МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

Огранич.:
$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$+$ -6 $-$ 0 $+$

т.к. $x^2+6x>0$, то $|x^2+6x| = x^2+6x$.

пусть $t = x^2+6x$, $t>0$, тогда

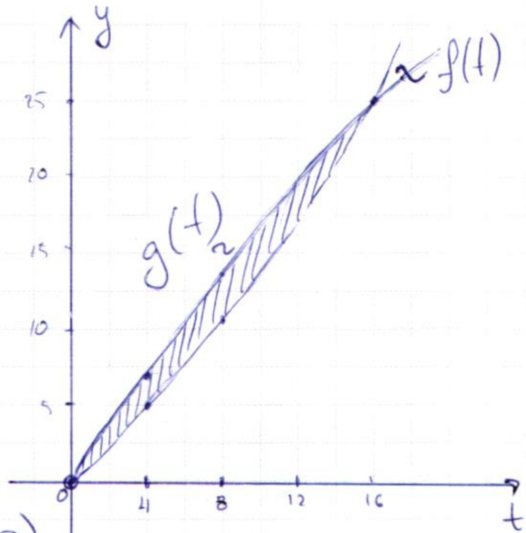
$3^{\log_4 t} + t \ge t^{\log_4 5}$

$\Leftrightarrow t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \ge t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \ge 5^{\log_4 t}$

пусть $f(t) = 5^{\log_4 t}$ — монотонно возраст. функция,
$g(t) = 3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t}$, $t>0$.

Решим графически:



По рисунку: $t \in (0; 16]$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x \le 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \\ x^2+6x-16 \le 0 \end{cases}$

Решим уравнение:
$x^2+6x-16=0$
$x=-8$
$x=2$ (по Виету)

$\Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \\ x\in[-8;2] \end{cases} \Rightarrow x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

№6

$\boxed{*}$ $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ $\quad x\in(1;3]$

пусть $f(x)=ax+b$ – прямая

$g(x)=8x^2-34x+30$ – парабола

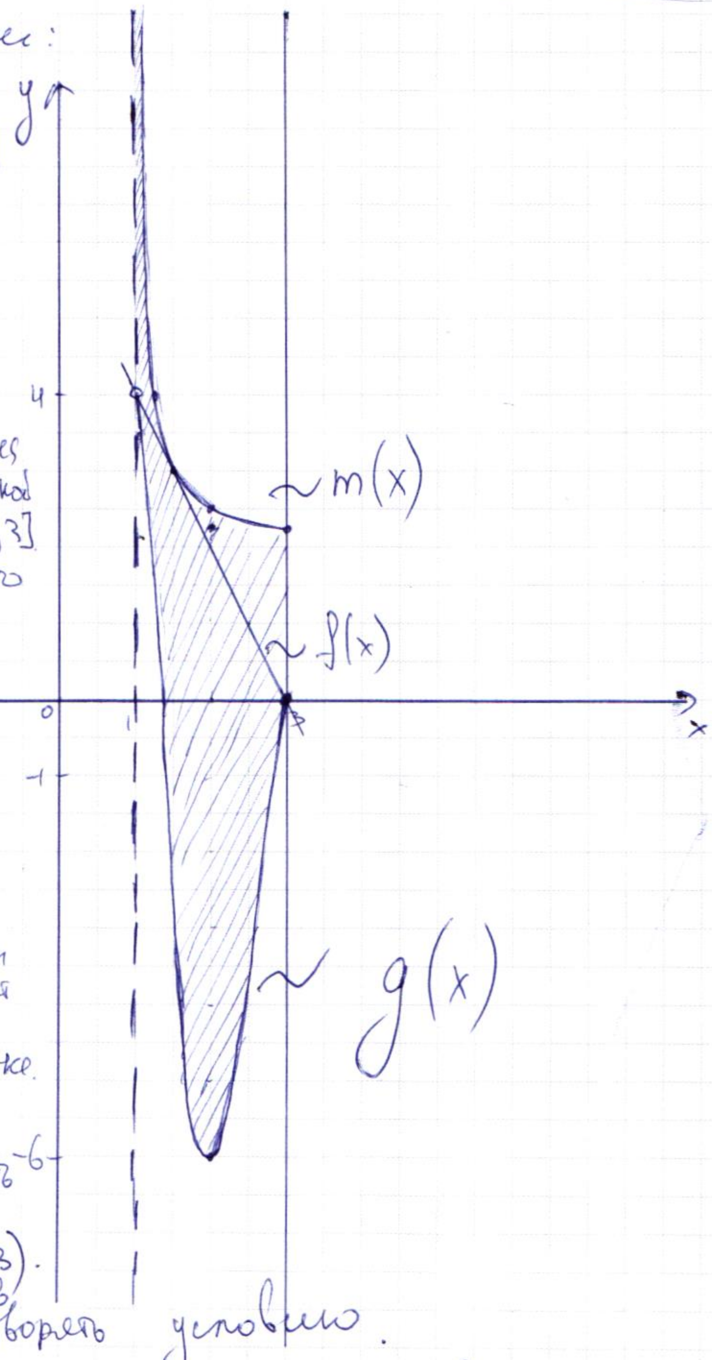
$m(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$.

