqrt{90}}{5};6-\frac{4\sqrt{90}}{5}\right)\right\}}$$

Задача 1

$$\sin(2\alpha+2\beta)\overset{(1)}{=}-\frac{1}{\sqrt{17}} \quad и \quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha\overset{(2)}{=}-\frac{2}{17}$$

1) $-\frac{2}{17}=\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(-\frac{4\beta}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{\cancel{2}1}{17}=\sin(2\alpha+2\beta)\cos(-2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

подставим (1): $-\frac{1}{17}=\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta$

$\Leftrightarrow \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta=\pm\sqrt{\frac{17-1}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}.$

2) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Updownarrow$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Updownarrow$

$\sin 2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\pm\cos 2\alpha\frac{4}{\sqrt{17}}=-1/\sqrt{17}$

$\Updownarrow$

$\sin 2\alpha\pm 4\cos 2\alpha=-1.$

~~Поскольку~~ Т.е. теперь осталось разобрать 2 случая.

I) $\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4(2\cos^2\alpha-1)=-1 \quad (**)$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha=3 \underset{\cos\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+8=3\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=3(1+tg^2\alpha)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение).

$\Leftrightarrow \quad 2tg\alpha + 8 = 3(1+tg^2\alpha) \Leftrightarrow 3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

$\underset{\text{обр Т. Виета}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 5/3 \end{array}\right.$

II) Начнем с ур-ния $(**)$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4(2\cos^2\alpha - 1) = -1$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin\alpha\cos\alpha - 8\cos^2\alpha = -5$

$\underset{\cos\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad 2tg\alpha - 8 = -5\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = -5(1+tg^2\alpha)$

$\Leftrightarrow \quad 2tg\alpha - 8 = -5 - 5tg^2\alpha$

$\Leftrightarrow \quad 5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$\underset{\text{обр Т. Виета}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 3/5 = 0{,}6 \end{array}\right.$

Очевидно, что все полученные значения достигаются. Достаточно взять β с соотв значением синуса. Тогда всё можно равносильно "прокрутить" до изначальной системы.

Ответ: $tg\alpha \in \{-1; 0{,}6; 5/3\}$.

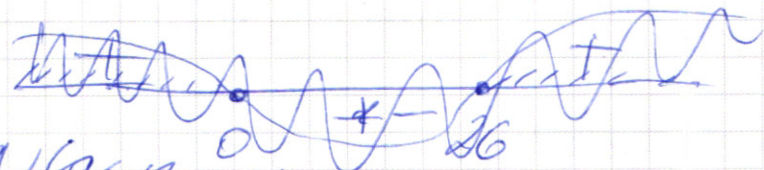
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№3 $|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$ $\boxed{(*)}$

ОДЗ: $26x - x^2 > 0 \iff x(26-x) > 0$

Реш методом интервалов x



$\iff$ ~~$x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty)$.~~

$x\in(0;26)$ ОДЗ

$\boxed{(*)} \iff |26x-x^2|^{\log_5 12} \geqslant (x^2-26x) + 13^{\log_5(26x-x^2)}$ $\boxed{(**)}$

Обозначим $u = \log_5(26x-x^2)$ — корректно, т.к. $26x-x^2>0$ по ОДЗ

Тогда $\boxed{(**)} \iff 5^{u\log_5 12} \geqslant -5^u + 13^u$

$\iff 5^u 12^u + 5^u \geqslant 13^u$

$\underset{13>0}{\iff} \left(\frac{5}{13}\right)^u + \left(\frac{12}{13}\right)^u \geqslant 1$ $\boxed{(***)}$

Заметим, что $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25+144}{169} = 1$

$\Rightarrow \exists\alpha\in(0;\pi/2):\ \sin\alpha = 5/13,\ \cos\alpha = 12/13$

т.е. $\boxed{(***)} \iff \underbrace{(\cos\alpha)^u + (\sin\alpha)^u}_{f(\alpha)} \geqslant 1.$

~~При~~ 1^0 $u>2 \Rightarrow f(\alpha) < \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, т.к. $\sin\alpha, \cos\alpha \in (0;1)$

При $u \leq 2$:

$f(\alpha) \geqslant \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, т.к.

т.е. $u \leq 2 \iff \boxed{(***)}$, т.е.

$\log_5(26x-x^2) \leq 2 \iff 0 < 26x - x^2 \leq 25$

$\underset{\text{ОДЗ}}{\iff} \begin{cases} \cancel{x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty)}\ x\in(0;26) \\ x^2-26x+25 \geqslant 0 \end{cases} \underset{\text{обр. Т. Виета}}{\iff} \begin{cases} \cancel{x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty)}\ x\in(0;26) \\ (x-1)(x-25) \geqslant 0 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty)}\; x\in(0;26) \\ (x-1)(x-25)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \cancel{(-\infty;0)\cup(26;+\infty)}\;(0;26) \\ x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty) \end{cases}$$

