МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

Ограничения: $y \geq 6x$

$xy-6x-y+6 \geq 0$
$\downarrow$
$(x-1)(y-6) \geq 0$

Помня про ограничения возведем первое в квадр.

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-y(13x-1)+36x^2+6x-6=0$

Решим как квадр. относ. y:

$D=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=25x^2-50x+25=25(x-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\dfrac{13x-1+5x-5}{2}=9x-3 \geq 6x \Rightarrow x \geq 1 \\ y_2=\dfrac{13x-1-5x+5}{2}=4x+2 \geq 6x \Rightarrow x \leq 1 \end{array}\right.$$ – из огранич.

Подставим во второе ур-е.

$9x^2+9(3x-1)^2-18x-36(3x-1)-45=0 \quad |:9$

$x^2+9x^2-6x+1-2x-12x+4-5=0$

$10x^2-20x=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow$$ $x=0$ не подх. под $x \geq 1 \Rightarrow x=2$ $y=17$ – подх. под все ограничения.

Подставим $y=4x+2$, $x \leq 1$:

$9x^2+(4x+2)^2-18x-12(4x+2)-45=0$

$9x^2+16x^2+16x+4-18x-48x-24-45=0$

$25x^2-50x-65=0$

$5x^2-10x-13=0 \Rightarrow x=\dfrac{5+3\sqrt{10}}{5}>1 \Rightarrow$ не подх.

$x=\dfrac{5-3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow y=\dfrac{30-12\sqrt{10}}{5}<6 \Rightarrow$ подх. под все огр. $\Rightarrow$

Ответ: $(2;17)$; $\left(\dfrac{5-3\sqrt{10}}{5}; \dfrac{30-12\sqrt{10}}{5}\right)$.

№6

$ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$18x^2-x(51+a)+28-b \leq 0.$

$D=(51+a)^2-72(28-b)>0$

$x_1=\dfrac{51+a+\sqrt{D}}{36} \geq 2 \rightarrow \sqrt{D} \geq 21-a$ ① при $a \geq 21$ все ок

$x_2=\dfrac{51+a-\sqrt{D}}{36} < \dfrac{2}{3} \rightarrow \sqrt{D} > 27+a$ ② при $a<-27$ все ок.

① $(51+a)^2-72(28-b) \geq (21-a)^2.$

$51^2+102a+\cancel{a^2}-72(28-b) \geq 21^2-42a+\cancel{a^2}$

$144a-72(28-b)+30\cdot72 \geq 0$

$2a+b-28+30 \geq 0$

$2a+b \geq -2.$

②

$(51+a)^2-72(28-b)>(27+a)^2$

$51^2+102a+\cancel{a^2}-72(28-b)>27^2+54a+\cancel{a^2}$

$48a+78\cdot24-72(28-b)>0 \quad |:24$

$2a+78-74+3b>0$

$2a+3b>-4. \quad \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 21 \\ 2a+3b>-4 \end{cases} \\ \begin{cases} a<-27 \\ 2a+b \geq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} -27 \leq a < 21 \\ 2a+b \geq -2 \\ 2a+3b>-4 \end{cases} \end{array}\right. \\ (51+a)^2-72(28-b)>0.$$

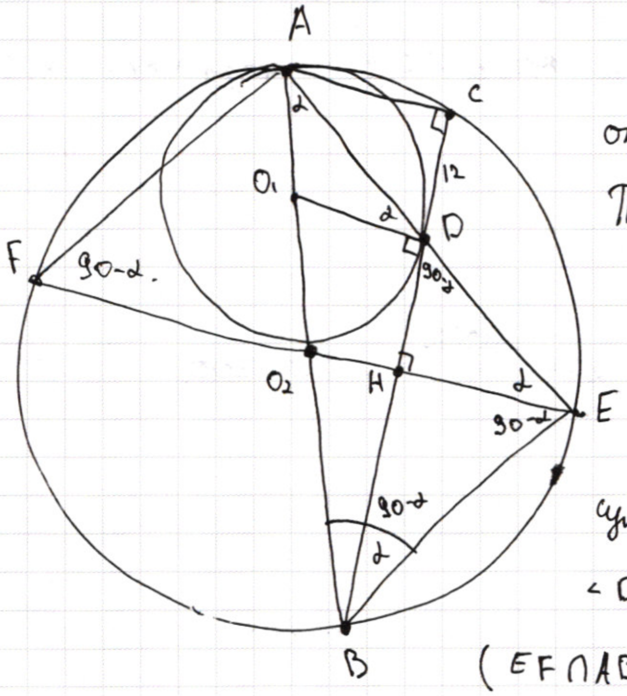
$\dfrac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \quad |\cdot 3x-2$, т.к. $x \in \left(\frac{2}{3};2\right] \Rightarrow 3x-2>0.$