$\boxed{8x^2-34x+30}$

Решим графически:

По условию при $x\in(1;3]$ ~~прямая $ax+b$ должна~~ ~~для удовл~~ должно выполняться условие * $\Rightarrow$ прямая $ax+b$ должна находится в закрашенной области на всех $x\in(1;3]$

Это также означает, что прямая $ax+b$ может ~~пересекать~~ иметь с $g(x)$ и $m(x)$ не более, чем по 1й общей точке, т.к. в противном случае ~~при~~ найдутся такие значения $x\in(1;3]$, при которых ~~эта~~ прямая выходит из закрашенной области на заданном промежутке.



По рисунку видно, что такая прямая может быть ~~все~~ одна: она проходит через точки $(3;0)$; $(1,5;3)$.

При изменении a или b, прямая ~~ее~~ перестает удовлетворять условию.

$\Rightarrow$ a и b – единственная пара, подходящая под условие.

$\begin{cases} 0=3a+b \\ 3=1{,}5a+b \end{cases}$ $\quad a=-2$, $b=6$ $\quad y=-2x+6$

$3=-1{,}5a$

Ответ: $(-2;6)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$

ОДЗ:
$3y \geq 2x$
$3xy-2x-3y+2 \geq 0$

(1): $\overset{\text{с ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$ $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+(-12x-3x+3)y+4x^2+2x-2=0$

$D=(-15x+3)^2-36(4x^2+2x-2)=225x^2+9-90x-36\cdot4x^2-$
$-36\cdot2x+36\cdot2=81x^2-162x+81=81(x^2-2x+1)=$
$=(9(x-1))^2$

$\left[\begin{array}{l} y_1=\dfrac{15x-3+9(x-1)}{18}=\dfrac{15x-3+9x-9}{18}=\dfrac{24x-12}{18}=\dfrac{4x-2}{3} \\ y_2=\dfrac{15x-3-9(x-1)}{18}=\dfrac{15x-3-9x+9}{18}=\dfrac{6x+6}{18}=\dfrac{x+1}{3} \end{array}\right.$

y_1: подставим в (2):

$3x^2+3\left(\dfrac{4x-2}{3}\right)^2-6x-4\left(\dfrac{4x-2}{3}\right)=4 \quad |\cdot3$

$9x^2+(4x-2)^2-18x-4(4x-2)=12$

$9x^2+16x^2-16x+4-18x-16x+8=12$

$25x^2-50x=0 \quad |:25$

$x^2-2x=0$

$x=0$ или $x=2$.

$y=\dfrac{-2}{3}$ $\qquad$ $y=\dfrac{6}{3}=2$

– пара не удовл. ОДЗ. $\qquad$ – пара удовлетворяет ОДЗ.

y_2: подставим в (2)

$\rightarrow$

(2): $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$ $\qquad y_2 = \frac{x+1}{3}$

$3x^2 + 3\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{x+1}{3}\right) = 4 \quad | \cdot 3$

$9x^2 + (x+1)^2 - 18x - 4(x+1) = 12$

$9x^2 + x^2 + 2x + 1 - 18x - 4x - 4 = 12$

$10x^2 - 20x - 15 = 0 \quad | : 5$

$2x^2 - 4x - 3 = 0$

$\frac{D}{4} = 4 + 6 = 10$

$\boxed{3}$ $x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$ $\quad$ или $\boxed{4}$ $x = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$y = \frac{\frac{2+\sqrt{10}}{2}+1}{3} = \frac{2+\sqrt{10}+2}{2\cdot 3} = \frac{4+\sqrt{10}}{6}$ $\quad\Big|\quad$ $y = \frac{\frac{2-\sqrt{10}}{2}+1}{3} = \frac{2-\sqrt{10}+2}{6} = \frac{4-\sqrt{10}}{6}.$