$+$ 1 $-$ 25 $+$

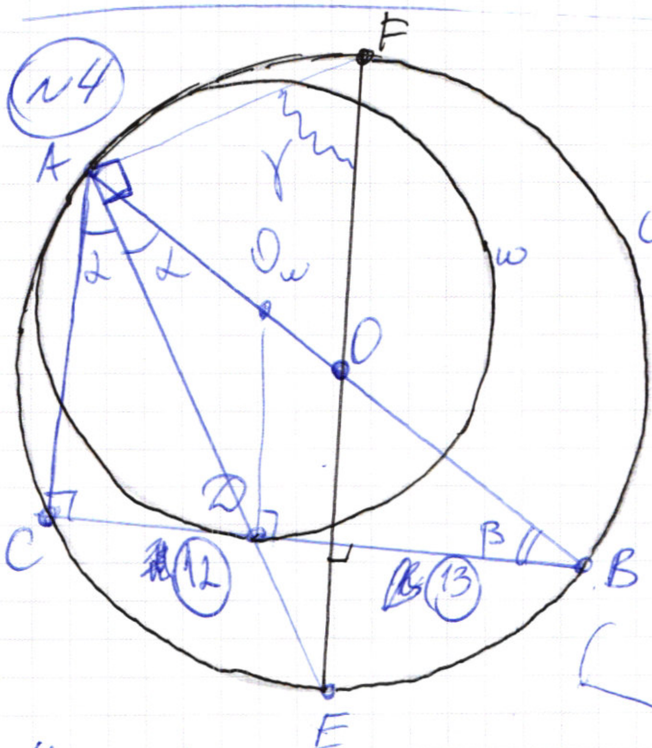
~~$\Leftrightarrow\ x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty)$~~

~~Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty)$.~~

$\Leftrightarrow\ x\in(0;1]\cup[25;26)$

$\boxed{\text{Ответ: } x\in(0;1]\cup[25;26)}$

№4



а) Дано: $\boxed{BD=13,\ CD=12}$

1) Полемма Архимеда E – середина дуги BC в Ω, но тогда F – середина дуги CAB описанной окр-ти Ω (т.к. центр Ω O и $E\in$ серперу к BC)

2) тогда AD – бис. угла CAB $\Rightarrow \frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}$ по св-ву биссектрисы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12}{13}=\frac{AC}{AB}=\cos 2\alpha$ (см. картинку)

т.к. AB – диам.

$AC=\frac{12AB}{13}$

Найти: S_{AFE}, R_ω, R_Ω, $\angle AFE$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\underset{AB\text{-диам}}{\Longrightarrow} \angle ACB = 90^\circ$. ~~AD~~; $\sin 2\alpha = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$

подставили $\cos 2\alpha = \frac{12}{13}$

т.е. $2\alpha = \arccos\frac{12}{13} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}$.

3) <u>найдем $\angle AFE$.</u>

$\angle AFE = \angle AFC + \angle CFE = \underset{\text{из впис. углов}}{\beta + \alpha} =$

$= \underset{\text{из суммы углов }\triangle CAB}{90^\circ(\beta+2\alpha) - \alpha =}$ $\boxed{90^\circ - \alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}}$.

4) <u>$BC = 12+13 = 25$</u>

$\Rightarrow AB = \frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{25}{5/13} = 13\cdot 5 = 65$

$\Rightarrow \boxed{R_\Omega \underset{AB\text{-диам.}}{=} \frac{AB}{2} = \frac{65}{2}}$.

из гомотетии! $O_\omega \in AB$! т.к. ω кас Ω в т. A

5) Пусть O_ω – центр ω. Тогда $O_\omega D \perp BC$. Из подобия $\triangle ACB$ и $\triangle O_\omega DB$ (остр. угол общий $+\angle 90^\circ$); т.е. по 2 углам

$O_\omega D = R_\omega$

$\frac{O_\omega D}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{R_\omega}{\frac{12}{13}\cdot AB} = \frac{13}{25}$

$\Rightarrow R_\omega = \frac{13}{25}\cdot\frac{12}{13}\cdot AB = \frac{12}{25}AB = \frac{12}{\cancel{25}_5}\cdot\cancel{65}^{13} =$

$= \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{144+12}{5} = \boxed{\frac{156}{5}}$

6) Поскольку E – середина дуги BC, а F – середина дуги CAB в окр-ти Ω, то EF – диаметр

$\Rightarrow \triangle EAF$ – прямоугольный ($\angle EAF = 90^\circ$).

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF = \frac{1}{2}(EF)^2\cdot \sin\gamma\cos\gamma =$$

$$= \frac{1}{4}(EF)^2\cdot(2\sin\gamma\cos\gamma) = \frac{1}{4}(EF)^2\cdot\sin 2\gamma =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(EF)^2\cdot\sin\left(2\left(90^\circ - \frac{\arccos\frac{12}{13}}{2}\right)\right) =$$

$\gamma = \angle AFE$

$$= \frac{1}{4}(EF)^2\ \sin\left(180^\circ - \arccos\frac{12}{13}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(EF)^2\cdot\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right) = \frac{1}{4}\cdot(EF)^2\cdot\frac{5}{13} =$$

$EF = AB = 65$

$$= \frac{1}{4}\cdot 65\cdot\frac{5}{13} = \frac{65\cdot 5}{13\cdot 4} = \frac{300+25}{52} = \frac{325}{52}$$

Ответ:

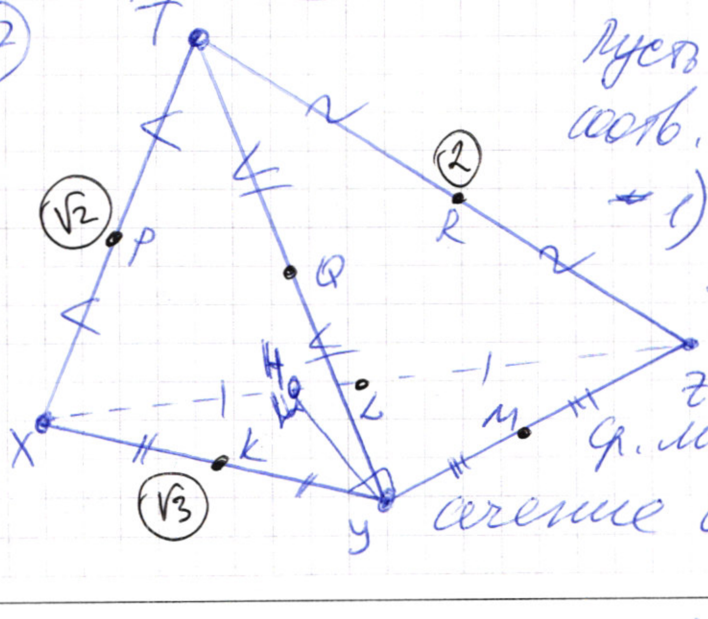
1) $R_{\Omega} = 65/2$

2) $R_{\omega} = \frac{156}{5}$

3) $\angle AFE = 90^\circ - \frac{\arccos 12/13}{2}$

4) $S_{AFE} = \frac{325}{52}$.

№7



Пусть P, Q, R, K, L, M – середины соотв. ребер (см. картинку)

1) Рассм. $KLMY$.

Это пар-м ($LM \parallel XY$ и $KL \parallel YZ$ по св-ву ср. линии), причем т.к. сечение сферы плоскостью

№7 (продолжение) →

— это окружность, то $KLMY$ — вписанный параллелограмм, т.е. прямоугольник

$\Rightarrow \angle KLM = \angle KYM \overset{\angle XYZ}{=} 90^\circ$ (следует из того, что $\angle KLM = \angle KYM$ по св-ву пар-ма и $\angle KLM + \angle KYM = 180^\circ$ по св-ву впис. 4-ка)

2) Аналогичным образом $PRMK$ — прямоугольник. Действительно, $PK \parallel TY \parallel RM$ и $PR \parallel XZ \parallel MK$

$\Rightarrow PRMK$ — одна пл-ть и пар-м.

$\Rightarrow PR \perp \cancel{MK}\ MR \Rightarrow \boxed{TY \perp XZ}$ (взяли из параллельности ср. линий)

3) Пусть H — ~~проекция~~ проекция Y на XZ.

$\Rightarrow$ верно следующее:

$\begin{cases} YH \perp XZ \\ TY \perp XZ \end{cases} \Rightarrow$ пл-ть $(THY) \perp XZ \Rightarrow TH \perp XZ$

$\Rightarrow H$ — основание высоты в Δ-ке XTZ.

Тогда по Тн Пифагора:

$XH^2 + TH^2 = (XT)^2 = (\sqrt{2})^2$, $HZ^2 + TH^2 = (2)^2 = 4$

$\Rightarrow XH^2 - \cancel{TH^2}\ HZ^2 = 2 - 4 = -2$.

Аналогично $XH^2 - HZ^2 = (XY)^2 - (YZ)^2 = 3 - (YZ)^2$

$\Rightarrow 3 - (YZ)^2 = -2 \Rightarrow YZ^2 = 5 \Rightarrow \boxed{YZ = \sqrt{5}}$

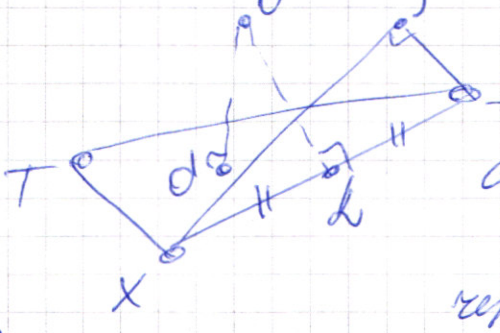
$\Rightarrow$ т.к. $\angle XYZ = 90^\circ$: $YZ^2 + XY^2 = XZ^2$

$\Rightarrow XZ^2 = 5 + 3 = 8 \Rightarrow \boxed{XZ = 2\sqrt{2}}$

4) Найдем минимальный радиус описанной сферы тетраэдра

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Поймем для этого как его построить.



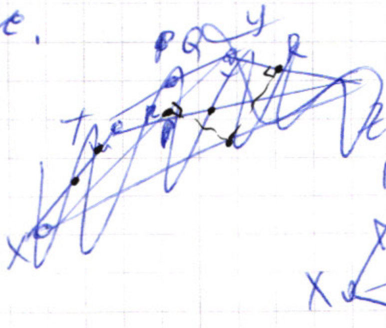
Пусть O' — центр окр-ти (TXZ), O — центр ~~сфе~~ опис. сферы тетраэдра, L — середина XZ (см. картинку слева)

Заметим, что перп. через O' к пл-ти TXZ — ~~ГМТ~~ ГМТ точек, равноуд. от T, X, Z — очевидным образом следует из Th Пифагора: OO' — общ и TO' — равен радиусу окр (TXZ).

