МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg}\dfrac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 2.

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leq \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$$

$$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \leq -3\log_{9x^3} x$$

$$\sqrt{\log_{3x^2} x} \leq -\log_{9x^3} x$$

$$\begin{cases} \log_{3x^2} x \geq 0 & (1) \\ -\log_{9x^3} x \geq 0 & (2) \\ \log_{3x^2} x \leq \log^2_{9x^3} x & (3) \end{cases}$$

$x > 0$ - ОДЗ.

① $\log_{3x^2} x = \dfrac{1}{\log_x 3x^2} =$

$= \dfrac{1}{\log_x 3 + 2} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x 3 + 2 > 0$

$\log_x 3 > -2 = \log_x x^{-2}$

$(x-1)(3 - x^{-2}) > 0$

н.ф. $x = 1$

$x^{-2} = 3$

$\Downarrow$

$x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$+ \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \quad - \quad 1 \quad +$

$\begin{cases} x \in (-\infty; \sqrt{\frac{1}{3}}) \cup (1; +\infty) \\ x > 0 \end{cases}$

② $\log_{9x^3} x \leq 0$

$\dfrac{1}{\log_x 9 + 3} = \dfrac{1}{2\log_x 3 + 3} \leq 0$

$2\log_x 3 < -3$

$\log_x 3 < -\frac{3}{2} = \log_x x^{-\frac{3}{2}}$

$(x-1)(3 - x^{-\frac{3}{2}}) < 0$

н.ф. $x=1$

$x^{-\frac{3}{2}} = 3 \Rightarrow x = 3^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

$+ \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \quad - \quad 1 \quad +$

$x \in (\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; 1)$

③

$\dfrac{1}{\log_x 3 + 2} \leq \dfrac{1}{(2\log_x 3 + 3)^2}$

$\log_x 3 + 2 \geq 4\log_x^2 3 + 12\log_x 3 + 9$

$4\log_x^2 3 + 11\log_x 3 + 7 \leq 0$

$4 - 11 + 7 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_x 3 = -1 \\ \log_x 3 = -\frac{7}{4} \end{array}\right.$

$-\frac{7}{4} \qquad -1$

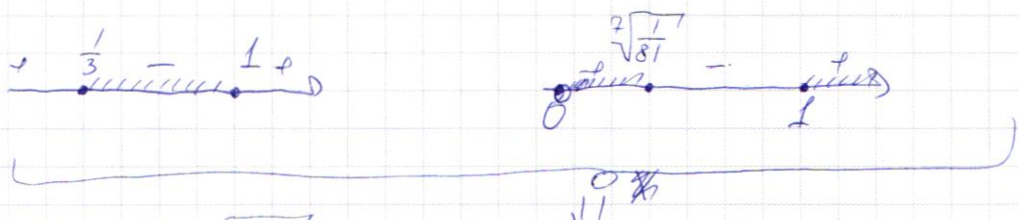
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \log_x 3 \le -1 = \log_x \frac{1}{x} & (1) \\ \log_x 3 \ge -\frac{7}{4} = \log_x x^{-\frac{7}{4}} & (2) \end{cases}$$

1) $(x-1)\left(3-\frac{1}{x}\right) \le 0$ 2) $(x-1)\left(3-x^{-\frac{7}{4}}\right) \ge 0$



т.к. $\frac{1}{3} < \sqrt[7]{\frac{1}{81}}$

$\frac{1}{3^7} < \frac{1}{81}$ $\Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}; \sqrt[7]{\frac{1}{81}}\right] \cup \{1\}$

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{3}; \sqrt[7]{\frac{1}{81}}\right] \cup \{1\} \\ x \in \left(0; \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \\ x \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; 1\right) \end{cases}$$

$\cdot)$ $\sqrt{\frac{1}{3}} \; ? \; \sqrt[7]{\frac{1}{81}}$

$\cancel{\frac{1}{3}}$ $\cancel{\frac{1}{9^{\frac{1}{7}}}} = 3^{\frac{8}{7}}$

$3^{-\frac{1}{2}}$ $3^{-\frac{4}{7}}$

$3 < 3^{\frac{8}{7}} =$

$\cdot)$ $\sqrt{\frac{1}{3}} > \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

