МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Преобразуем второе выражение:

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta - \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos^2(2\beta)\cdot\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta\,(\cos 2\beta\cdot\sin 2\alpha + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \cancel{\pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)}}\ \pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)}$

$= \pm\frac{2}{\sqrt5}$

Теперь преобразуем первое выражение системы:

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cdot\cancel{\sin 2\beta}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$$\left[\begin{array}{ll} \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 & (1) \\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 & (2) \end{array}\right.$$

№1 (продолжение)

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой.

$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

(1) примет вид: $\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{2(1-tg^2\alpha)}{1+tg^2\alpha} = -1$ (т.к. $1+tg^2\alpha > 0$ можем умножить)

$2tg\alpha + 2 - 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$tg\alpha = t$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

По теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} t=-1 \Rightarrow tg\alpha = -1 \\ t=3 \Rightarrow tg\alpha = 3 \end{array}\right.$

(2) примет вид: $\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} - \frac{2(1-tg^2\alpha)}{1+tg^2\alpha} = -1$

$2tg\alpha - 2 + 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$tg\alpha = t$

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

По теореме Виета:

$\left[\begin{array}{l} t=-1 \Rightarrow tg\alpha = -1 \\ t=\frac{1}{3} \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = -1,\ tg\alpha = \frac{1}{3},\ tg\alpha = 3$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы:

$(x-12y)^2=2xy-12y-x+6 \qquad (x\geq 12y\ ^{(*)})$

$x^2+144y^2-24xy-2xy+12y+x-6=0$

$x^2-x(26y-1)+(144y^2+12y-6)=0$

$D=(26y-1)^2-4\cdot 144y^2-48y+24=$

$=676y^2-52y+1-576y^2-48y+24=100y^2-100y+25=$

$=(10y-5)^2$

$x_1=\frac{26y-1-10y+5}{2}=8y+2$

$x_2=\frac{26y-1+10y-5}{2}=18y-3$

Подставим x_1 во второе уравнение системы:

$(8y+2)^2-12(8y+2)+36y^2-36y-45=0$

$64y^2+32y+4-96y-24+36y^2-36y-45=0$

$100y^2-100y-65=0 \quad |:5$

$20y^2-20y-13=0$

$D_1=100+13\cdot 20=360=(6\sqrt{10})^2$

$y_1=\frac{10-6\sqrt{10}}{20}=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}$

$y_2=\frac{10+6\sqrt{10}}{2}=\frac{5+3\sqrt{10}}{10}$

№2 (продолжение)

$x = 8y_1 + 2 = \frac{8(5-3\sqrt{10})}{10} + 2 = \frac{4(5-3\sqrt{10})}{5} + 2 =$

$= \frac{20 - 12\sqrt{10} + 10}{5} = \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5} = \frac{60 - 24\sqrt{10}}{10}$

$x \geq 12y_1$

$\frac{60 - 24\sqrt{10}}{10} \geq 12\frac{(5-3\sqrt{10})}{10}$

$12(5 - 2\sqrt{10}) \geq 12(5 - 3\sqrt{10})$

$5 - 2\sqrt{10} \geq 5 - 3\sqrt{10}$

$5 + \sqrt{10} \geq 5 \Rightarrow$ пара $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$ удовл. усл (*)

$x = 8y_2 + 2 = 60 + 24\sqrt{10}$

$x \geq 12y_2$

$12(5 + 2\sqrt{10}) \geq 12(5 + 3\sqrt{10})$

$5 + 2\sqrt{10} \geq 5 + 3\sqrt{10}$ – неверно $\Rightarrow y_2$ – посторонний корень.