$8-6x \geq 3ax^2+3bx-2ax-2b$

$3ax^2+x(3b-2a+6)-8-2b \leq 0$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4

Пусть $\angle BAE = \alpha$. Отметим центр окружности ω O_1 и проведем O_1D. Т.к. D – точка касания, то $O_1D \perp BC$ => т.к. $EF \perp BC$, то $O_1D \parallel EF$. Т.к. O_1D и O_1A – радиусы, то $O_1D = O_1A$ => $\angle O_1DA = \angle O_1AD = \alpha$ => $\angle BDE = 90 - \alpha$ по сумме развёрн. угла $\angle ADE$ => т.к. $\angle DHE = 90°$ => $\angle DEF = \alpha$ по сумме углов $\triangle$ => $\triangle AO_2E$ – равнобедр. $(EF \cap AB = O_2;\ EF \cap BC = H)$. => т.к. O_2 ∈ диаметру и $AO_2 = O_2E$ и точки E и A лежат на Ω => O_2 – центр Ω. Проведем EB, $\angle AEB = 90°$ т.к. опир. на диам. => $\angle FEB = 90 - \alpha$ => $\angle CBE = \alpha$.

В $\triangle DBE$: $DE = BD\sin\alpha = 13\sin\alpha$. В $\triangle DEE$: $DH = DE\sin\alpha = 13\sin^2\alpha$.

Т.к. $BH + DH = 13$, то $BH = 13\cos^2\alpha$. Проведем AC, $\angle ACB = 90°$ т.к. опир. на AB => $AC \parallel O_1D \parallel O_2H$ => $\triangle BO_2H \sim \triangle BAC$ по 3-м углам, а т.к. O_2 – центр, то $BO_2 = O_2A$ => коэф. подобия $= \frac{1}{2}$ => $BH = CH$ => $13\cos^2\alpha = 13\sin^2\alpha + 12$ =>

$$13\cos^2\alpha - 13\sin^2\alpha = 12$$

$$26\cos^2\alpha - 13 = 12$$

$\cos^2\alpha = \frac{25}{26}$, т.к. $\alpha < 90$ то $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ => $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$. $\angle AFE = \angle ABE$ т.к. опир. на одну дугу, а $\angle ABE = 90 - \alpha$ по теор. о сум. $\angle$ в $\triangle ADE$ => $\angle AFE = 90 - \alpha$ => $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$. в $\triangle BDE$ $BE = 13\cos\alpha$ => по теор. синус. в $\triangle ABE$:

$\frac{13\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2R$ => $R = \frac{13}{2}ctg\alpha = \frac{13}{2}\cdot 5 = \frac{65}{2}$. Т.к. $AC \parallel O_1D$, то $\angle DAC = \angle ADO_1 = \alpha$ как накр. леж. => $AD = \frac{CD}{\sin\alpha} = 12\sqrt{26}$ => в $\triangle AO_1D$ по теор. кос: $r_1^2 + 144\cdot 26 - 24\sqrt{26}\,r_1\frac{5}{\sqrt{26}} = r_1^2$

N5

Если мы хотим посчитать $f(n)$, где $n \in \mathbb{N}$ то $f(n) \geq 0$ ~~Значит, что~~ т.к. мы можем разложить n на множители, воспользоваться тем, что $f(ab) = f(a) + f(b)$, сделать для a и b то же самое и т.д. Значит, чтобы $f(\frac{x}{y}) < 0$ нужно чтобы $x \not\vdots\, y$. Т.е. это все случаи когда $x < y$ и когда $x > y$, но $x \not\vdots\, y$.

