МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$

т.к. $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ $\forall x, y$, то

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta$.

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\frac{-\cos 2\beta}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k_1, \; k_1 \in \mathbb{Z} \\ 2\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k_2, \; k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

a) $2\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k_1, \; k_1 \in \mathbb{Z}$

$\sin(2\alpha - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k_1) = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \; k_1 \in \mathbb{Z}$

$\sin(2\alpha - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}) + \cos 2\alpha \sin(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\cancel{\sin(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}) = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n_1, \; n_1 \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n_2, \; n_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n_1,\ n_1 \in Z \\ 2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n_2,\ n_2 \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{\pi}{4} + \pi n_1,\ n_1 \in Z \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n_2,\ n_2 \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = tg\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{\pi}{4} + \pi n_1\right),\ n_1 \in Z \\ tg\alpha = tg\left(\frac{3\pi}{4} + \pi n_2\right),\ n_2 \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = tg\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{\pi}{4}\right) \\ tg\alpha = tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{array}\right.$$

$$tg\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{5}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{3}{5} \\ tg\alpha = -1 \end{array}\right.$$

~~Аналогично п.а:~~ $\cancel{\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n_3,\ n_3 \in Z \\ 2\alpha = \end{array}\right.}$

б) Аналогично п.а: $\sin\left(2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{3}{5} \\ tg\alpha = 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $-1;\ -\frac{3}{5};\ \frac{3}{5};\ 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|x^2-26x|=26x-x^2$, т.к. $26x-x^2\geq 0$ ОДЗ: $26-x^2>0$
$x\in(0;26)$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)}\geq 0$

$12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)}-13^{\log_5(26x-x^2)}\geq 0$

$\log_5(26x-x^2)=t$

$f(t)=12^t+5^t-13^t\geq 0$

$12^t+5^t-13^t=0$ т.к. $12^t>0$, то

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^t=\left(\frac{13}{12}\right)^t$

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^t \searrow$, $\left(\frac{13}{12}\right)^t \nearrow \Rightarrow$ не более 1 корня ~~решения~~

$t=2$ - корень: $12^2+5^2-13^2=144+25-169=0$

$+$ $-$
$\longrightarrow t$
2

по методу интервалов: $t\leq 2$

$\log_5(26x-x^2)\leq 2$

$26x-x^2\leq 25$

$x^2-26x+25\geq 0$

$(x-25)(x-1)\geq 0$

$x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

т.к. ОДЗ: $x\in(0;26)$, то

$x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$

5) $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(t\cdot 1)=f(t)+f(1)\Rightarrow f(1)=0\ \forall t$

$\cancel{f(\frac{1}{x})=f(}$ $0=f(1)=f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})\Rightarrow f(\frac{1}{x})=-f(x)$ $\forall x$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y);\ x,y\in[4;28]$

$f(4)=f(2)+f(2)=[\frac{2}{4}]\cdot 2=0$

$f(5)=[\frac{5}{4}]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0+[\frac{3}{4}]=0$

$f(7)=[\frac{7}{4}]=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=2\cdot f(3)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=0$

$f(11)=[\frac{11}{4}]=2$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=[\frac{13}{4}]=3$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=4\cdot f(2)=0$

$f(17)=[\frac{17}{4}]=4$

$f(18)=f(9)+f(2)=0$

$f(19)=[\frac{19}{4}]=4$

$f(20)=f(4)+f(5)=1$

$f(21)=f(7)+f(3)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$

$f(23)=[\frac{23}{4}]=5$

$f(24)=f(4)+f(6)=0$

$f(25)=2\cdot f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)\cdot 3=0$

$f(28)=f(2)+f(14)=1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итого: $f(t)=0$ для 10 t из $[4;28]$

$f(t)=1$ для 7 t из $[4;28]$

$f(t)=2$ для 3 t из $[4;28]$

$f(t)=3$ для 2 t из $[4;28]$

$f(t)=4$ для 2 t из $[4;28]$

$f(t)=5$ для 1 t из $[4;28]$

Тогда кол-во пар x, y, для которых $f(x)<f(y)$ равно

$24\cdot 1+22\cdot 2+20\cdot 2+17\cdot 3+7\cdot 10=24+44+40+51+70=$
$=229$

Ответ: 229

б) $\cancel{\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \;;\; x\in\left(-\frac{3}{2};2\right]}$

$\cancel{-2+\frac{4}{(3x-2)(t1)} \geq ax+b}$

в) $\underbrace{\frac{8-6x}{3x-2}}_{f(x)} \geq \underbrace{ax+b}_{g(x)} \geq \underbrace{18x^2-51x+28}_{h(x)}, \; x\in\left[\frac{2}{3};2\right]$

$f(x)=-2+\frac{4}{3x-2}$ – гипербола, убывающая на $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$

$g(x)=ax+b$ – прямая

$h(x)=18x^2-51x+28$ – парабола, ветви – вверх.