Теперь подставим x_2:

$(18y-3)^2 - 12(18y-3) + 36y^2 - 36y - 45 = 0$

$324y^2 - 108y + 9 - 216y + 36 + 36y^2 - 36y - 45 = 0$

$360y^2 - 360y = 0$

$360y(y-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ – не удовл. усл (*)} \\ y = 1 \Rightarrow x = 18 - 3 = 15 \text{ – подходит} \end{array}\right.$

Ответ: $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right), (15; 1)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

ОДЗ: $10x-x^2>0 \Leftrightarrow x^2-10x<0 \Leftrightarrow x\in(0;10)$

Заметим, что на ОДЗ $|x^2-10x|=10x-x^2$; используя это и свойство $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$. Выражение неравенства примет вид:

$$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$$

$$(10x-x^2) \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}-(10x-x^2)^{\log_3 4}$$

$$t=10x-x^2,\ t>0$$

$$t \geq t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}$$

Т.к. левая часть положительна, правая часть тоже должна быть положительна.

$$t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}>0$$

$$(t-1)\underbrace{(\log_3 5-\log_3 4)}_{>0}>0$$

$$t>1 \Rightarrow 10x-x^2>1$$

$10x-x^2-1>0$

$x^2-10x+1<0$

$D_1=25-1=24=(2\sqrt6)^2$

$x_1=5-2\sqrt6$ $x_2=5+2\sqrt6$

$$x\in(5-2\sqrt6;5+2\sqrt6)$$

~~Заметим, что $\forall x\in(5-2\sqrt6;5+2\sqrt6)$ $t\geq t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}$~~

~~Заметим, что $\forall x\in(5-2\sqrt6;9]$ $t\geq t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}$, для $x\in(9;5+2\sqrt6)$, $t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}>t$ (т.к. слева и справа монотонно возрастающие функции)~~

№3 (продолжение)

Пусть $h(t) = t$, $g(t) = t^{\log_3 5} - t^{\log_3 5}$.

$f(x) = 10x - x^2 = h(t)$. Тогда $h(t) \geq g(t)$

$f(x) = 10x - x^2$ — парабола, с ветвями направленными вниз $\Rightarrow$ $f(x) \uparrow$ на $[0; x_в]$ и $f(x) \downarrow$ на $[x_в; 10]$

$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{-10}{-2} = 5$.

Заметим, что при $t = 9$ $h(t) = 9$, $g(t) = 9$.

Т.к $g(t)$ есть разность степенных функций, где показатель первой больше, чем показатель второй, то $g(t)$ есть монотонно возрастающая ф-ия (с основанием ф-ии > 1)

$9 > 5$ и $9 < 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow [9; 5+2\sqrt{6})$ ф-ия $h(t)$ убывает, а $g(t)$ возрастает. $t = 9$ — точка пересечения ф-ий значит при $t \in (9; 5+2\sqrt{6})$ решений нер-ва нет в силу монотонного убывания левой части и монотонного возрастания правой. Значит $t \in (1; 9]$

$10x - x^2 = 9$

$x^2 - 10x + 9 = 0$

$x = 1$ — ~~не удов~~ посторонний корень.

$x = 9$

Ответ: $x \in (5 - 2\sqrt{6}; 9]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

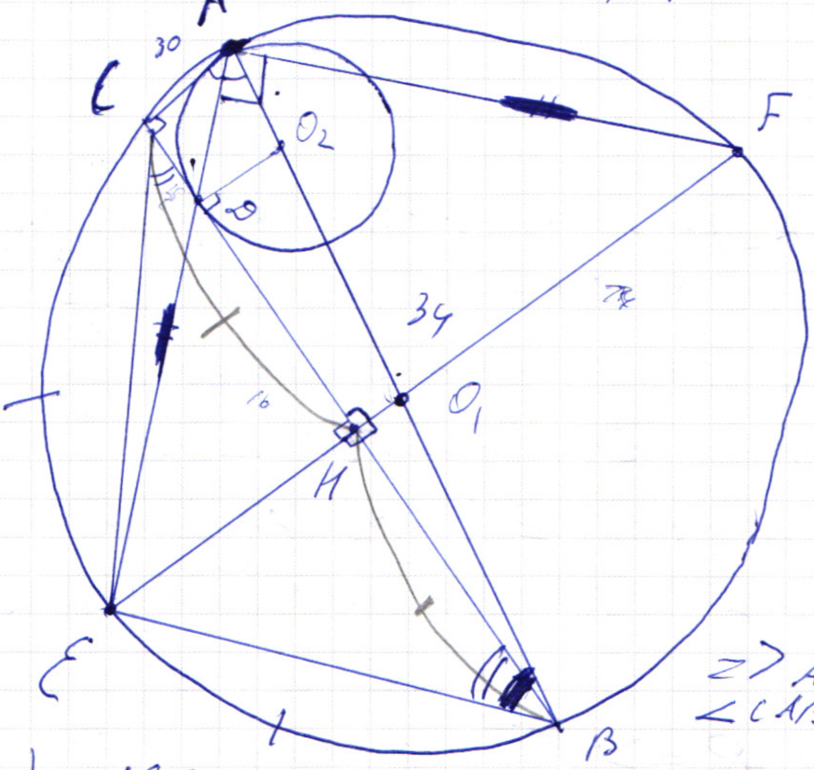
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$