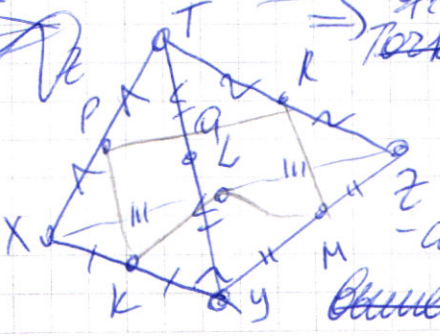
Аналогичным образом центр опис. сферы лежит на перп. через середину XZ (— точке L) к пл-ти (XYZ) $(OL \perp XZY)$!

Дальше ~~раду~~ радиус сферы OX нетрудно оценить: $R\ OX^2 = OO'^2 + O'X^2 \geq O'X^2$.

Сначала проверим, что положение, при котором $(XYZ) \perp TXZ$ подходит, а затем и найдем радиус.



т.к. $\angle XYZ$ — прямой, то ~~уг~~ а перп. $TY \perp XZ$ следует из Th Карно $\Rightarrow$ точки $KLMY$ и $PQRM$ — вписанные ($TY \perp XZ$ и $\angle XYZ = 90°$) — следует из равносильности ~~вышенаписанных~~ написанного ранее



т.к. $TX^2 - TZ^2 = XY^2 - XZ^2$, $TY \perp XZ$

– можно проделать обратно с исп. Th Карно.

т.е. $PRMK$ – прямоуг. $\Rightarrow$ одна окр-ть,

а $YKLM$ – прямоуг, т.к. $\angle XYZ$ прямой, дальше исп. св-во средних линий.

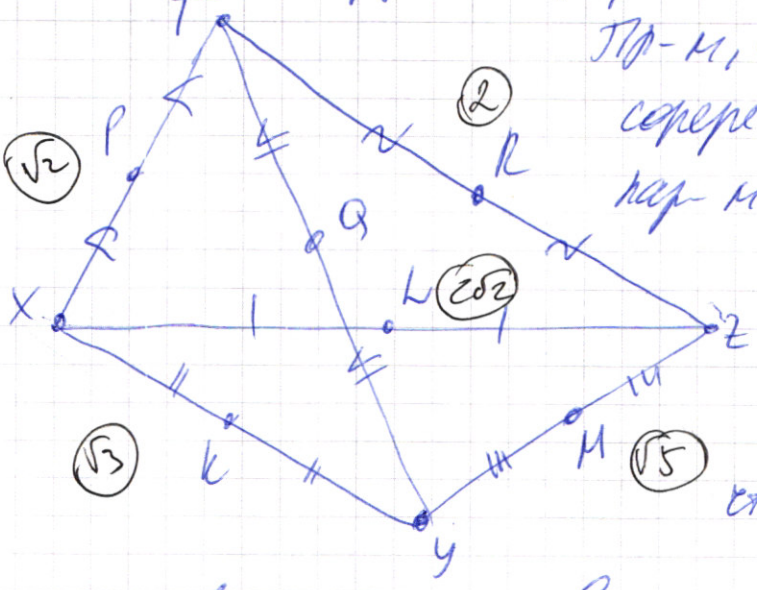
т.е. окр-ти $PRMK$ и $YKLM$ пересекаются (по MK) $\Rightarrow$ через них можно провести сферу (св-во).

~~Но через точку Q не проходит!, т.к.~~

~~$XR^2 +$ иначе бы~~

~~принадлежность точки Q к (не) (предположение).~~

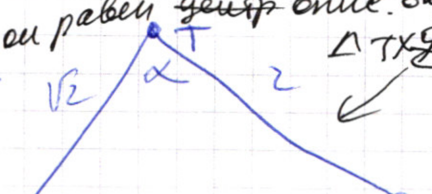
~~проверить корректность сферы чего.~~



Пр-м, что Q лежит на сфере. Тогда $PQLM$ – впис. пар-м $\Rightarrow$ аналогично ребро $TZ \perp XY$, но ~~ТУ~~ $TY \perp XZ$ по постр. $\Rightarrow$ $TYZ \perp$ ~~...~~ XYZ, что неверно, т.к. $TXY \perp XYZ$.

т.е. условие задачи выполнено.

А ~~радиус~~ минимум радиус найти невозможно; $\leftarrow$ напомним, что он равен рад. ~~центр~~ опис. окр ΔTXZ



По Th косинусов:

$8 = 2+4-2\sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = -2\sqrt{2}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ по Th синусов $\underset{2R\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2R\sin\alpha} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{R=2}$ ответ

Ответ: 1) $XZ = 2\sqrt{2}$, 2) $R_{min} = 2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

МФТИ

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $f(ab)=f(a)+f(b)$

~~Заметим, что~~ Подставим $a=b=1$:

$$f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow \boxed{f(1)=0}$$

Тогда $f(a)+f(\frac{1}{a})=f(a\cdot\frac{1}{a})=f(1)=0$ (*)

Вычислим $f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=$

$\overset{(*)}{=} f(x)-f(y)$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$

т.е. $f(\frac{x}{y})<0 \Leftrightarrow \boxed{f(x)<f(y)}$

Выпишем все простые от ~~...~~ от 2 до 28:

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

Тогда, если $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}$ – разл. на простые, то $f(n)=\sum\alpha_i f(p_i)$

Заметим, что числа от 5, ... не могут входить два раза в разл. чисел от 4 до 28, т.к. иначе $x\geq 5\cdot 7=35>28$,

т.е. $f(x)\leq 5$ $\forall x\in[4;28], x\in\mathbb{N}$.

1) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2^\alpha 3^\beta$ ~~чисел~~

~~это числа 4, 8, 16, 3, 9, 27, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18~~

~~4, 6,~~ 4, 8, 16, 9, 27, 6,

$n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(n)=\alpha_1 f(p_1)+\ldots+\alpha_n f(p_n)$

n	$f(n)$
$2^2=4$	0
5	1
$2\cdot3=6$	0
7	1

n	$f(n)$
$2^3=8$	0
$3\cdot3=9$	0
$2\cdot5=10$	1
11	2

n	$f(n)$
$2^2\cdot3=12$	0
13	3
$2\cdot7=14$	1

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

n	f(n)
$3\cdot 5 = 15$	1
$16 = 2^4$	0
17	4
$18 = 3^2\cdot 2$	0

n	f(n)
19	4
$2^2\cdot 5 = 20$	1
$3\cdot 7 = 21$	1
$2\cdot 11 = 22$	2

n	f(n)
23	5
$8 = 2^3\cdot 3 = 24$	0
$25 = 5^2$	2

n	f(n)
$2\cdot 13 = 26$	3
$3^3 = 27$	0
$28 = 2^2\cdot 7$	1

Итог:

$f(x)=0$ 9 чисел

$f(x)=1$ 8 чисел

$f(x)=2$ 3 числа

$f(x)=3$ 2 числа

$f(x)=4$ 2 числа

$f(x)=5$ 1 число

Всего пар (x,y) при $f(x) < f(y)$:

$$S = 9(\underbrace{\overbrace{8+3}^{11}+\overbrace{2+2+1}^{5}}_{16}) + 8(\underbrace{3+\overbrace{2+2+1}^{5}}_{8}) + 3(\overbrace{2+2+1}^{5})$$

$$+2(\underbrace{2+1}_{3}) + 2\cdot 1 = 9\cdot 16 + 8\cdot 8 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 2 =$$

$$= 9\cdot 16 + 64 + 15 + 6 + 2 = 9\cdot 16 + 70 + 17 =$$

$$= 9\cdot 16 + 87 = 90 + 54 + 87 =$$

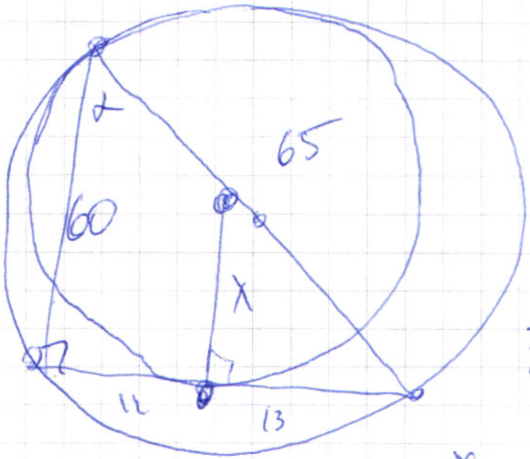
$$= \cancel{134}\ 144 + 87 = 144 + 80 + 7 = 224 + 7 = 231$$

Ответ: 231 пара.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$1+tg^2\alpha = 1+\frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$

$\frac{\cancel{3}\cdot 25}{\cancel{9}\cdot 3} - \frac{10}{3} - 5 \qquad \frac{15}{3} - 5 = 0$ Ok.



$\cos\alpha = \frac{12}{13}$

$\sin\alpha = 5/13$

$\frac{5}{13}x = 25\ 5$

$x = 13\cdot 5 = 65.$

$\frac{x}{60} = \frac{13}{25}$

$x = \frac{\overset{12}{\cancel{60}}\cdot 13}{\cancel{25}\,5} = \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

$f(x)=0$ 9

$=1$ 8

$=2$ 3

$=3$ 2

$=4$ 2

$=5$ 1

$\underbrace{9+8}_{17}+\underbrace{3+5}_{8} \qquad 27+8=25$

$28-4+1=24+1=25.$

$9(\overbrace{8+3}^{11}+\overbrace{2+2+1}^{5})+8(3+\overbrace{2+2+1}^{5})+3(2+2+1)$

$+2(2+1)+2\cdot 1 \qquad 208+23$

$\underbrace{9\cdot 16}_{144}+\underbrace{8\cdot 8}_{64}+\overbrace{3\cdot 5}^{15}+\overbrace{2\cdot 3+2}^{8}$

$144 \qquad 144+64+8+15 \qquad 228+3=$

$=231$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \quad x\in\left(\frac{2}{3};2\right]$$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq 18x^2-51x+28$$

$8-6x=(3x-2)(18x^2-51x+28)$ есть корень!