1) $g(x) \geq h(x)\ \forall\ x \in [\tfrac{2}{3}; 2] \iff \begin{cases} g(\tfrac{2}{3}) \geq h(\tfrac{2}{3}) \\ g(2) \geq h(2) \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2}{3}a + b \geq 8 - 34 + 28 \\ 2a + b \geq 72 - 102 + 28 \end{cases}$

$\begin{cases} b \geq -\frac{2}{3}a + 2 \\ b \geq -2a - 2 \end{cases}$

$-2a - 2 \geq -\frac{2}{3}a + 2$

$\frac{4}{3}a \leq -4$

$a \leq -3$

$g(2) \leq f(2)$

2) $f(x) \geq g(x)\ \forall\ x\ [-\tfrac{3}{2}; 2] \iff$ а) $a \geq f'(2) \Rightarrow$

б) $a < f'(2) \Rightarrow g(x_0) \leq f(x_0)$,

где x_0 - решение ур-я

$f'(x_0) = a,\ x_0 > \frac{2}{3}$

$f'(x) = \frac{-12}{(3x-2)^2}$

$f'(2) = \frac{-12}{(6-2)^2} = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$

а) $a \geq -\frac{3}{4}$, $b \leq -2a - 1$

б) $a < -\frac{3}{4}$ $\quad \frac{-12}{(3x_0-2)^2} = a \quad \frac{-12}{a} = (3x_0 - 2)^2$. т.к. $x_0 > \frac{2}{3}$, то:

$3x_0 - 2 = \sqrt{-\frac{12}{a}}$

$x_0 = \frac{2 + 2\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3}$

$b \leq -a\frac{2 + 2\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} - 2 + \frac{4}{\sqrt{-\frac{12}{a}}} = -a\frac{2 + 2\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} - 2 + 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$

а) $a \geq -\frac{3}{4}$

$b \in [-\frac{2}{3}a + 2; -2a - 1]$ $\quad -\frac{2}{3}a + 2 \leq -2a - 1$

реш. нет. $\quad \frac{4}{3}a \leq -3 \quad a \leq -\frac{9}{4}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) $a \in [-3; -\frac{3}{4}]$

$b \in [-\frac{2}{3}a+2; -a\frac{2+2\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} - 2 + 2\sqrt{\frac{-a}{3}}]$

$-\frac{2}{3}a + 2 \le -a\left(\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3}\right) - 2 + 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$

$\sqrt{\frac{-a}{3}} - \frac{a\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} \ge 2$ $\quad \sqrt{\frac{-a}{3}} \ge 0 \quad \frac{-a\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} \ge 0$

$a \ge -3$

$\sqrt{\frac{-a}{3}} \le 1$

$\sqrt{\frac{-a}{3}} - \sqrt{\frac{-3}{a}} \le 1 < 2$

$\frac{-a}{3} - \frac{2a}{3} - \frac{a}{3} \ge 4$

$-\frac{4a}{3} \ge 4$

$a \le -3$

$a = -3,\ b \in [2+2; 2+2-2+2]$

$a = -3,\ b = 4$

~~в) $a < -3$~~

~~$b \in [-2a-2; -a\frac{2+2\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} - 2 + 2\sqrt{\frac{-a}{3}}]$~~

~~$-2a-2 \le -a\frac{2+2\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} - 2 + 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$~~

в) $a < -3$

$b \in [-2a-2; -a\frac{2+2\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} - 2 + 2\sqrt{\frac{-a}{3}}]$

$-2a-2 \le -a\frac{2+2\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} - 2 + 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$

$a\frac{2-\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} + \sqrt{\frac{-a}{3}} \ge 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{-a\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3}+\sqrt{\frac{-a}{3}}\geq\frac{-2a}{3} \qquad -\frac{2a}{3}\geq 0 \quad \frac{-a\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3}\geq 0 \quad \sqrt{\frac{-a}{3}}\geq 0$$

$$-\frac{4a}{3}\geq\frac{4a^2}{9}$$

$$4a^2+12a\leq 0$$

$$a^2+3a\leq 0$$

$$a\in[-3;0]$$

мет. мет.