Найти: R_1 - ?

R_2 - ?

$\angle AFE$ - ?

$S_{\triangle AEF}$ - ?

Решение:

1) Ω касается ω в т. A (по усл.)

BC касается ω в т. D (по усл.)

$\Rightarrow$ AE ($D \in AE$) - биссектриса $\angle CAB$ (по лемме Архимеда)

2) $\angle ACB$ опирается на диаметр Ω AB $\Rightarrow \angle ACB = 90°$

O_2D - радиус ω, проведённый в точку касания $\Rightarrow O_2D \perp BC$.

3) AE - биссектриса $\angle CAB$ (п.1) $\Rightarrow$ AD - биссектриса $\angle CAB$ так же. Тогда по свойству биссектрисы:

$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$. Пусть R_1 - радиус Ω, R_2 - радиус ω.

$\frac{15}{17} = \frac{AC}{2R_1}$, т.к AB - диаметр (по усл.)

$AC = 2R_1 \cdot \frac{15}{17}$, $BC = BD + CD = \frac{32}{2} = 16$

4) По т. Пифагора для $\triangle ACB$:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$

$4R_1^2 = 4R_1^2 \cdot \frac{225}{289} + 256$

$4R_1^2 \cdot \frac{64}{289} = 256 \Leftrightarrow 2R_1 \cdot \frac{8}{17} = 16 \Leftrightarrow R_1 = 17 \Rightarrow AC = 30$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№4 (продолжение)

5) $\angle ABC$ – общий; $\angle ACB = 90°$; $\angle O_2DB = 90°$ $\Rightarrow \Delta ACB \sim \Delta O_2DB$ (по 2 углам)

$\Rightarrow \frac{AB}{O_2B} = \frac{BC}{BD}$

$\frac{2R_1}{2R_1 - R_2} = \frac{16 \cdot 2}{17}$

$34R_1 = 32(2R_1 - R_2) \Leftrightarrow 34R_1 = 64R_1 - 32R_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 32R_2 = 30R_1 \Rightarrow R_2 = \frac{30}{32}R_1 = \frac{15}{16}R_1 = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

6) Пусть $H = BC \cap FE$, т.к. AE – биссектриса $\angle CAB$ $\Rightarrow E$ – середина дуги $\smile CB \Rightarrow \angle ECB = \angle CBE$ (как опир. на равные дуги окр Ω) $\Rightarrow \Delta CEB$ – равнобедр. (по пр.) $\Rightarrow CE = EB$ (по опр.) $\Rightarrow EH$ – сер. пер. (по св. ву равнобедр Δ) $\Rightarrow O_1 = EF \cap AB$, т.к. O_1 – центр опис. окр. ΔACB, который совпадает с центром $\Omega \Rightarrow EF$ – диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EAF = 90°$ (как опир. на диаметр EF) и $EF = 2R_1 = 34$

7) По формуле биссектрисы $AD = \sqrt{AB \cdot AC - CD \cdot BD} = \sqrt{34 \cdot 30 - \frac{255}{4}} = \sqrt{\frac{3825}{4}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 17 \cdot 25}{4}} = \frac{3 \cdot 5}{2}\sqrt{17} = \frac{15}{2}\sqrt{17}$