$3^{-\frac{1}{2}}$ $3^{-\frac{2}{3}}$

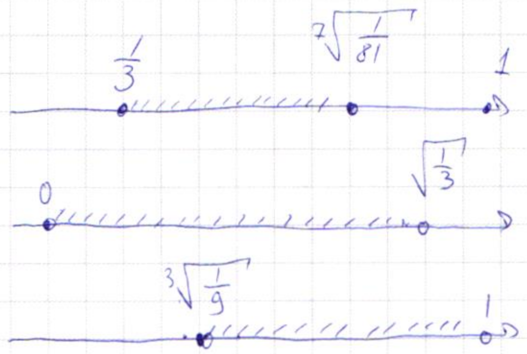
$3^{+1} < 3^{\frac{4}{3}}$

$\cdot)$ $\frac{1}{3} < \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}$

$\cdot)$ $\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} < \frac{1}{3^{\frac{4}{7}}}$

$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{7}$

$\frac{14}{21} > \frac{12}{21}$



$\Downarrow$

$x \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; \sqrt[7]{\frac{1}{81}}\right]$

но мы не учли, если изнач. логарифмы $= 0$, т.е.

$\log_{3x^2} x^9 = 0 \Rightarrow x^9 = 1 \Rightarrow x = 1$

$\log_{9x^3} \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} = 1 \Rightarrow x = 1$ все сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ответ: $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; \sqrt[7]{\frac{1}{81}}\right] \cup \{1\}$

Задача 3. т.е. $10^k, 10^{k+1}, 10^{k+2}$ 12828

Рассмотрим $k=4$:

т.е. сумма ост. от $10^4, 10^5, 10^6$

$\underline{\quad f, e, d, c, b, a,}$ это значит, что мы складываем числа $\overline{fedcba}+\overline{edcba}+\overline{dcba}$, т.к. $\overline{fedcba}\geq 100000$, при $f\neq 0$, то сумма также больше этого числа $\Rightarrow$ не м/б $=12828 \Rightarrow$

$\Rightarrow f=0 \Rightarrow 2\overline{edcba}+\overline{dcba}=12828$

$20000e+2000d+200c+20b+2a+1000d+100c+10b+a=12828$

при $e\neq 0$ $20000e>12828 \Rightarrow e=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3000d+300c+30b+3a=12828$

$1000d+100c+10b+a=4276$

$\Rightarrow d=4,\ c=2,\ b=7,\ a=6$

* при $d<4$, $100c+10b+a>1000$, но $100c+10b+a\leq 999$ (т.к. эт. цифры)

при $d>4$ очевидно. $\Rightarrow$ число $\underline{\quad 0, 0, 4, 2, 7, 6,}$ $\Rightarrow$ неизвестна только первая цифра, поставить ее 9 вариантов $\Rightarrow$ 9 чисел.

при $k>4$ остаток от деления на 10^{k+2} это будет само 7знач. число, что уже >12828.

Рассмотрим $k=3$: $10^3, 10^4, 10^5 \Rightarrow$

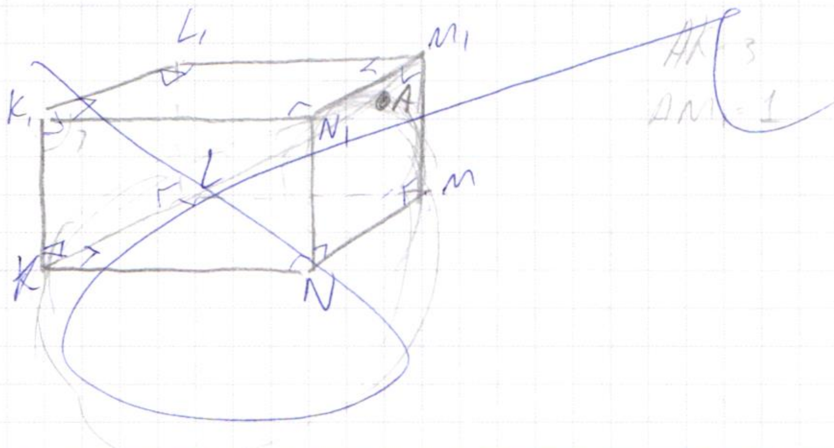
$\Rightarrow 12828=\overline{cba}+\overline{dcba}+\overline{edcba}=3(a+10b+100c)+2000d+10000e.$