$8-6x=54x^3-153x^2+84x-36x^2-102x-56$

$$\frac{8-6x}{3x-2} = 18x^2-51x+28 \quad x\in\left(\frac{2}{3};2\right].$$

$x=2$
$y=1{,}5$

$x\in\left(\frac{2}{3};2\right]$

$$\frac{8-6\cdot1{,}5}{4{,}5-2} = -\frac{1}{2{,}5} = -\frac{10}{25}$$

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b.$$

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq 18x^2-51x+28$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$u=y-6$
$v=x-1$

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$$

$u-6v=\sqrt{uv}$ 45

$9v^2+u^2=45+9+36=90.$

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$$

3

$15-12=\sqrt{30-12-15+6}$

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq 18x^2-51x+28$$

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$$

$36-27=9.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$x^2-26x \neq 0$

$26x-x^2>0$ $\quad x(26-x)>0$

$x\in(0;26)$ $\quad t=26x-x^2$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$t^{\log_5 12} \geq -t+13^{\log_5 \cancel{(26x-x^2)}\, t}$

$t^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 t}-t$ $\quad t\in(0;25)$.

$t^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 13}-t$ $\quad t\in(-\infty;5^2)=$

$f(t)=t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t$ $\quad =t(-\infty;5^2)$

$f'=\log_5 12\, t^{\log_5\frac{12}{5}}-\log_5 13\, t^{\log_5\frac{13}{5}}+1$

$u=\log_5 t$ $\quad 12^u-13^u+5^u\geq 0.$

$f(u)$ $\quad \log_5 t\leq 2$

$f'(u)=(12^u-13^u+5^u)' \geq 0$ $\quad 5^2+12^2=13^2$

$12^4+5^4\geq 13^4$

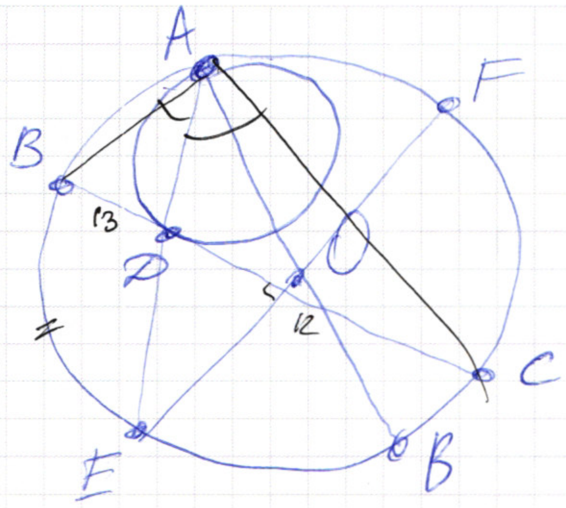
$\alpha=\arcsin\frac{5}{13}$ $\quad \left(\frac{5}{13}\right)^4+\left(\frac{12}{13}\right)^4\geq 1$

$u>2$ $\quad (\cos\alpha)^4+(\sin\alpha)^4\geq 1$

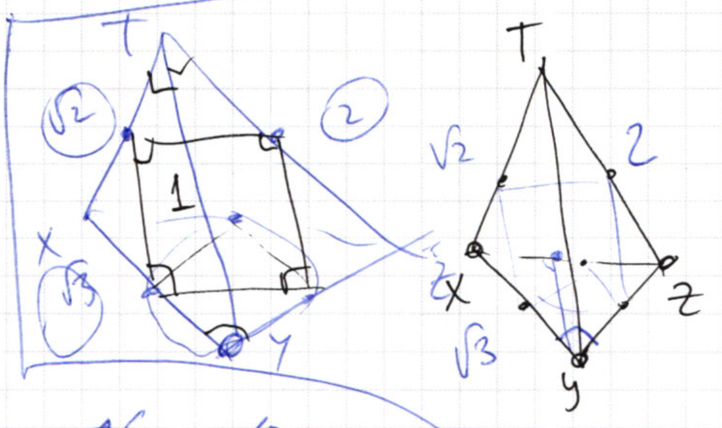
беда $\quad u\leq 2$ $\quad (\cos\alpha)^4+(\sin\alpha)^4\geq 1$

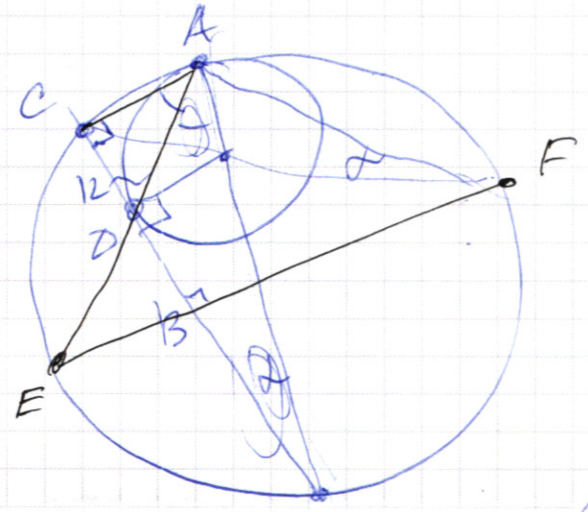
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$r_\omega,\ r_\Omega,\ S_{AEF},\ \angle AFE$ (?)