8) $CD \cdot BD = AD \cdot DE$

$\cancel{\frac{255}{4}}$ $\frac{15 \cdot 17}{4_2} = DE \cdot \frac{15}{2}\sqrt{17}$

$DE = \frac{17}{2\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow AE = \frac{16\sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{8\sqrt{17}}{34} = \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

9) $\cos\angle AFE = \sqrt{1 - \sin^2\angle AFE} = \sqrt{1 - \frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow AF = FE \cdot \cos\angle AFE = \frac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

10) $S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17} = 8 \cdot 17 = 136$

Ответ: $R_1 = 17$

$R_2 = \frac{255}{16}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$S_{\triangle AFE} = 136$

№6

~~$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$ (*) , $x \in [\frac{1}{4}; 1]$~~

~~Пусть $f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$, $g(x) = -32x^2+36x-3$~~

~~Чтобы выполнялось условие (*) для $\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие~~

~~$\cancel{\min(f(\frac{1}{4}); g(\frac{1}{4})) \leq ax+b \leq \max(f(1); g(1))}$~~

~~$f(\frac{1}{4}) = 3$ $\quad g(\frac{1}{4}) = 9$~~

~~$f(1) = 0$ $\quad g(1) = 1$~~

~~$\min(f(\frac{1}{4}); f(1); g(\frac{1}{4}); g(1)) \leq ax+b \leq \max(f(1); g(1); f(\frac{1}{4}); g(\frac{1}{4}))$~~

~~$\leq ax+b$~~

№6.

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$, $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

Для того чтобы выполнялось неравенство $\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$, необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось для $x = \frac{1}{4}$ и $x = 1$ одновременно.

$x = \frac{1}{4}$:

$3 \le \frac{a}{4} + b \le 4$

$3 - b \le \frac{a}{4} \le 4 - b$

$\frac{3}{4} - \frac{b}{4} \le a \le 1 - \frac{b}{4}$

Если $b=0$: $a \in [\frac{3}{4}; 1]$

$x = 1$:

$0 \le a + b \le 1$

~~$b \in [0; 1]$~~

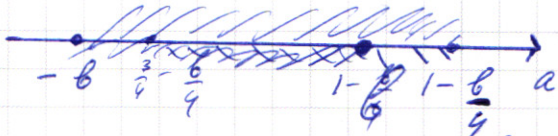
~~$a = 1 - b$~~

$-b \le a \le 1 - b$

Если $b=0$ $a \in [0; 1]$

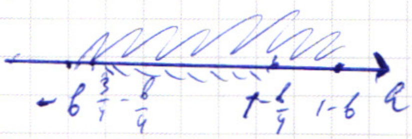
$a \in [\frac{3}{4}; 1]$

Если $b > 0$:



$a \in [\frac{3}{4} - \frac{b}{4}; 1 - b]$

Если $b < 0$: $a \in [\frac{3}{4} - \frac{b}{4}; 1 - \frac{b}{4}]$



Ответ: при $b=0$, $a \in [\frac{3}{4}; 1]$

при $b > 0$, $a \in [\frac{3}{4} - \frac{b}{4}; 1 - b]$

при $b < 0$, $a \in [\frac{3}{4} - \frac{b}{4}; 1 - \frac{b}{4}]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$2 \leq x \leq 25$

$2 \leq y \leq 25$

$f(x/y) < 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(x) < -f\left(\frac{1}{y}\right)$

Простые числа от 2 до 25:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Заметим, что для a и b, принадлежащих этому набору $f(ab) \geq 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, если $p < 4 \Rightarrow f(p) = 0$.

$4 \leq p < 8$, $f(p) = 1$

$8 \leq p < 12$, $f(p) = 2$

$12 \leq p < 16$, $f(p) = 3$

$16 \leq p < 20$, $f(p) = 4$

$20 \leq p < 24$, $f(p) = 5$.

Тогда $f(2) = 0$, $f(3) = 0$

$f(5) = f(7) = 1$

~~$f(11) = f(13) = 3$~~ $f(11) = 2$, $f(13) = 3$

$f(17) = f(19) = 4$

$f(23) = 5$.