при $e>2$ ~~число~~ сумма будет больше 12828 $\Rightarrow e=1;0$

$e=1$:	$e=0$:
$\Rightarrow \underbrace{3(a+10b+100c)}_{\vdots 3}+2000d=2828\underset{3}{\equiv}2$	$\underbrace{3(a+10b+100c)}_{\vdots 3}+2000d=12828\underset{3}{\equiv}0$
$\Rightarrow 2000d\underset{3}{\equiv}2 \Rightarrow d\underset{3}{\equiv}1 \Rightarrow d=1$	$\Rightarrow 2000d\underset{3}{\equiv}0 \Rightarrow d\underset{3}{\equiv}0 \Rightarrow d=3;6;9$
~~(при до~~ при $d>1$, сумма >2828	при $d=9$ число слишком большое
$3(a+10b+100c)=828$	при $d=3$ число слишком маленькое, т.к. max знач. $3(a+10b+100c)=3\cdot 999<3000$
$a+10b+100c=276 \Rightarrow c=2, b=7, a=6$	$\Rightarrow d=6 \Rightarrow 3(a+10b+100c)=828 \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Задача 6 Продолж.

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{11x}{4}-\frac{19}{8}\cdot\frac{3}{2}-4=0$$

$$-2x^2-22x-\frac{19\cdot\cancel{12}^{3}}{2}-4=0$$

$$\cancel{4x^2+44x+6\cdot19+4=0}$$

$$D=22^2-$$

$$2x^2+22x+\frac{19\cdot3}{2}+4=0$$

$$D=121-2\left(\frac{19\cdot3}{2}+4\right)=121-19\cdot3-8=56.$$

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{56}}{2}$$

$$\frac{-11+\sqrt{56}}{2}<-\frac{3}{2}$$

$$-11+\sqrt{56}<-3$$

$$\sqrt{56}<8$$

$$56<64$$

$\Rightarrow$ такая прямая пересекается с гиперболой, чего не м/б

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.е. при $k=3$ возможны случаи:

$\_\ \_\ 1, 1, 2, 7, 6$ $\qquad$ $\_\ \_\ 0, 6, 2, 7, 6$

в обоих случаях не определены первые 2 цифры, способов их определить в каждом: $9 \cdot 10 = 90$

$\Rightarrow$ всего $90 \cdot 2 = 180$ чисел.

при $k \leq 2$ $\quad 10^{k+2} \leq 10^4 \Rightarrow$ ~~max число в сумме остатков =~~

~~= $\overline{dcba} \leq 9999 \Rightarrow$ остальная сумма~~

$\overline{dcba} + \overline{cba} + \overline{ba} = 12828$

$1000d + 200c + 30b + 3a = 12828$

$d_{max} = 9 \Rightarrow 200c + 30b + 3a \geq 2829$

$c_{max} = 9 \Rightarrow 30b + 3a \geq 1029$

$b_{max} = 9 \Rightarrow 3a \geq 789$ – не м/б $\Rightarrow k > 2$

Ответ: $180 + 9 = 189$ чисел.

Задача 6.

$$\frac{12x+26}{2x+3} \leq ax+b \leq 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2} \qquad \left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right]$$