① $x < y$:

$x=4$: 24

$x=5$: 23

$x=6$: 22

⋮ ⋮

$x=28$ 0

$\Rightarrow$ всего: $0+1+2+3+\ldots+24 = \frac{24 \cdot 25}{2} = 12 \cdot 25 = 300$.

② $x > y$, $x \not\vdots\, y$

$x=4$	0	$x=17$	13
$x=5$	1	$x=18$	12
$x=6$	2	$x=19$	15
$x=7$	3	$x=20$	13
$x=8$	3	$x=21$	16
$x=9$	5	$x=22$	17
$x=10$	5	$x=23$	19
$x=11$	7	$x=24$	16
$x=12$	6	$x=25$	20
$x=13$	9	$x=26$	21
$x=14$	9	$x=27$	22
$x=15$	10	$x=28$	21
$x=16$	10		

$\Rightarrow$ всего: 273 $\Rightarrow$ вообще всего $300 + 273 = 573$ пары

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$144\cdot 26 = 24\cdot 5r \Rightarrow r = \frac{144\cdot 26}{24\cdot 5} = \frac{6\cdot 26}{5} = \frac{156}{5}$

Т. к. EF прох. через O_2, но EF - диаметр $\Rightarrow \angle FAE = 90° \Rightarrow$

$AE = FE\cos\alpha = \cancel{13\sqrt{26}}\ 2R\cos\alpha = \frac{65\cdot 5}{\sqrt{26}}$, $AF = 2R\sin\alpha = \frac{65}{\sqrt{26}} \Rightarrow$

$S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} FA\cdot AE = \frac{65^2\cdot 5}{52} = \frac{21125}{52}$

Ответ: $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$; $R = \frac{65}{2}$, $r = \frac{156}{5}$, $S_{\triangle AFE} = \frac{21125}{52}$

№1

$2\alpha = x \quad 2\beta = y$: $\quad \sin x\cos y + \sin y\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x + \sin(x+2y) = -\frac{2}{17}$

$\sin x + \sin x\cos 2y + \sin 2y\cos x = \sin x(\cos 2y + 1) + 2\sin y\cos y\cos x = 2\sin x\cos^2 y +$

$+ 2\sin y\cos y\cos x = 2\cos y(\sin x\cos y + \sin y\cos x) = -\frac{2}{\sqrt{17}}\cos y = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \sin y = \frac{4}{\sqrt{17}} \rightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos x}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \rightarrow \sin x + 4\cos x = -1 \ (1) \\ \sin y = -\frac{4}{\sqrt{17}} \rightarrow \sin x - 4\cos x = -1 \ (2) \end{array}\right.$

(1) $2\sin\alpha\cos\alpha + 4 - 8\sin^2\alpha = -1$

$8\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 5\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$ т.к. $\cos\alpha = 0$ не решение.

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

$D = 4 + 60 = 64 \Rightarrow$

$tg\alpha = \frac{2+8}{6} = \frac{5}{3}$

$tg\alpha = \frac{2-8}{6} = -1$

(2) $2\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha - 4 = -1$

$8\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$

$tg\alpha = \frac{-2+8}{10} = \frac{3}{5} \quad tg\alpha = -1 \Rightarrow$ Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = \frac{5}{3}$; $tg\alpha = \frac{3}{5}$.

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ ОДЗ: $26x-x^2>0$

На ОДЗ: $(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$ $x\in(0;26)$.

Пусть $26x-x^2=t$, $t>0$

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12} = (5^{\log_5 t})^{\log_5 12} = (5^{\log_5 12})^{\log_5 t} = 12^{\log_5 t}$. Аналог: $t=5^{\log_5 t}$

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}\geq 13^{\log_5 t}$

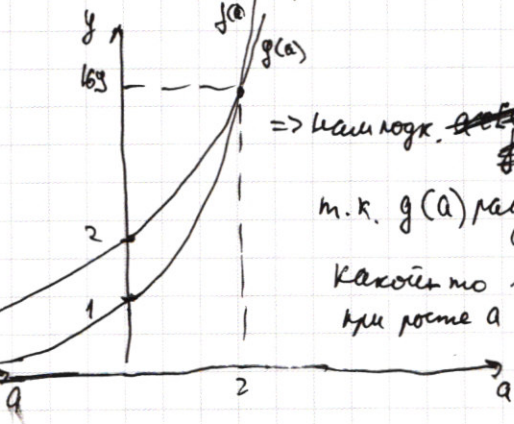
Пусть $\log_5 t = a$

$12^a+5^a\geq 13^a$

$f(a)=12^a+5^a$ – возр. по a с ускорением.