Всего пар $(25-2+1)^2 = 24^2 = 576$

Пар, которые не удовлетворяют:

если $x = y \cdot k$, где k - простые число, то

$f(\cancel{x};y) \neq 0$. Таких чисел $(25-9)\cdot\frac{(25-9)}{2} =$

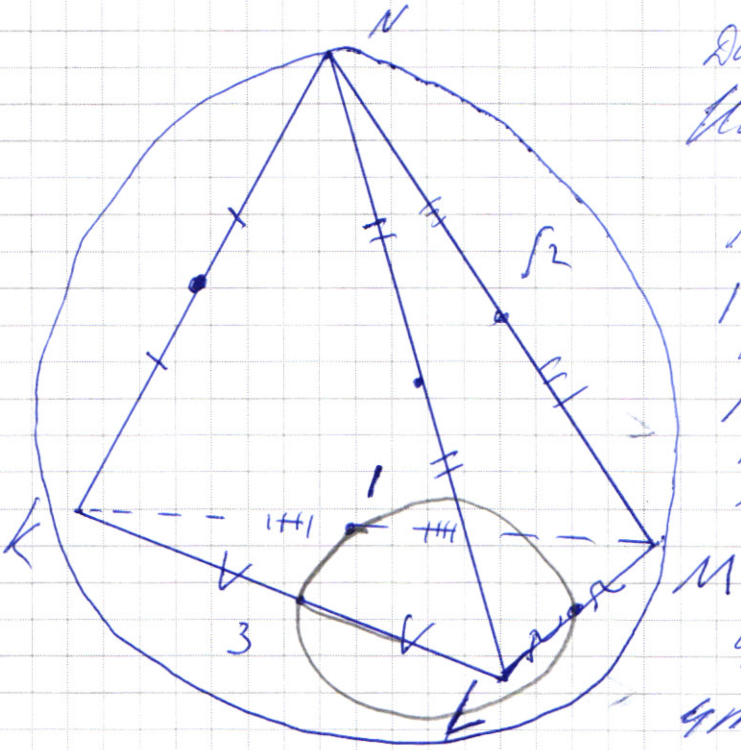
$= \frac{16^2}{2} = \frac{256}{2} = 128.$

Тогда, подходящее условию пар $(x;y)$:

$576 - 128 = 448$

Ответ: 448

№7



Дано: $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$

Найти: LM − ?

R − ?

Решение:

1) Заметим, что из-за того, что $NM = \sqrt{2}$ и все точки середин сторон кроме MN лежат на одной сфере, ~~видно~~ что $\angle KML = 90^\circ$ $\Rightarrow LM = \sqrt{2}$ (по т. Пифагора)

2) $R = \frac{1}{2} KL$ (т.к. $\angle KML = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow R = 1{,}5$

Ответ: $LM = \sqrt{2}$

$R = 1{,}5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$tg\alpha - ?$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\beta\cdot\cos\beta$

$\sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha = \frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha+1} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1+1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(2(\alpha+2\beta))+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{1}{5}$

$(\sin\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos\alpha)(\cos\alpha\cdot\cos2\beta-\sin\alpha\sin\beta)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{1}{5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin2\alpha\cdot2\cos^2 2\beta-\sin2\alpha+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin2\alpha\cdot2\cos^2 2\beta-\cancel{\sin2\alpha}+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha+\cancel{\sin2\alpha} = -\frac{2}{5}$

$2\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos2\beta(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha) = -\frac{1}{5}$

$\cos2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{5}$

$\cos2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{5\sqrt5}$

$\cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha = -1$

$\sin2\alpha = -(2\cos2\alpha+1)$

$\frac{\sin2\alpha}{2\cos2\alpha+1} = -1$

$\sin\alpha =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5-2\sqrt{6} < 10$ $\quad$ $5+2\sqrt{6} \cdot 10$