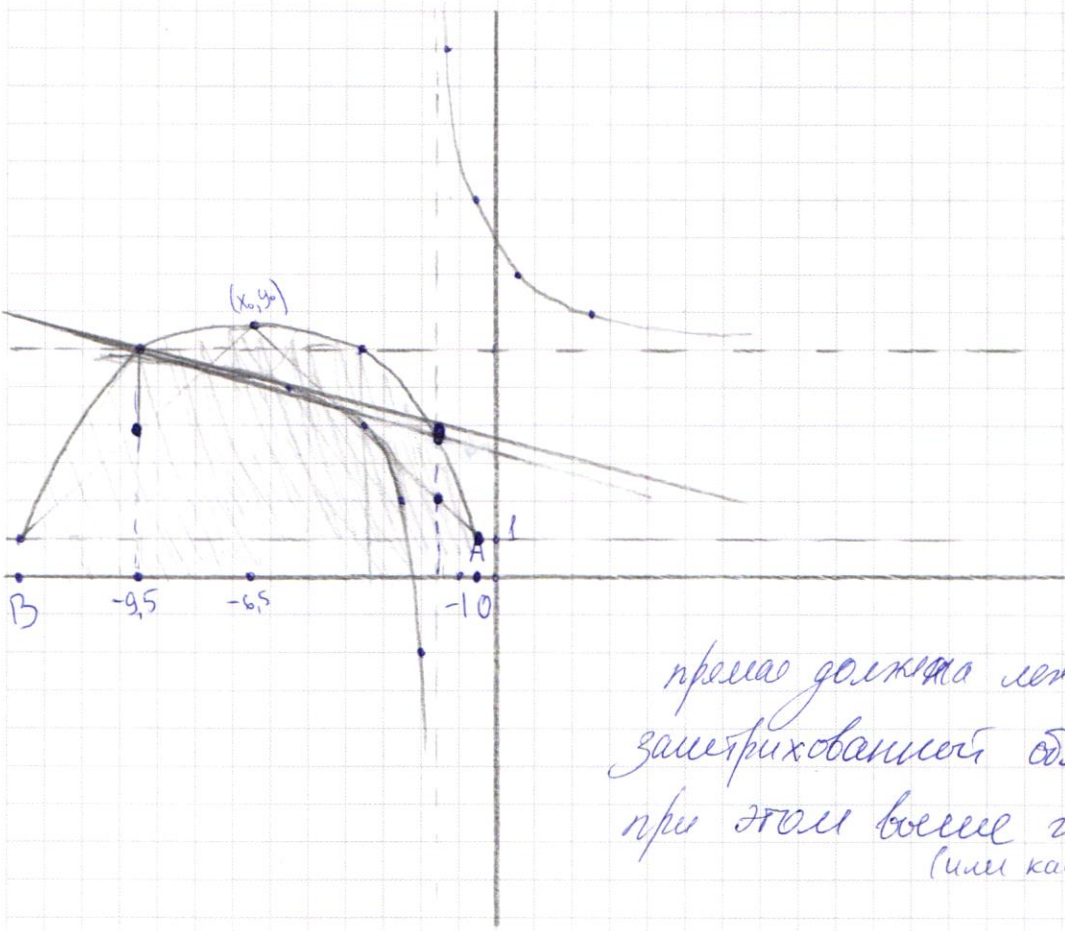
1) $y = \frac{12x+26}{2x+3} = 6 + \frac{8}{2(x+\frac{3}{2})}$

гипербола $y = \frac{4}{x}$ с осями $\uparrow 6$ ед. $\leftarrow \frac{3}{2}$ ед.

2) $ax+b$ – прямая

3) $y = 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$ $\qquad x^2 + 13x + \frac{33}{4} \leq 0$ $\qquad \frac{-13-\sqrt{139}}{2}$ $\quad \frac{-13+\sqrt{139}}{2}$

$x = \frac{-13 \pm \sqrt{139}}{2}$ $\qquad x_0 = -\frac{13}{2}$



прямая должна лежать в заштрихованной области, но при этом выше гиперболы. (или касаться)

т. $A = \frac{-13+\sqrt{139}}{2}$

при $x_0 = -6{,}5$: $y = 1+\sqrt{-\frac{33}{4}+13\cdot 6{,}5-6{,}5^2} = 1+\sqrt{34}$