$g(a)=13^a$ – возр. по a с ускорением.

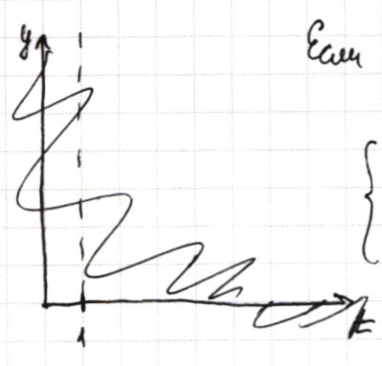
Нарисуем в коорд. $y(a)$! Заметим, что $12^2+5^2=169=13^2$ => у функций одна точк. перес. $a=2$, т.к. $g(a)$ раст. быстрее. (т.к. $13>12$, $13>5$) =>



=> нам подх. $a\in(-\infty;2]$

~~Возьм y(t) график~~

т.к. $g(a)$ растет быстрее, то если в ~~какой~~ какой-то момент $g(a)=f(a)$, то дальше при росте a $g(a)>f(a)$ => $g(a)$ и $f(a)$ пересек. в одной точке до которой $g(a)<f(a)$, а после $g(a)>f(a)$.



Если ~~$a\in[0;2]$~~ $a\in(-\infty;2]$, то $\log_5 t\in[0;2]$ => $t\in[0;25]$ =>

$$\begin{cases} 26x-x^2\geq 0 \to x\in(0;26) \\ 26x-x^2\leq 25 \to x\in[-\infty;1]\cup[25;+\infty] \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$.

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

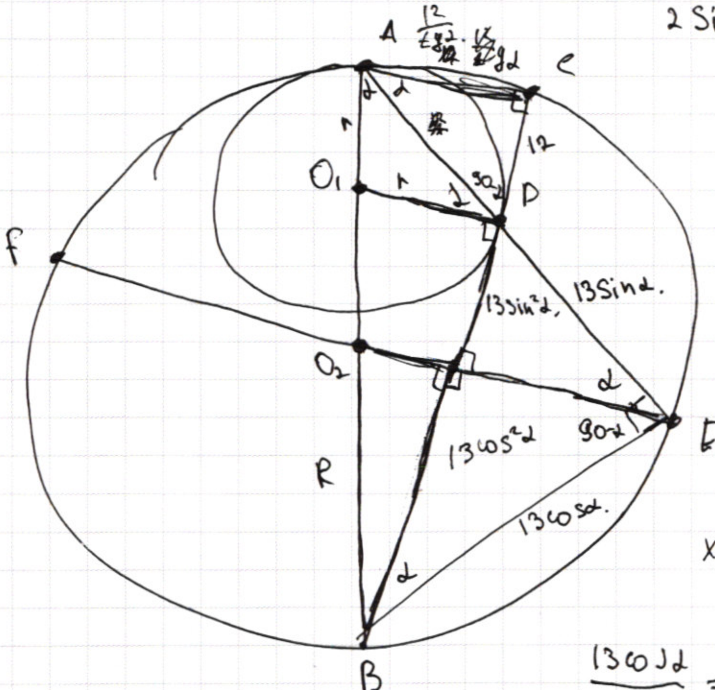
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

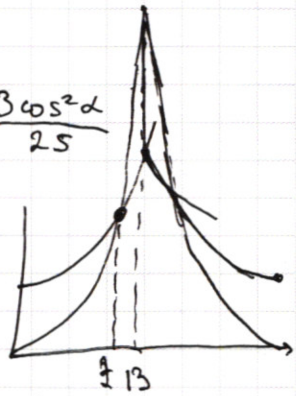
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin\alpha\cos\alpha\cos2\beta + (1-2\sin^2\alpha)\sin2\beta$





$x\cos\alpha = 13\cos$

$65 \times 65 = 4225$

$4225 \times 5 = 21125$

31,2

33,5.