Ответ: $(-3;4)$

4) Дано: окр. Ω касается ω внутренним образом в (·) A. AB – диаметр Ω. BC – хорда Ω, касается ω в (·) D.

$AD\cap\Omega=E, A$. $EF\perp BC$

$EF\cap\Omega=F, E$.

$BD=13$, $CD=12$.

Найти: r – радиус ω

R – радиус Ω

$\angle AFE$

$S_{\triangle AEF}$

1) Т.к. AB – диаметр окр. Ω, $C\in\Omega$, то $\angle ACB=90°$ (по теор.)

2) Пусть O_1 – центр ω. Тогда, т.к. BD – касательная к ω, $O_1D\perp BD$ (по теор.)

3) Рассмотрим $\triangle ABC$, AO_1BD:

1) $\angle B$ – общий

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$ $\quad \sqrt{\frac{-a}{3}} - \frac{a\sqrt{\frac{-3}{a}}}{3} \geq 2$

$f(2)=1$

$f(3)=1$ $\quad -\frac{a}{3} - \frac{2a}{3} + \frac{a^2\cdot\frac{-3}{a}}{9\cdot 3} =$

$f(4)=2$

$f($

$= -\frac{4a}{3} \geq 4 \quad 4a \leq -12 \quad a \leq -3$

$y > 6x$

$\cancel{y^2 - 12xy + 36x^2}$

$\cancel{y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6}$

$y > 6x$

$\cancel{(x+3)^2 \quad 9(x-1)^2 - 9 + (y-6)^2 = 36 - 45}$

$3x = t$

$\frac{x}{3}a + 2a = \frac{2}{3}a$

$$\begin{cases} y - 2t = \sqrt{\frac{ty}{3} - 2t - y + 6} \\ t^2 + y^2 - 6t - 12y = 45 \end{cases}$$

$y^2 - 4ty + 4t^2 = \frac{ty}{3} - 2t - y + 6$

$3y^2 - 13ty + 3y + 4t^2 + 6t - 18 = 0$

$D = (13t-3)^2 - 12(4t^2 + 6t - 18) =$

$= 169t^2 - 78t + 9 - 48t^2 - 72t + 216 =$

$= 125t^2 - 150t + 225 = 25(5t^2 - 6t + 9)$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{13t - 3 + 5\sqrt{5t^2 - 6t + 9}}{7} \\ y = \end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{y - 12xy +}$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 + 9x^2 - 18x - 12y = 45$

-39

$27x^2 - 12xy + 78x + 12y = xy - 6x - y \cancel{+6-45}$

$27x^2 - 13xy + 24x + 13y + 39 = 0$

$13y(x-1) = 27x^2 + \cancel{78}\,24x + 39$ $\quad x=1$ - не нет

$y = \dfrac{27x^2 + 24x + 39}{13(x-1)}$

$x > \frac{2}{3}$

$8 - 6x \cancel{+a} \geq (3x-2)(ax+b)$

$8 - 6x \geq 3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b$

$3ax^2 + 3bx + 6x - 2ax - 2b - 8 \leq 0$

$D = (3b+6-2a)^2 + 12a(2b+8) \geq 0$

$f(2) = -2 + \frac{4}{6-2} = -1$

$\dfrac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b$

$f'(x) = -\dfrac{12}{(3x-2)^2} = a$

$f(x) = -2 + \dfrac{4}{3x-2} \geq ax + b$

$2a + b \leq -1$

1) $\cancel{a<}\ a \geq -\frac{3}{4}$: $b \leq -1 - 2a$

2) $a < -\frac{3}{4}$

$a\,\dfrac{2+2\sqrt{-\frac{3}{a}}}{3} + b \leq$

$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$ $\quad a$

$\cancel{x_0 =}$

$3x_0 - 2 = \sqrt{-\frac{12}{a}}$

$-2a - 2 \geq -\frac{2}{3}a + 2$ $\quad \frac{4}{3}a \leq -4$

$a \leq -3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|26x-x^2|^{\log_5 12}+26x-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$