ОДЗ: $3y - 2x \geq 0$

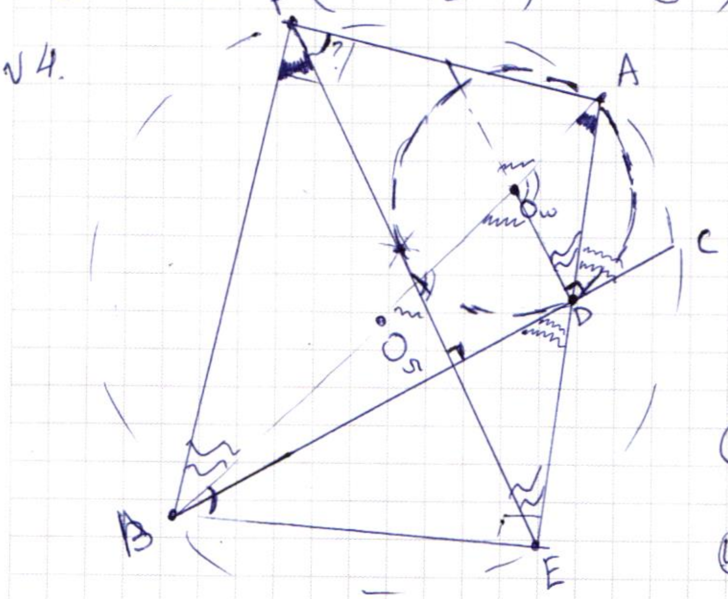
$3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0$

Пара $\boxed{3}$ не удовлетворяет ОДЗ

Пара $\boxed{4}$ удовлетворяет ОДЗ

Ответ: $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$; $(2; 2)$.

№4.



(1) Т.к. окружности касаются, то их центры лежат на одной прямой с точкой касания.

(2). $O_\omega D \perp BC$ как касательная к окружности, $EF \perp BC$ по условию $\Rightarrow EF \parallel O_\omega D$

(3) $\angle BFA = \angle BEA = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр

(4) Отметим равные углы на рис (углы, опир на одну дугу)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{-8}{\sqrt{17}}$.

~~$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin 2\beta\cdot\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)} \pm$~~
~~$\pm -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \pm \sin 2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$~~
~~в зависимости от того, в какой четверти находится $\sin(2\alpha+2\beta)$.~~

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$= \frac{1}{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = \frac{-8}{17}$.

$\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = \frac{-8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{16\cdot\sqrt{17}}{17} = \frac{16}{\sqrt{17}}$

Заметим, что $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} = \pm\frac{16}{\sqrt{17}}$.

$\boxed{1}$ Если $(2\alpha+2\beta)$ в IV четверти:

$\Rightarrow \cos 2\beta = \cos(2\alpha+2\beta)$

$2\alpha = 0$, $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \pi n;\ n\in\mathbb{Z}}$

$\boxed{2}$ Если $2\alpha+2\beta$ в III четверти, то

$\cos 2\beta = -\cos(2\alpha+2\beta)$

$2\alpha = 180$

$\alpha = 90$ — не подх по усл.