$\frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$ $TY \perp XZ$

$\parallel$

$\cos\angle CAB$ CAB

$\cancel{\Rightarrow \sin} \Rightarrow \sin\angle \cancel{ACB} = \frac{5}{13}$

$\Rightarrow \frac{5}{13}\cdot AB = \cancel{25}\ 65$

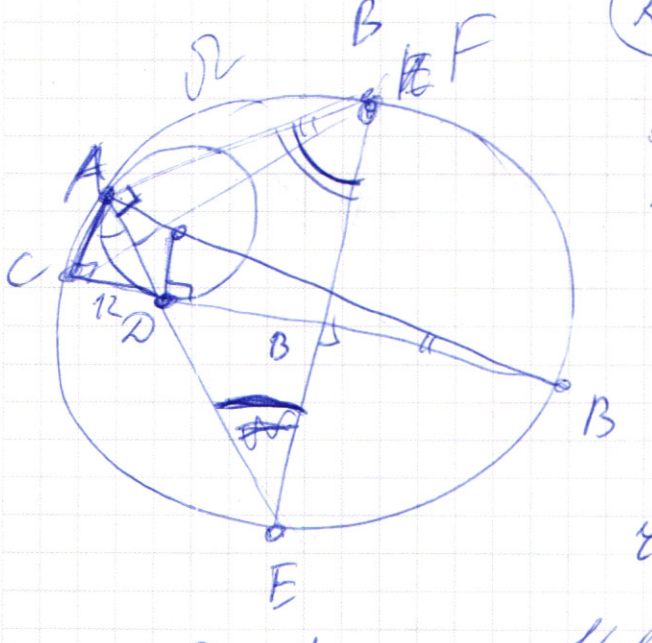
$AB = 85$

$R = \frac{85}{2}$

$4 \le x \le 28$

$4 \le y \le 28$

$f(x/y) < 0.$



$\cancel{90 - \frac{a}{a}}$

$\cancel{\angle AFE =}$

$\frac{r}{R} = \frac{AO}{AE}$ $144 + ..$ 156

$\frac{r}{AC} = \frac{13}{25}$

$r = \frac{13}{25}\cdot AC = \frac{\cancel{13}}{25}\cdot\frac{12}{\cancel{13}}\cdot \cancel{21}\ \overset{65}{\cancel{85}}$

$\cancel{f(ab) = f(a) + f(b)}\ \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} AF\cdot AE$

$f: \mathbb{Q}^+ \to$ $f(p) = [p/4]$ для простого p.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin x+\sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta +$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}} = 2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos\left(-\frac{4\beta}{2}\right)$$

$\alpha=30^\circ$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$2\cdot\frac{3}{4}-1$

$$\cos(\cancel{4\beta}-2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}\\ \sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$$

$\cancel{\sin\beta} \quad \frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}} \pm \cos 2\alpha\frac{4}{\cancel{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}$$

$\cos\alpha \neq 0$

$$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha \pm 4(2\cos^2\alpha-1) = -1$$

$$2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm 4\left(2-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = -\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$2\operatorname{tg}\alpha \pm 4(2-(1+\operatorname{tg}^2\alpha)) = -(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$$

$+$:

$$2\operatorname{tg}\alpha \pm \cancel{8}4(\cancel{2}\,1-\operatorname{tg}^2\alpha) = -1+\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$2\operatorname{tg}\alpha \cancel{\pm} + 4 - \operatorname{tg}^2\alpha = -1+\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha + 5 = 0$$ нет реш.?

$\cancel{D=4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = ?}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$ $(x-1)(y-6)$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$ $u = x-1$

$9x^2+y^2-18x-12y=45 +9+36=90$ $v = y-6$

$\cancel{u-6v}$ $u-6v=\sqrt{uv}$ $x-1=$

$\cancel{(9x^2-18x+9)}+$ $y-6$

$\begin{cases} 9v^2+u^2=90 \\ u-6v=\sqrt{uv} \end{cases}$ $\begin{cases} 9v^2+u^2=90 \\ u^2-12uv+36v^2=uv \end{cases}$

$9v^2+u^2=90$

$u^2+36v^2=13uv$ $u^2-13uv+36v^2=0.$

$\left[\begin{array}{l} u=9v \\ v=4 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} u=9v \\ u=4v \end{array}\right.$

$9v^2+(4v)^2=90$

$25v^2=90$ 1) $v=\pm\frac{\sqrt{90}}{5}$ 2) $v=\pm 1$

$u=\pm\frac{\sqrt{90}\cdot 4}{5}$ $9v^2+81v^2=90$

$u=\pm 9$

$\beta = x$ $\alpha = x$

$\sin x+\sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~8-6x~~ $a, b > 0$ $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ $\forall p$ - простое

$4 \le x \le 28$
$4 \le y \le 28$, $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$. $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,$

$f(1) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$ $f(1) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) = const = c$

$f(x) =$ $f(1) = f(1) + f(1) = 0$

$\alpha = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

~~4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,~~

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28

	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$	0	0	1	2	2	3	4	4	5

$\frac{8-6x}{3x-2} = 18x^2 - 51x + 28$

$x = 2$

$\frac{8-12}{6-2}$

$f(x) = 0$ $2^\alpha \cdot 3^\beta$ 4, 8, 16, 39

Заметим, что раз числа из 5, 7, ...
не могут входить в α, т.к. тогда $\alpha > 28$
$\beta \le 4$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2^\alpha \cdot 3^\beta$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$