$26x-x^2>0$

$26x-x^2=t,\ t>0$

$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t} \geq 0$

$e^{\frac{\ln 12\cdot\ln t}{\ln 5}}+t-e^{\frac{\ln 13\cdot\ln t}{\ln 5}} \geq 0$

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}-13^{\log_5 t} \geq 0$

$y=\log_5 t$

$f(y)=12^y+5^y-13^y \geq 0$

$144+25=169$

$f'(y)=12^y\ln 12+5^y\ln 5-13^y\ln 13$

$g(y)\ \left(\frac{12}{5}\right)^y+1-\left(\frac{13}{5}\right)^y=0$

$g'(y)=\left(\frac{12}{5}\right)^y\ln\frac{12}{5}-\left(\frac{13}{5}\right)^y\ln\frac{13}{5}$

$\left(\frac{12}{13}\right)^y\ln\frac{12}{5}=\ln\frac{13}{5}$

не более 1 корня.

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^y=\left(\frac{13}{5}\right)^y$

не более 1 корня

$y=2$ — корн.

sin x

cos x

$y\in(-\infty;2]$

$t\in(0;25]$

$\frac{1}{12}+\frac{1}{5}-\frac{1}{13}$ $5\cdot13+12\cdot13-5\cdot12$

$\frac{1}{144}+\frac{1}{25}-\frac{1}{169}$ $12^y+5^y=13^y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{1}{17} \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos\beta-\sin\beta) + 2\sin\beta\cos\beta(\cos\alpha-\sin\alpha) =$

$=$ $2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi k$ $\qquad 1-\frac{1}{17} = \frac{16}{17}$

$\sin\left(2\beta - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi k\right) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\beta \cos\left(\pi k - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos\left(\pi k - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\begin{array}{r} 24 \\ 5 \\ +5 \\ 0 \\ +7 \\ 0 \\ \hline 229 \end{array}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \ldots =$

$= \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{array}{r} 28 \\ \times 8 \\ \hline 224 \end{array}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\cos(2\beta) = \frac{7}{17}$

$18\cdot\frac{289}{12^2} - 3\cdot\frac{289}{2\cdot 12} =$

$= \frac{289}{8}$

$18x^2 - 51x + 28$

$x_0 = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$y_0 = 18\cdot\frac{289}{144} - \frac{289}{4} + 28 =$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6a - y\cdot b$

$= 28 - \frac{289}{8} = \frac{224-289}{8} = -\frac{65}{8}$

$3x-2 \geq 0$

$x \geq \frac{2}{3}$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$

$18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 =$

$= 72 - 102 + 28 = -2$

$-2 + \frac{4}{4} = -1$

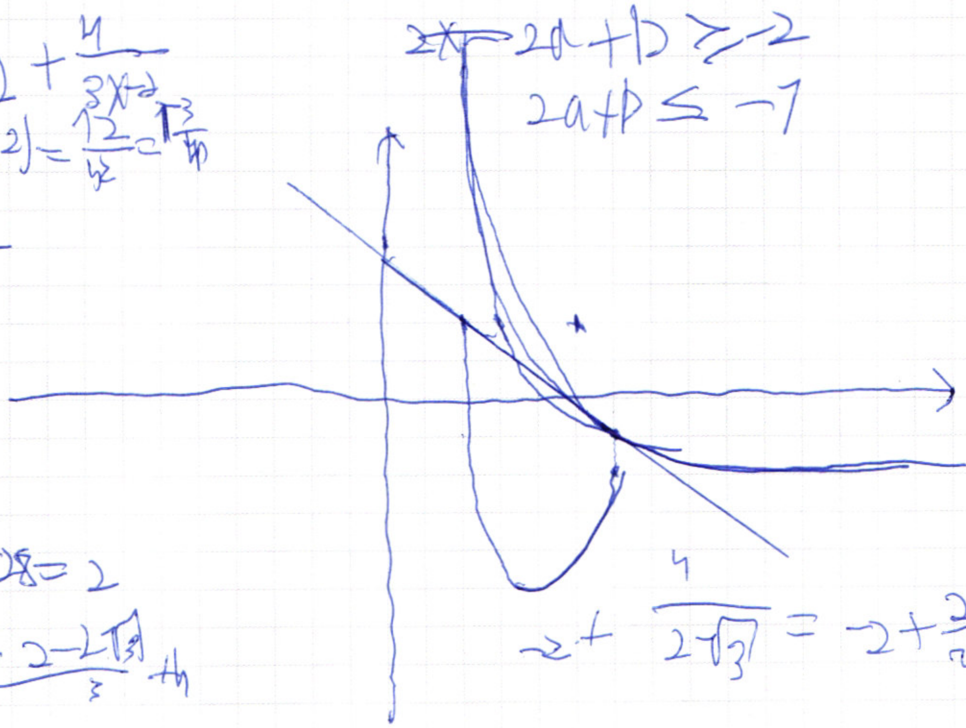
$f(x)\ \frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$f'(x) = -\frac{12}{(3x-2)^2}\quad f'(2) = \frac{12}{4^2} = \frac{3}{4}$