МФТИ

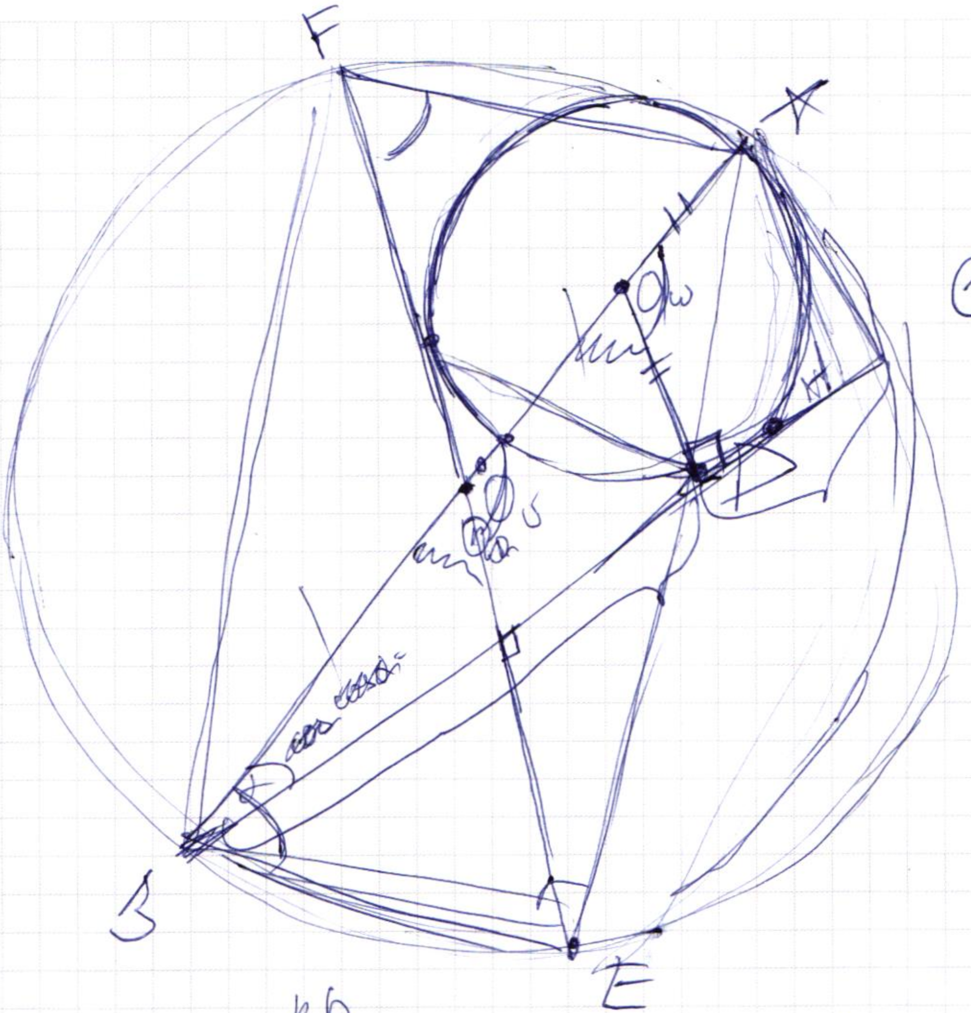
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

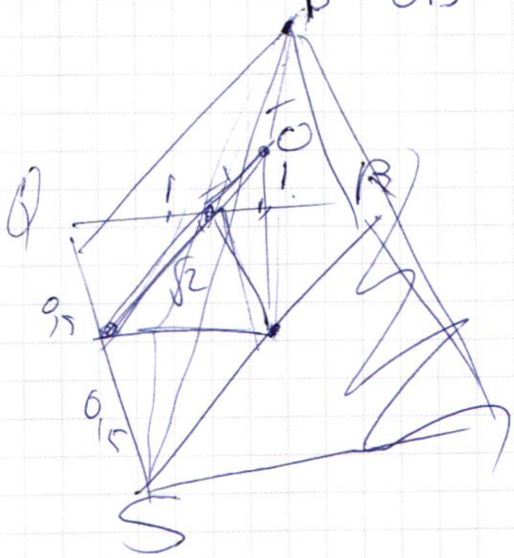


$\cos\alpha = \frac{BD}{OB}$

$EF \parallel O_\omega D$

$BD = \frac{13}{2}$

$RS - ?$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

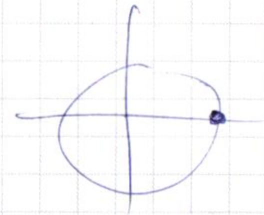
(Нумеровать только чистовики)

$2\sin(\alpha+\beta)\cancel{)}\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$\frac{1}{4}(\sin(\alpha+\beta+\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta-\alpha-\beta))$

$\frac{1}{4}\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{4}\sin 2\alpha\cos$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

Найти все такие пары чисел a, b, что нер-во выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$$

$2x-2>0$ по усл

$$\begin{cases} 4x-3 \geq (ax+b)(2x-2) \\ ax+b \geq 8x^2-34x+30 \end{cases}$$

$8x^2-34x+30 \vee 0$

$\frac{D}{4} = 17^2 - 30\cdot 8 =$

$= 289 - 240 = 49 = 7^2$

$x = \frac{17 \pm 7}{8} = 3$; $\frac{10}{8}$

$17 \cdot 17 = 289$

$m(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$

x	0	2	3
y	1,5	2,5	

$\frac{8-3}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$\frac{9}{4} = 2{,}25$