$\frac{13\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2R$

$R = \frac{13}{2}\operatorname{ctg}\alpha$

$13\cos^2\alpha = 13\sin^2\alpha + 12$

$13\cos2\alpha = 12$

$x\in\left(\frac{2}{3};2\right)$ $\cos2\alpha = \frac{12}{13}$ ~~2 sin²~~

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{12}{13}$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$

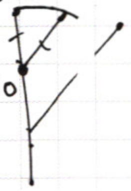
$2\cos^2\alpha = \frac{25}{13}$

$8-6x \geq 3ax^2+3bx-2ax-2b$

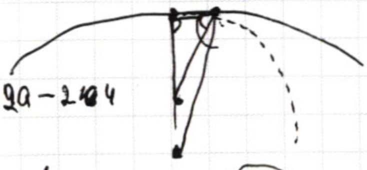
$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow$

$3ax^2 + x(3b-2a+6) - 2b - 8 \leq 0$

$R = \frac{13}{2}\cdot 5 = \frac{65}{2}$



X ⁄ y.



4 $D = 9b^2+4a^2+36+36b-12a-24$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ 4,5

$9b^2+4a^2+36+36+36b-12ab-24a+24ab+96a = 9b^2+4a^2+36$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

13

0 13 26

$26x-x^2>0 \Rightarrow x(26-x)>0 \Rightarrow x(x-26)<0 \quad x\in(0;26)$.

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26\cdot 1$

$t\in(0;169) \quad t>0$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t} = 13^{\frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}} = t^{\frac{1}{\log_{13} 5}} = t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13} \quad \log_5 12 \to \log_5 13 \quad t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$\log_5 12 + \log_5\frac{13}{12}$

$t^{\log_5 12}+t^{\log_5 5}-t^{\log_5 13}\geq 0$.

$t\left(t^{\log_5\frac{12}{5}}+1-t^{\log_5\frac{13}{5}}\right)\geq 0$.

$t^{\log_5\frac{12}{5}}-t^{\log_5\frac{13}{5}}+1\geq 0$.

$t \geq t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}$.

$t^{\log_5\frac{12}{5}}\left(1-t^{\log_5\frac{13}{12}}\right)\geq -1$.

12

$t^{\log_5 12}+t\geq 2\sqrt{t^{\log_5 60}}$

$t^{\log_5\frac{12}{5}}-t^{\log_5\frac{13}{5}}\geq -1$.

24

$27+a<\sqrt{60}$

$t^{\log_5\frac{12}{5}}$

$=2t^{\frac{1}{2}\log_5 60}$

$169^{\log_5 12}+169\geq 13^{\log_5 169}$

$169^{\log_5 12}+169\geq 169^{\log_5 13}$

$\log_5 12\, t^{\log\frac{12}{5}}+1-\log_5 13\, t^{\log_5\frac{13}{5}}=0 \quad \log_5\frac{13}{5}$

$18x^2-x(51+a)+28-b\leq 0$

$x(26-x)$

$\log_5\frac{12}{5}$

$\frac{51+a+\sqrt{(51+a)^2-72(28-b)}}{36}\geq 2$

$D=(51+a)^2-72(28-b)$

$t^{\log_5\frac{12}{13}}+t^{\log_5\frac{5}{13}}\geq 1$.

$t=169$

$169^{\log_5\frac{12}{13}}+169^{\log_5\frac{5}{13}}$

$\frac{2\log_{13}\frac{12}{13}}{\log_{13}5}$

$\frac{12}{13}^{2\log_5 13}+\frac{5}{13}^{2\log_5 13}\geq 1$

$\frac{169}{13}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4

7 6 5 4

$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ $\cancel{5}$ $\cancel{6}$ 10 11 $\cancel{12}$ 13 14 15 16 17 18 19 20

21 22 23 24 25 26 27 28.

3 6 9 19 10 26 32 41 50 70 20 110 46 62

1+2+3+3+5+5+7+6+9+9+10+10 +13+12+15 | +13+16+17+19+16 | +20

25 40 30 78 |

+21+22+21 |

82

163+110 = 273

$\cancel{1}+\cancel{2}+\cancel{3}+\cancel{3}+\cancel{5}+\cancel{5}+\cancel{7}+\cancel{6}+\cancel{9}+9+\cancel{10}+\cancel{10}+13+\cancel{12}+\cancel{15}+13+\cancel{16}+\cancel{17}+\cancel{19}+\cancel{16}+\cancel{20}+21+22+21$

35

6x

3x-2

10

10 20

10 30

20 50

30 100

20 50

20	120
70	190
50	240
33	273.