т. $B = \frac{-13-\sqrt{139}}{2}$

$x = -3{,}5$: $6 + \frac{8}{-2\cdot 3{,}5+3} = 6 - \frac{8}{4} = 4.$

$1+\sqrt{-\frac{33}{4}+13\cdot 3{,}5-3{,}5^2} = 1+\sqrt{-8{,}25+33{,}25} =$

$= 1+\sqrt{25} = 6$

$1+\sqrt{-8{,}25+17{,}25} = 1+3 = 4$

$-9{,}5a + b = 6 \Rightarrow b = 6+9{,}5a$

$-1{,}5a + b = 4$

$-1{,}5a + 6 + 9{,}5a = 4$

$8a = -2$

$a = -0{,}25 \Rightarrow b = 6 - 9{,}5\cdot 0{,}25 = 3{,}625$

$\cancel{3{,}625a}$ $-0{,}25x + 3{,}625 = 6 + \frac{4}{x+1{,}5}$

$(x+1{,}5)(-0{,}25x) = 2{,}375(x+1{,}5) + 4$

$-0{,}25x^2 - 2{,}75x - 2{,}375\cdot 1{,}5 - 4 = 0.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92$$

$$y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124$$

$13x = t$

$$\left.\begin{aligned} t + \sqrt[3]{(t-y)(t+y)} &= 92 \\ y + \sqrt[3]{(t-y)(t+y)} &= -124 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 92 - t = -124 - y$$

$$t - y = 216 \Rightarrow t = 216 + y$$

$$216 + y + 6\sqrt[3]{216 + 2y} = 92$$

$$6\sqrt[3]{216 + 2y} = -124 - y$$

$$216(216 + 2y) = -124^3 - 3y \cdot 124^2 - 3y^2 \cdot 124 - \cancel{124}\, y^3$$

$$y^3 + 3y^2 \cdot 124 + y(2 \cdot 216 + 3 \cdot 124^2) + 216^2 + 124^3 = 0.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$13x+\sqrt[3]{169x^2-y^2}=92$

$y+\sqrt[3]{169x^2-y^2}=-124$

$13x=t \qquad t+\sqrt[3]{(t-y)(t+y)}=92$

$y+\sqrt[3]{(t-y)(t+y)}=-124$

$36\cdot 6=216$

$92-t=-124-y$

$t-y=92+124=216 \qquad t=216+y$

$124|2,\ 62|2,\ 31|31$

$y+6\sqrt[3]{t+y}=-124$

$\sqrt[3]{t+y}=\frac{-124-y}{6}$

$\sqrt[3]{216+2y}=\frac{-124-y}{6}$

$216-92=124$

$216+2y=\frac{(-124-y)^3}{216}$

$216^2+2\cdot216\cdot y=-(124^3+3\cdot124^2y+3y^2\cdot124+y^3)$

$y^3+3\cdot124\cdot y^2+y(2\cdot216+3\cdot124^2)+216^2+124^3=0$

~~$216+y+6\sqrt[3]{216+2y}=92$~~

~~$6\sqrt[3]{216+2y}=-72$~~

$216-92=124$

$-1+3\cdot124-2\cdot216-3\cdot124^2+216^2+124^3=$

$=124(3-3\cdot124+124^2)-216(2-216)-1=$

$=124(3-124(3-124))+216\cdot214-1=$

$=\cancel{124(3+124\cdot121)}$

$y^3+3y^2\cdot12y+$

$62(-2\cdot62+3)$

$-8+12\cdot124-2(2\cdot216+3\cdot124^2)+216^2+124^2=0$

$-2+3\cdot124-216-3\cdot124\cdot62+108^2+62^2=0$

$-1+3\cdot62-108-3\cdot62^2+108^2+62^2=-2\cdot62^2-108(1-108)+3\cdot62-1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(2) $\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$

$\sqrt{f(x)} \le g(x)$

$\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \le g(x)^2 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \le -3 \log_{9x^3} x$

$\sqrt{\log_{3x^2} x} \le -\log_{9x^3} x$

$\frac{1}{\log_x 3x^2} = \frac{1}{\log_x 3 + 2}$

$\log_{9x^3} x = \frac{1}{\log_x 9 + 3} = \frac{1}{2\log_x 3 + 3}$

$\sqrt{\frac{1}{\log_x 3 + 2}} \le -\frac{1}{2\log_x 3 + 3}$

$\begin{cases} -\frac{1}{2\log_x 3 + 3} \ge 0 \\ \frac{1}{\log_x 3 + 2} \ge 0 \\ \frac{1}{\log_x 3 + 2} \le \frac{1}{(2\log_x 3 + 3)^2} \end{cases}$