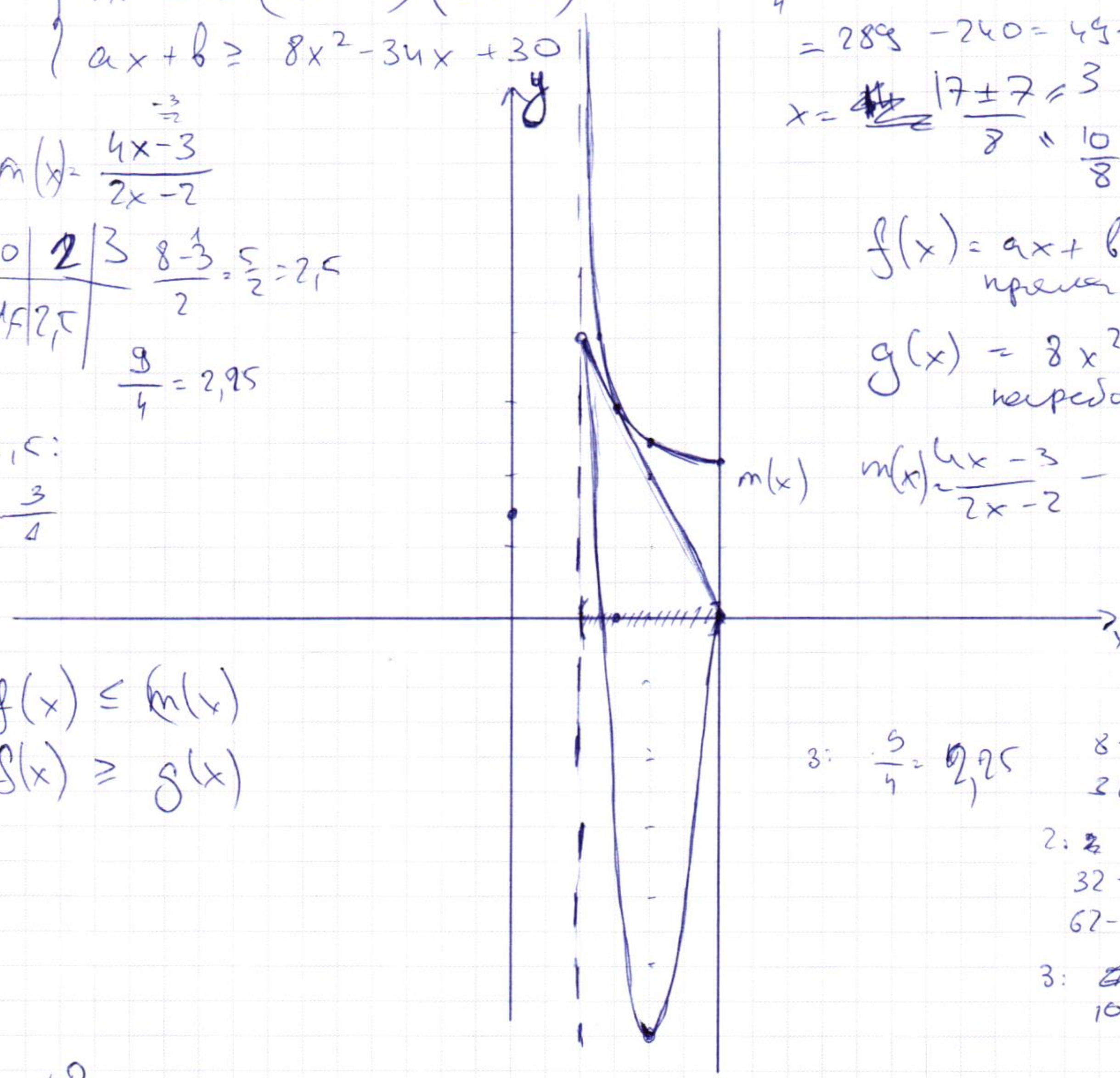
1,5: $\frac{3}{4}$

$f(x) = ax+b$ – прямая

$g(x) = 8x^2-34x+30$ – парабола

$m(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$ – ?

$\frac{34}{16}$



$f(x) \leq m(x)$

$f(x) \geq g(x)$

3: $\frac{9}{4} = 2{,}25$

$8-34+30$

$38-34=4$

2: $32-34\cdot 2+30$

$62-68=-6$

3: ~~27-3~~ $102-34\cdot 3$

$$⑦: -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17} \quad | \cdot \sqrt{17}$$

$$4\sin 2\beta - \cos 2\beta = -\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$4\sin 2\beta - \cos 2\beta = 8\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + 8\sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha$$

$$(8\sin 2\alpha + 1)\cos 2\beta = 4\sin 2\beta\,(2\cos 2\alpha - 1)$$

$\frac{4+\sqrt{10}}{2} \geq 2+\sqrt{10}$

$2+\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2+\sqrt{10}$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2} \geq 2-\sqrt{10}$