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{8\sin y}$ $\quad \sin x\cos y+\sin y\cos x=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x\cos 2y+\sin 2y\cos x+\sin x=-\frac{2}{17}$

26

33

$\sin x(\cos 2y+1)+\sin 2y\cos x$

$2\sin x\cos^2 y+2\sin y\cos y\cos x=-\frac{2}{17}$

$\cancel{2\sin x\cos y(\cos y+\sin y)}$

$2\sin x\cos y+\cancel{4\cos^2 y}$

$2\cos y(\sin x\cos y+\sin y\cos x)=-\frac{2}{17}$

$\cancel{2\sin x}$

$\cos y=\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin y=\frac{4}{\sqrt{17}} \quad \sin y=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha+8\sin^2\alpha-3=0$

$\frac{\sin x}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad 125+$

$a\le 21$ $\qquad \sin x+4\cos x=-1.$

$12^a+5^a \quad 13^a$

$\sin x=-1-4\cos x \Rightarrow$

$12^{a-1}+5^{a-1} \quad 13^{a-1}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2\ge 13^{\log_5(26x-x^2)}$

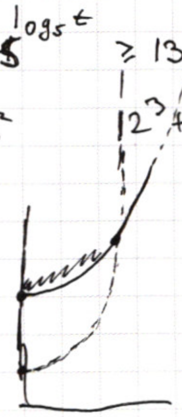
$t^{\log_5 12}+t\ge t^{\log_5 13}$ $\qquad 5^{\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5 12}$

4 5

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}\ge 13^{\log_5 t}$

$f\left(\frac{4}{5}\right)=f(4)+f\left(\frac{1}{5}\right)$

$t=25 \quad 12^2+5^2=13^2 \qquad 12^3+5^3 \qquad 13^3$



$72-51-9$

$x^2-26x+25\ge 0$

$(21-a)^2\le(51+a)^2-72(28-b)$

$(x-25)(x-1)$

$21^2-42a\le 51^2+102a-72\cdot 28+72b$

$144a\ge 72\cdot 28+21^2-51^2-72b \quad 2a\ge 28-30-b \quad 2a\ge - \quad 2a+b\ge -2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$ $\sin x\cos 2\beta+\cos x\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cos^2 2\beta+\sin 2\alpha\sin^2 2\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

y^2-12xy $\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)$ $-\frac{1}{\sqrt{7}}\cos 2\beta+\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$x(y-6)-(y-6)$

$(y-6)(x-1)>0$

$\begin{cases}x>1\\y>6\end{cases}$ $\begin{cases}x<1\\y<6\end{cases}$ $y>6x$

2

$y=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}+2=$ $\frac{5-3\sqrt{10}}{5}$ $D=100+260=360$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}=\frac{10-12\sqrt{10}}{5}$ $y>6x$ $x=\frac{10+6\sqrt{10}}{10}=\frac{5+3\sqrt{10}}{5}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45.$ $30-12\sqrt{10}\wedge 30$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6.$

$<$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$ $y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0.$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90.$ $y^2-y(13x-1)+36x^2+6x-6=0$

$169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=$

$y=\frac{13x-1+5x-5}{2}=9x-3$ $=25x^2-50x+25=25(x-1)^2$

$4x+2>6x$

$y=\frac{13x-1-5x+5}{2}=4x+2$ $9x-3>6x$

$\underline{x<1}$ $\underline{x>1}$

$9x^2-18x+(9x-3)^2-12(9x-3)-45=0.\ |:9$

$9x^2-18x+$

~~$x=0$ $y=-3$ нет.~~

$x^2-2x+(3x-1)^2-4(3x-1)-5=0$ ~~$x=\frac{1}{20}$ $y=\frac{39}{20}$~~

$x^2-2x+9x^2-6x+1-12x+4-5=0$

$11x^2-20x=0$ $x(11x-20)=0$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)