$-5 < 2\sqrt{6}$ $\quad$ $\cancel{-5} \quad \cancel{2\sqrt{6}}$

$5-2\sqrt{6} > 0$ $\quad$ $2\sqrt{6} < 5$

$5 > 2\sqrt{6}$

$25 > 24$

$t^{\log_3 3} + 6^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$10x - x^2 = 5^{\log_3(10x-x^2)} - 4^{\log_3(10x-x^3)}$

$t = 5^t - 4^t$

$t + 4^t = 5^t \quad | : 5^t$

$\frac{t}{5^t} + \frac{4}{5} = 1$

$5+2\sqrt{6} \quad 9$

$2\sqrt{6} \quad 4$

24

$24 < 125-64$

$\cancel{x^2 - 10x = 9}$

$10x - x^2 = 9$

$x^2 - 10x + 9 = 0$

$x = 1$

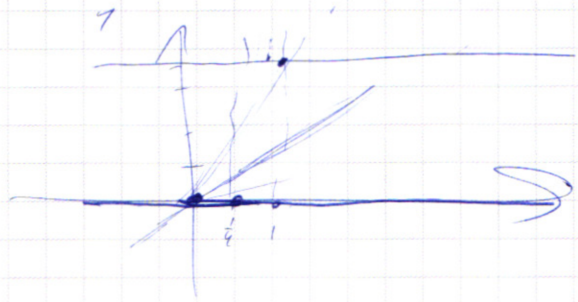
$x = 9$

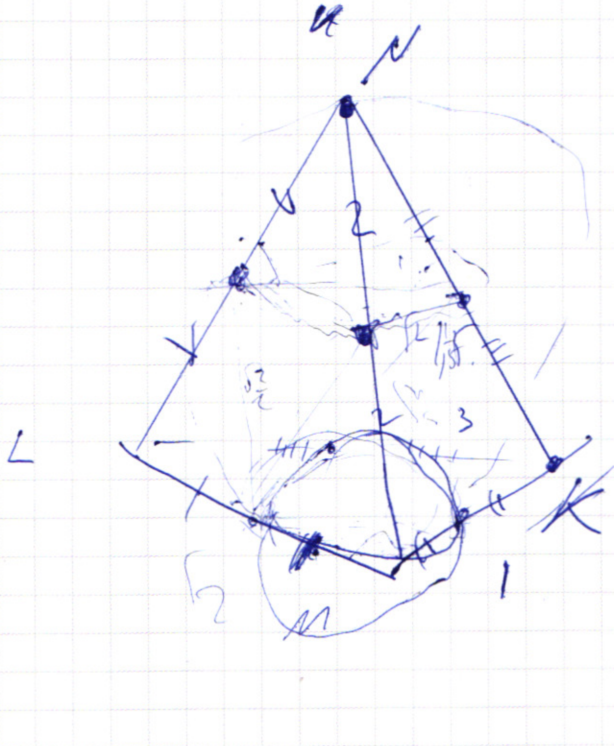
☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$O \quad \Sigma \; ax + b \in y$





$\angle 3$

$f(6) = 0$

$f(2)$

$x : y$

$\frac{24}{24}$
6

$x = y \cdot k$

546
128
548

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

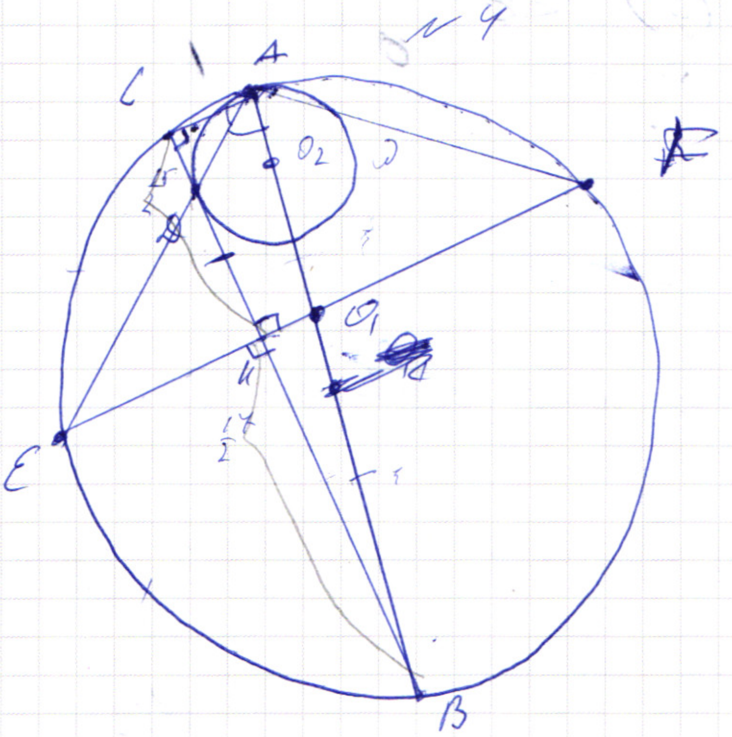
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$= CB = \frac{32}{2} = 16$