$2-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2-\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$a^x = \log$

$3^{\log_3 3^{\log}}$ $t=1$ - проверить

$t^{\log_t 3 \cdot \log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$\log_4 5 \cdot x = \log_4 3$

$x = \frac{\log_4 3}{\log_4 5} = \log_5 3$

$\cancel{t(t^{\log_4 3 - 1} + 1) \geq t^{\log_4 5}}$

$t^{\log_4 5}\left(t^{\log_5 3} + t^{\log_5 4}\right) \geq t^{\log_4 5}$

$\log_4 5 \cdot x = 1$

$x = \frac{\log_4 4}{\log_4 5}$

$t^{\log_4 5}\left(t^{\log_5 3} + t^{\log_5 4} - 1\right) \geq 0$

>0 - всегда

$t^{\log_5 3} + t^{\log_5 4} \geq 1$

$3^{\log_4 (x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} = t$

$3^{\log_4 (x^2+6x)} + 4^{\log_4 (x^2+6x)} \geq 5^{\log_4 (x^2+6x)}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \vee \frac{1}{5}$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

$3^2 + 4$

$\cancel{8 \quad 16 \quad 25}$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{4} \vee \frac{1}{25}$

$t > 2$: $3^3 + 4^3 \overset{?}{\vee} 5^3$

$\frac{4+9}{36} \vee \frac{1}{25}$

$t \in [0, 2)$

$27 + 64 \geq 125$ - неверно

$\frac{13}{36} \vee \frac{1}{25}$

Если так: $t < 0$:

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$D = 81(x-1)^2$

$$y = \frac{15x - 3 \pm 9(x-1)}{18}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{15x - 3 + 9x - 9}{18} = \\ y = \frac{15x - 3 - 9x + 9}{18} = \frac{6x+6}{18} = \frac{x+1}{3} \end{array}\right.$$

$t > 0$

$\log_4 4 \cdot 2 = 1 + \log_4 2$

$5 \cdot \sqrt{5}$

$5 \cdot 2 = 10$

$$3x^2 + 3\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{x+1}{3}\right) = 4 \,/\cdot 3$$

$$9x^2 + x^2 + 2x + 1 - 18x - 4x - 4 = 12$$

$$10x^2 - 20x - 15 \,/:5$$

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 6 \cdot 4 = 40$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$3 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{4}$