1) $\frac{1}{2\log_x 3 + 3} \le 0$

$2\log_x 3 + 3 \le 0$

$2\log_x 3 \le -3$

$\log_x 3 \le -\frac{3}{2} = \log_x x^{-\frac{3}{2}}$

при $x \in (1; +\infty)$:

$3 \le x^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{x^3}}$

$9 \le \frac{1}{x^3}$

$x^3 \le \frac{1}{9}$

$x \le \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ – не м/б

при $x \in (0; 1)$:

$3 \ge x^{-\frac{3}{2}}$

$9 \ge x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

$x^3 \ge \frac{1}{9}$

$x \ge \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

$x \in [\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; 1)$

1) $\frac{1}{\log_x 3 + 2} \ge 0$

$\log_x 3 + 2 > 0$

$\log_x 3 > -2 = \log_x x^{-2}$

$x \in (1; +\infty)$:

$3 > \frac{1}{x^2}$

$x > \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x \in (1; +\infty)$

$x \in (0; 1)$:

$3 < x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$x^2 < \frac{1}{3}$

$x < \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x \in (0; \sqrt{\frac{1}{3}})$

$x^{-2} = 3$

$x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$(x-1)(3 - x^{-2}) \ge 0$

$+ \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \quad - \quad 1 \quad +$

Черновые вычисления:

$0{,}25 \cdot 1{,}5 = 0{,}375$; $0{,}375 + 2{,}375 = 2{,}750$

$2{,}375$; $\frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$; $\frac{3}{8} + 2 = \frac{19}{8}$

$19 \cdot 6 = 114$; $19 \cdot 3 = 57$

$13 \cdot 1{,}5 = 19{,}5$; $19{,}50 - 2{,}25 = 17{,}25$

$2{,}25 \cdot 2 = 4{,}5$; $9{,}5 \cdot 0{,}25 = 2{,}375$

$121 - 65 = 56$

$6{,}000 - 2{,}375 = 3{,}625$

$\frac{1}{9} = \frac{3}{27}$

$a^{\log_a 6} = 6$; $a^{-\frac{3}{2}} = 6$; $\log_x x^{-\frac{3}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

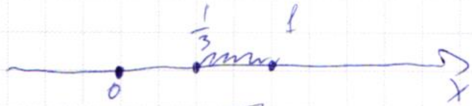
$$\frac{1}{\log_x 3+2} \leq \frac{1}{(2\log_x 3+3)^2}$$

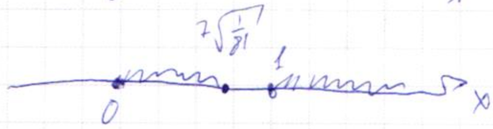
$$\log_x 3+2 \geq \cancel{2t}\ 4\log_x^2 3 + 12\log_x 3+9$$

$$4\log_x^2 3 + 11\log_x 3 + 7 \leq 0$$

$$D = 121 - 16\cdot 7 = 121-112 = 9.$$

$$\log_x 3 = \frac{-11\pm 3}{8} = -1;\ -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$$



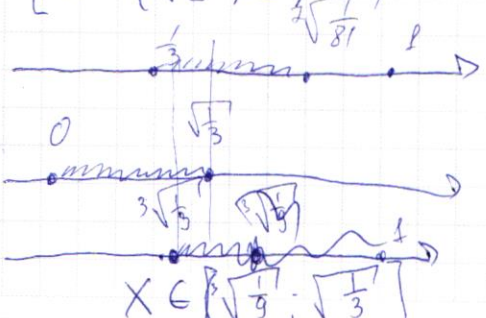


$\frac{1}{3}$ $\sqrt[7]{\frac{1}{81}}$

X

$$\frac{1}{3^7} < \frac{1}{81}$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in \left[\frac{1}{3};\ \sqrt[7]{\frac{1}{81}}\right] \vee \{1\} \\ x \in \left(0;\ \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \\ x \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}};\ 1\right) \end{array}\right.$$



$$x \in \left[\sqrt[3]{\frac{1}{9}};\ \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$$

$$\log_x 3 \leq -1 = \log_x \frac{1}{x}$$

$x \in (1; +\infty)$:

$$3 \leq \frac{1}{x}$$

$$x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \varnothing$$

$x \in (0; 1)$:

$$3 \geq \frac{1}{x} \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$$

$$\log_x 3 \geq -\frac{7}{4} = \log_x x^{-\frac{7}{4}}$$

$x \in [1; +\infty)$:

$$3 \geq x^{-\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{x^7}}$$

$$81 \geq \frac{1}{x^7}$$

$$x^7 \geq \frac{1}{81} \Rightarrow x \geq \sqrt[7]{\frac{1}{81}}$$

$$x \in [1; +\infty)$$

$x \in (0; 1)$:

$$3 \leq \sqrt[4]{\frac{1}{x^7}}$$

$$81 \leq \frac{1}{x^7} \quad x^7 \leq \frac{1}{81} \Rightarrow x \in \left(0; \sqrt[7]{\frac{1}{81}}\right)$$

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{9} \ ? \ \frac{1}{81^{\frac{3}{7}}} = 9^{\frac{6}{7}} \qquad \frac{1}{3} > \frac{1}{9^{\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{1}{9^4} \qquad \frac{1}{(81^{\frac{1}{7}})^3} \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{9}} < \sqrt[7]{\frac{1}{81}} \qquad \frac{1}{3}\ \ \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{1}{27} < \frac{1}{9}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(3)

7знач.

$\sum$ остат. от деления на 10^k, 10^{k+1}, 10^{k+2} $= 12828$

$k+2$ max $5 \Rightarrow k$ max 3

без 0 в числе:

·) 10^3 10^4 10^5

_ _ _ e _ d _ c _ b _ a

$(a+10b+100c)3+1000d\cdot 2+10000e = 12828$ | 3

3⋮1 — 2d; 3⋮1 — e

4276 | 2

2138 | 2

1069

$e=1;0$

$e=1:$ $(a+10b+100c)3+1000d\cdot 2 = 2828$

$2d \equiv_3 2$ ~~d<2~~

$d \equiv_3 1$

$d=0,1,2 \Rightarrow d=1 \Rightarrow (a+10b+100c)3=828$

$a+10b+100c=276$

$c=2;\ b=7;\ a=6.$

12828 − 9999 = 2829

2829 − 1800 = 1029

1029 − 270 = 759

при $e=1$ и $k=3$

9, 10 (1, 1, 2, 7, 6) = ~~90~~ 90 чисел

$e=0:$ $2000d+3(a+10b+100c)=12828$

$2d \equiv_3 0 \Rightarrow d=3;6,9$

$d=6:$ $3(a+10b+100c)=828$

$a+10b+100c=276$

9·10 (0, 6, 2, 7, 6) = 90

$d=9:$ $3(a+10b+100c)=6828$

$a+10b+100c=2276$ - не м/б

если $k\geq 3$ 10^4 10^5 10^6

_ 0 e d c b a

9 (0, 0, 4, 2, 7, 6) = 9в.

$2(100000e+1000d+100c+10b+a)+1000d+100c+10b+a=12828$

$200000e \Rightarrow e=0.$ $3000d+300c+30b+3a=12828$

$1000d+100c+10b+a=4276$

$d=4:$ $d=4,\ c=2,\ b=7,\ a=6$

$d=3 \Rightarrow$ ~~$100c+10b+a=1276$~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

10^2 10^3 10^4

d c b a

~~128228~~

$12828 - 9000 = 3828$

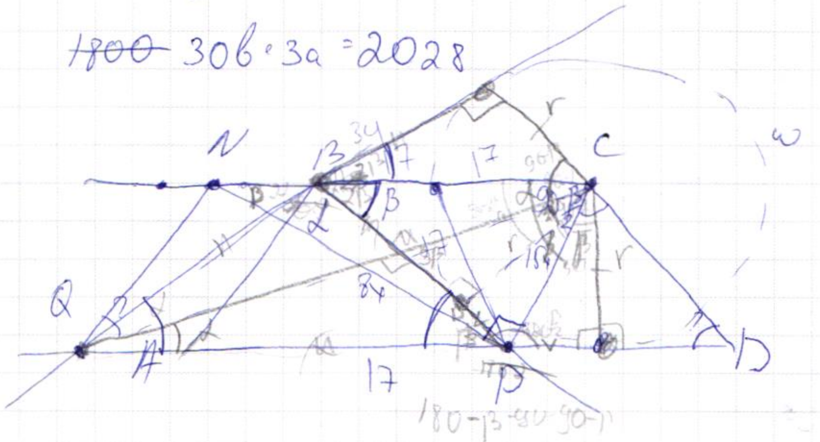
$1000d + 200c + 30b + 3a = 12828$

$200c + 30b + 3a = 3828$ не м/б.