$CH = HB = \frac{1}{2} BC = 8$

$\frac{AC}{AB} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{17}{2}}$

$\frac{AC}{2R} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{17}{2}}$

$2R = \frac{AC \cdot 17}{15}$

$AC = \frac{15}{17} \cdot 2R$

$6 \cdot 65 = 360 + 30 = 330$

$6 \cdot 55 =$
$= 6 \cdot 50 + 6 \cdot 5 =$
$= 300 + 30 = 330$

$3825 \,|\, 55$

$15 \cdot 17 =$

$\times 15$
17
105
$+ 15$
255

$17 \cdot 8 =$
$= 80 + 56 =$
$= 136$

4080
255
3825

3825 | 5
25 | 153
132
125
75

$289 - 225 = 64$

$900 + 256 = 1156 \,|\, 34$
102 | 3
136

153 | 3
15 | 17
61

1020
255
765

$\times 34$
4
136

$\times 34$
30
$34 \cdot 3 = 1020$

1020

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№ 5

$\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(x) = cx =$

$x \in N$
$y \in N$

$-32 \cdot \frac{1}{16} + \frac{36}{4} - 3 =$

$= -2+9-3 = 4$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

>0

$f(x) < 0$

$36 \cdot 7 =$
$= 210+$

№ 6.

Чтобы неравенство было выполнено для всех x

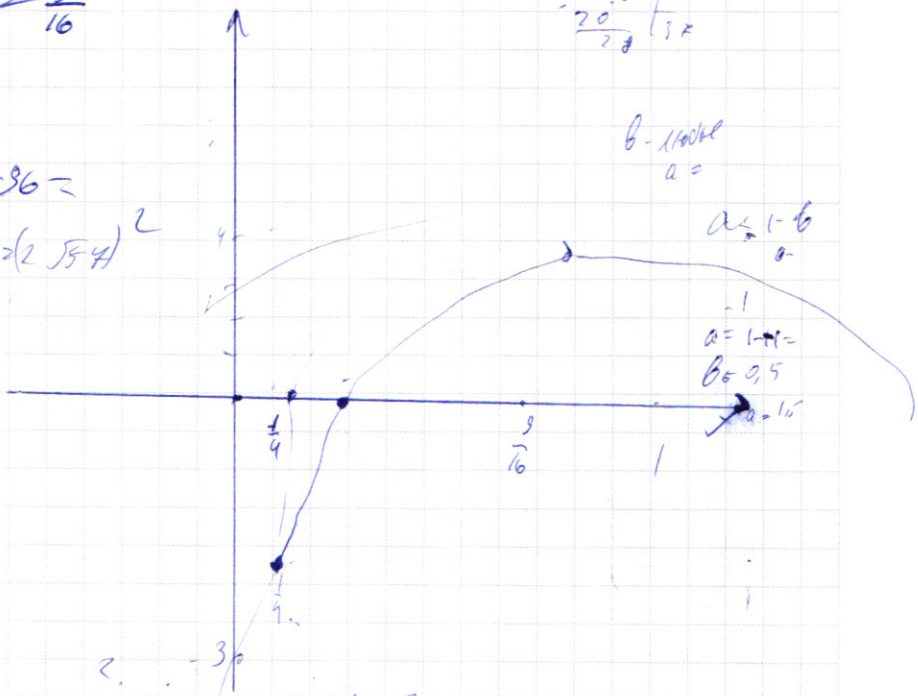
$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = \frac{4(4x-5)}{4x-5} + \frac{4}{4x-5} =$