$1{,}7 \cdot 3 + 4 \cdot 2$

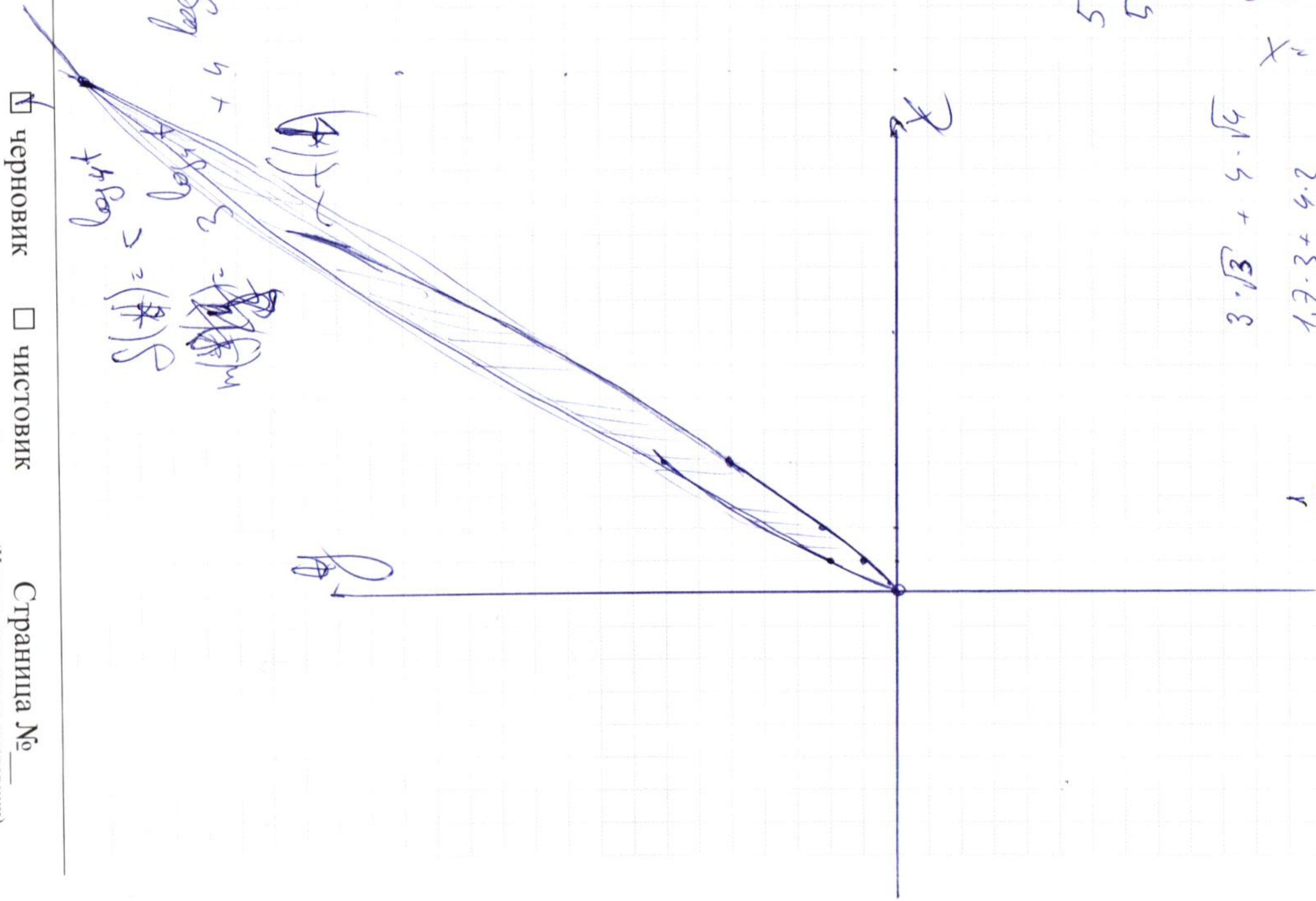
$8 + 3 + 2{,}1$

$13{,}1$

$\frac{1}{4^{10}}$

4^{-10}

3^{-10}



$+ 4 \log_4 t + \log_4 t$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_5 4} = 4^{\log_4 3 \cdot \log_5 4}$

$4^{\log_5 3}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ наибольшее

$f(p) = [p/4]$ – целое число, не превосходящее $p/4$ → округление вниз.

Кол-во пар натуральных чисел x, y таких, что $\begin{cases} 3 \le x \le 27 \\ 3 \le y \le 27 \\ f(x/y) < 0 \end{cases}$

, а p – простое для любого (простого?)

$[ab/4] = [a/4] + [b/4]$

$\left[\frac{x}{4y}\right] < 0$

$2 + 4x + 3y = x^2 + 3xy$

Рассмотреть как квадратное относ. переменной!

$\log_4 3 \cdot x = 1$

$x = \log_3 4$

$\frac{\log_4 5 \cdot}{\log_4 4} = \log_4 5$

$t^{\log_3 4} + 1 \ge t^{\log_4 5}$

Если $t = 1$ – нер-во выполняется.

Если $t > 1$, то

$t^{\log_4 3} + t > t^{\log_4 5}$

$3y - 2x = \sqrt{3xy}$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \quad | \cdot 3$

$9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y = 12$

$9y^2 = 12 + 18x + 12y - 9x^2$

$12 + 18x + 12y - 9x^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$10 + 20x + 15y - 5x^2 - 15xy = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

ОДЗ: $3y - 2x \geq 0$

$3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0$

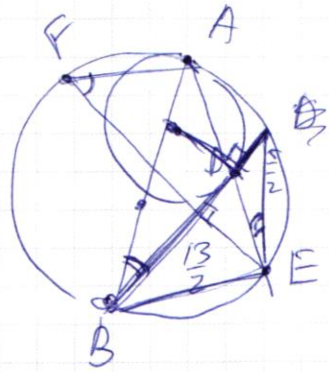
$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$3x^2 + 3\left(\frac{4x-3}{3}\right)^2 + 6x - 4\left(\frac{4x-3}{3}\right) = 4$

$3x^2 + \frac{(4x-3)^2}{3} + 6x - 4\left(\frac{4x-3}{3}\right) = 4 \quad |\cdot 3$

$6 - 4 = \sqrt{3\cdot 4 - 4 - 6 + 2}$

$6 \geq 4$



$BC = 9.$

$4(2x-1)^2$

$4(11x^2 + 1 - 4x)$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

x:

$4x^2 + (-12y - 3y + 2)x + 9y^2 + 3y - 2 = 0$

$D = (2 - 15y)^2 - 16(9y^2 + 3y - 2) =$

$= 4 - 60y + 225y^2 - 144y^2 - 48y + 32 =$

$=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x^2+3xy=2+4x+3y \\ 9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$$\left[\begin{array}{l} 3y=4x-3 \\ 3y=x+1 \end{array}\right.$$

Относ. x:

$3y \geq 2x$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$\frac{D}{2}=9-3(3y^2-4y-4)=$

$=9-9y^2+12y+12=-9y^2+12y+21$

Относ. y:

$3y^2-4y+3x^2-6x-4=0$

$\frac{D}{4}=4-\cancel{3(3x^2-6x-4)=4-9x^2+18x+12}=$

$=-\cancel{9}x^2+18x+16$

$2\cancel{8}$

$\frac{D}{4}=100+70=170$

$y_2=\frac{x+1}{3}$

$\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+(3-15x)\cdot\left(\frac{x+1}{3}\right)+4x^2+2x-2=0$

$x^2+2x+1+(3-15x)(3x+3)+36x^2$

$$\begin{array}{r} 72 \\ +\,90 \\ \hline 162 \end{array}$$

9

$2\cdot 81$

$2\cdot 9\cdot 9$

$x+3y$

$x^2+3xy=2+4x+3y$

$x\cdot 3y+(3x)$

$(x^2-4x)=2+3y-3xy$

$\cancel{x(x-4)}=$

беск. мн.

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

y: $9y^2+(3-15x)y+4x^2+2x-2=0$

$72+5$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\,4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$D=(3-15x)^2-9\cdot 4(4x^2+2x-2)=$

$$\begin{array}{r} 225 \\ -\,144 \\ \hline 81 \end{array}$$

$=9-90x+225x^2-36\cdot 4x^2-36\cdot 2x+36\cdot 2=$

$=81x^2-162x+81=81(x^2-2x+1)=81(x-1)^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Ограничения:

$x^2+6x>0$

в огр. $\Leftrightarrow$ $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$x^2+6x - (x^2+6x)^{\log_4 5} + 3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 0$

$3^{\log_3(x^2+6x)} - 3^{\log_3(x^2+6x)\cdot\log_4 5} + 3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 0$

$t = x^2+6x$, $t>0$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t} \geq t(t^{\log_4 5 - 1} - 1)$

$\log_4 3 \cdot \log_4 t \geq \log_4 t + \log_4(t^{\log_4 5 - 1} - 1)$

$\log_4 t(\log_4 3 - 1) \geq \log_4\left(\frac{t^{\log_4 5} - t}{t}\right)$

$\log_4 t(\log_4 3 - 1) \geq \log_4(t^{\log_4 5} - t) - \log_4 t$

$\log_4 t \cdot \log_4 3 - \cancel{\log_4 t} \geq \log_4(t^{\log_4 5} - t)$

$t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5} - t$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t \geq 0$

$\alpha = 50$

$\alpha + 2\beta = 50$

$2\alpha + 2\beta - 2\beta = 180$

$\cancel{x^2 + 2x + 1 + x - 5x^2 + 1 - 5x + 4x^2 + 2x - 2 = 0}$

$x^2+2x+1 + (1-5x)(x+1) + 4x^2+2x-2 = 0$

6. $\frac{(x^2+2x+1)}{3} + (3-15x)\cdot\frac{x+1}{3} + 4x^2+2x-2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1)\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2)\end{cases}$$

~~на~~ ОДЗ:

(1): $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-3yx-12xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$(3y+1)^2-1+(2x+1)^2-1-2-15xy=0$

$(3y+1)^2+(2x+1)^2=4+15xy$

(2): $3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=3x^2+3y^2-6x-4y$

$x^2+6y^2+8x+7y+2-15xy=0$

$\sin 2\alpha+4\beta$

$\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta-\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

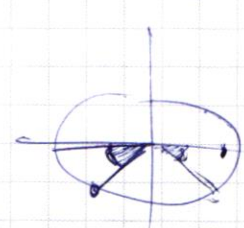
$tg\,\alpha - ?$

1. $\sin(\overset{m}{2\alpha+2\beta})=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)=$

$=\sin m\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos m$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\left(\overset{\pm?}{\sqrt{1-\frac{1}{17}}}\right)=-\frac{8}{17}$



Если +: ~~$\sin 2\beta$~~ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)$.

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9x^2+9y^2-18x-12y=12$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)