$c = 3, 6, 9$

$3828 - 1800 = 2028$

$\cancel{1800}$ $30b + 3a = 2028$



$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{15}{8}$

$AP = 17$

$NC = 34$

$\alpha + \beta = 90 + \frac{\beta}{2}$

~~$180 - \frac{\beta}{2} - 90 = 90 - \frac{\beta}{2}$~~

$180 - \alpha - \beta + 90 - \frac{\beta}{2} - 90 + \frac{\beta}{2}$

$= \cancel{180 - \angle B}$

$\frac{NP}{PC} = \frac{8}{15}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos(\pi - \frac{\pi}{3} + y) = -\cos(-\frac{\pi}{3} + y)$

$\cancel{=\cos(\frac{\pi}{3} - y)}$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos(\frac{2\pi}{3}+y) = -7\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos y - 7\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin y \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin(y+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$\sin\frac{\pi}{3}$

$-7\cos(\frac{\pi}{3} - y)$

$\sqrt{3}$

$1+3=4$

$\frac{1}{2}\cos(2x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-y) = 6\sin(y+\frac{\pi}{6})$

$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos(2x-y) + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin(2x-y) = 6\sin(y+\frac{\pi}{6})$

$\sin(\frac{\pi}{6}+2x-y) = 6\sin(y+\frac{\pi}{6})$

$6\sin y\cdot\cos\frac{\pi}{6} + 6\cos y\cdot\sin\frac{\pi}{6}$

$\cancel{\sin\frac{\pi}{6}(\cos(2x-y) - 6\cos y)}$

$\sqrt{3}\cos(x-y) + 7\cos(\frac{\pi}{3}-y) = 0.$

$\frac{12x+26}{2x+3} \le ax+b \le 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$ $\quad [-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}$

$y = \frac{12x+26}{2x+3} = 6 + \frac{8}{2x+3}$

$$\begin{array}{r|l} 12x+26 & 2x+3 \\ -12x-18 & 6 \\ 8 & \end{array}$$

$x+2$

$y=8$

$x = -\frac{3}{2}$

$-\frac{19}{2}$ $\quad -\frac{13}{2}$

$(x-2)^2 = 4$

$\sqrt{x^2+x^1} = 4$

$y = |x-2|$

$1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2} = y$

$x^2+13x+\frac{33}{4} \le 0$ $\quad x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{+13}{-2}$

$D = 169-33 = 139$

$x = \frac{-13\pm\sqrt{139}}{2}$

$-\frac{169}{4} + \frac{169}{2} - \frac{33}{4} = \frac{-169+2\cdot169-33}{4} = \frac{169 - 33}{4}$

$\frac{-13-\sqrt{139}}{2}$ $\quad \frac{-13+\sqrt{139}}{2}$

$-\frac{33}{4} - 13 - 1$

$45{,}50$
$12{,}25$
$33{,}25$

$1+\sqrt{135} = 9$ $\quad 1+\sqrt{34}$

$-13+\sqrt{139} > -3$

$\sqrt{139} > 10$

$139 > 100$

$-13-\sqrt{139} < -19$

$-\sqrt{139} < -6$

$139 > 36$

$\frac{-144+13\cdot12-33}{4} =$

$$\begin{array}{r|l} 33 & 4 \\ -32 & 8 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 169 & \\ -33 & \\ 136 & 4 \\ -12 & 34 \\ 16 & \end{array}$$

$13\cdot 3{,}5$

$10{,}5$

$45{,}5$

$122{,}5$

$-13+\sqrt{139} > -2$

$\sqrt{139} > 11$

121

$169\cdot 3 = 507$

$507 + 33 = 540$

$540 : 4 = 135$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)