$= 4 + \frac{4}{4x-5}$

$x \to \infty \; f(x) \to 4$

$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{-36}{64} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

$324 - 96 = 228$



$32x^2 - 36x + 3 = 0$

$D_1 = 324 - 3 \cdot 32 = 324 - 96 =$

$= \sqrt{228} = 4\sqrt{57} = (2\sqrt{57})^2$

$x_1 = \frac{36 - 2\sqrt{57}}{32}$

$x_2 = \frac{36 + 2\sqrt{57}}{32} > 1$

$\frac{36 - 2\sqrt{57}}{32} < \frac{1}{4}$

$36 - 2\sqrt{57} > 8$

$28 > 2\sqrt{57}$

$32 \cdot \frac{9 \cdot 9}{16 \cdot 16} - \frac{36 \cdot 9}{16} + 3 =$

$= \frac{81 \cdot 2 - 36 \cdot 9 + 48}{16} =$

$= 162 + 48 -$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{1}{5}$

$(\sin\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos\alpha)(\cos\alpha\cdot\cos2\beta-\sin2\beta\sin\alpha)+$ $+\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{5}$

$(\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos\alpha)(\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin\alpha)+$ $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{5}$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\sin^2\alpha+\frac{2}{5}\cos^2\alpha-\frac{4}{5}\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{5}$

$\frac{2}{5}\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{2}{5}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\frac{1}{5}$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1$

$\sin2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\quad\cos2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{2(1-tg^2\alpha)}{1+tg^2\alpha}=-1$

$2tg\alpha+2-2tg^2\alpha=-1-tg^2\alpha$

$-tg^2\alpha+2tg\alpha+3=0$

$tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0$

$tg\alpha=t$

$t^2-2t-3=0$

$t=-1$

$t=3$

$\sin2\alpha-2\cos2\alpha=-1$

$\frac{2tg\alpha-2(1-tg^2\alpha)}{1+tg^2\alpha}=-1$

$2tg\alpha-2+2tg^2\alpha=-1-tg^2\alpha$

$3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$

$tg\alpha=t$

$3t^2+2t-1=0$

$t=-1$

$t=\frac{1}{3}$

№2

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$36=2\cdot18=2\cdot6\cdot3$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45+36+9=90$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$$(x-12y)^2=2xy-12y-x+6$$

$$x^2+144y^2-24xy-2xy+12y+x-6=0$$

$$x^2-26xy+x+144y^2+12y-6=0$$

$$x^2-x(26y-1)+(144y^2+12y-6)=0$$

$$D=(26y-1)^2-4\cdot144y^2-48y+24=$$

$$=676y^2-52y+1-576y^2-48y+24=$$

$$=100y^2-100y+25=(10y-5)^2$$

$$2\cdot50=5\cdot10$$

$$x=\frac{26y-1-10y+5}{2}=\frac{16y+4}{2}=8y+2$$

$$x=\frac{26y-1+10y-5}{2}=\frac{36y-6}{2}=18y-3$$

$$x^2+36y^2-12x-36y=45$$

$$x^2-12x+36y^2-36y=45$$

$108+216+36=$
$=108+252=$
$=360$

$$324y^2-108y+9-216y+36+36y^2-36y-45=0$$

$$360y^2-360y=0$$

$$360y(y-1)=0$$

$12\cdot8=80+16=96$

$324-36y-36y^2$

$-100y$

$-20-452$

260

№3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x-x^2\geq0 \Leftrightarrow |x^2-10x|=10x-x^2$$

$x^2-10x<0$
$x(x-10)<0$ $x\in(0;10)$

$$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x-x^2\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}-(10-x^2)^{\log_3 4}$$

$$t\geq t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}$$

$$(t-1)(\underbrace{\log_3 5-\log_3 4}_{>0})$$

$t>1$

$x\in(1;10)$

$20+16\geq4+16$