$x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

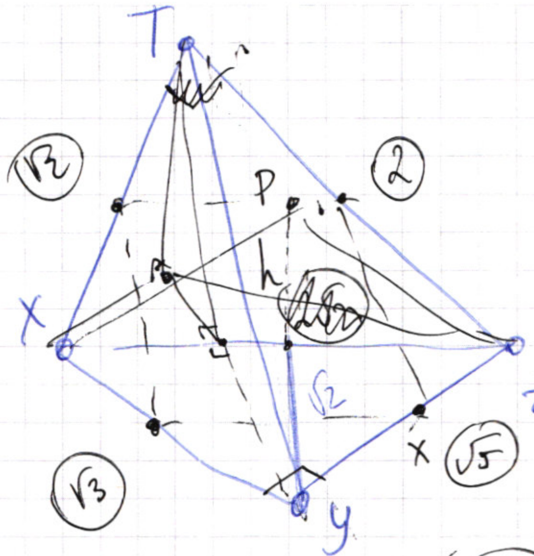
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2^2-\sqrt{2}=3$

$(\sqrt{3})^2-x^2=(\sqrt{2})^2-2^2$

$3-x^2=2-4$

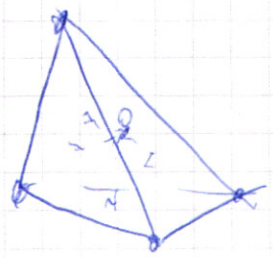
$x^2=3-2+4=7-2=5$

$x=\sqrt{5}$

$xz^2=3+5=8$

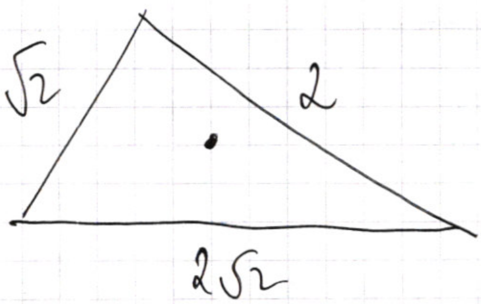
$xz=2\sqrt{2}$

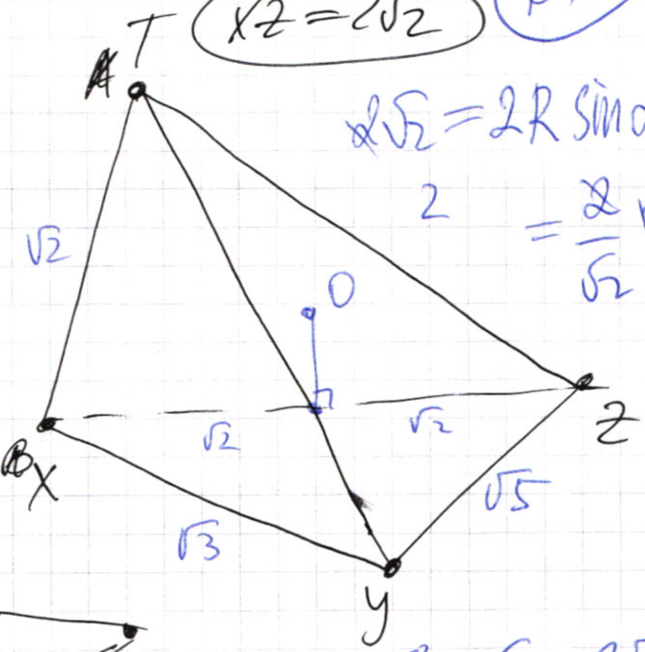
$R>1,2$



$4+2=6$?

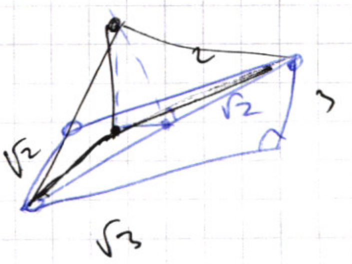
$\cancel{7,\sqrt{2}}$

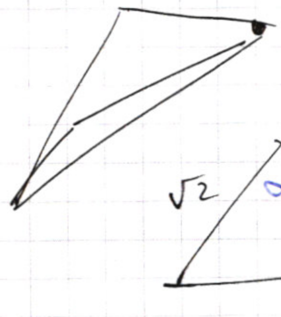


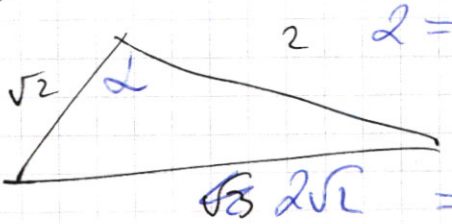


$2\sqrt{2}=2R\sin\alpha=$

$2=\frac{2}{\sqrt{2}}R$







$8=6-2\sqrt{2}\cos\alpha$

$2=-2\sqrt{2}\cos\alpha$

$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cancel{3=2+4-2\sqrt{2}\cos\alpha}$

$\cancel{2\sqrt{2}\cos\alpha=3}$

$\cancel{\cos\alpha=\frac{3}{2\sqrt{2}}}$

$\cancel{\sin^2\alpha=1-}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)