$\frac{2}{3}a + b \geq 2$

$2a + b \geq -2$

$2a + b \leq -1$



$\frac{8}{\cancel{18}\cdot\frac{4}{9}} - 34 + 28 = 2$

$-x+4 \quad = \frac{2-2\sqrt{3}}{3} + 4$

$-2 + \frac{4}{2\sqrt{3}} = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{12}{(3x-2)^2} = \frac{3}{4}$

$(3x-2)^2 = 16$

$3x-2 = 4$

$x = 2$

$\frac{12}{(3x-2)^2} = 1$

$12 = (3x-2)^2$

$2\sqrt{3} = 3x-2$

$x = \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}-\cos\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}}{\sqrt{2}}$$

4) $f(x)=\log_a(x+b)$

$f(2)=0$ $\quad b=-1$

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{16}{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$f(x)=\log_a(x-1)$

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\pi}{2}-\arccos$$

$f(5)=1$
$f(7)=1$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(6)=0$

$$tg^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{(1-\cos2\alpha)^2}{\sin^2 2\alpha}=$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2} \qquad =\left(\frac{1-\cos2\alpha}{\sin2\alpha}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha=\frac{\cos2\alpha+1}{2}$$

$$=\frac{1-2\cos2\alpha+\cos^2 2\alpha}{}$$

$$\alpha=\frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}{2}+\pi n_2$$

$$tg\alpha=tg\left(\frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}{2}\right)=$$

$$tg\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$=$

$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0$
$f(5)=1$
$f(6)=0$
$f(7)=1$
$f(8)=0$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(11)=2$
$f(12)=0$
$f(13)=3$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(17)=4$

$f(18)=0$
$f(19)=4$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=0$
$f(25)=2$
$f(26)=3$
$f(27)=0$
$f(28)=1$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

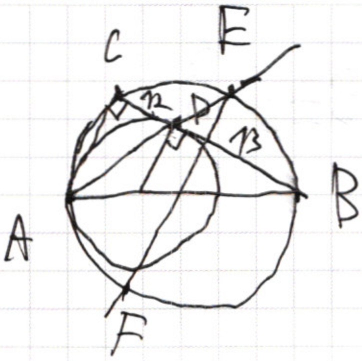
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{r}{R} = \frac{12}{25}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2) $\angle ACB = \angle O_1DB = 90^\circ$
(по п.2)
$\parallel$
90°
(по п.1)

Значит, $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ (по 2м углам).
Тогда, $\frac{AB}{O_1B} = \frac{BC}{BD}$ $O_1B = 2R - r$, $AB = 2R$

$$\frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{13}$$

$$26R = 50R - 25r$$
$$25r = 24R \Rightarrow r = \frac{24}{25}R$$

4) по т. Пифагора в $\triangle O_1DB$: $O_1D^2 + BD^2 = O_1B^2$

$$r^2 + 13^2 = (2R - r)^2$$

$r^2 + 169 = 4R^2 - 4Rr + r^2$. Т.к. $r = \frac{24}{25}R$ (по п.3), то:

$$\frac{169}{4} = R^2\left(1 - \frac{24}{25}\right)$$

$$R^2 = \frac{13^2 \cdot 25}{4}$$

$$R = \frac{65}{2}$$

$$r = \frac{156}{5}$$

~~$\angle AFE +$~~ Ответ: радиус $\Omega = \frac{65}{2}$, радиус $\omega = \frac{156}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)