

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 25$, $2 \leq y \leq 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN . Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$x - 12y \geq 0$$

$$2xy - 12y - x + 6 \geq 0$$

Решим первое уравнение

$$45 + 12x + 36y \geq 0 \quad \text{т.к. } x^2 + 36y^2 \geq 0$$

$$(x - 12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6$$

$$x^2 - (26y - 1)x + 12y + 144y^2 - 6 = 0$$

$$D = 100y^2 - 100y + 25 = (10y - 5)^2$$

$$x_1 = 18y - 3; \quad x_2 = 8y + 2$$

Решим второе уравнение при $x = x_1$; при $x = x_2$

$$(18y - 3)^2 + 36y^2 - 12(18y - 3) - 36y = 45 \quad (8y + 2)^2 + 36y^2 - 12(8y + 2) - 36y = 45$$

$$360y^2 - 360y = 0$$

$$100y^2 - 100y - 65 = 0$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 1$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ x_{11} = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 1 \\ x_{12} = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = 0,5 + 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \\ x_{23} = 6 + 24 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = 0,5 - \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ x_{24} = 6 - 24 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

Не подходит:

$$-3 - 12 \cdot 0 < 0$$

Не подходит:

$$24 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} - 12 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} < 0$$

$$x_{24} = 6 - 12 \cdot \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Ответ: $(15; 1)$; $(6 - 12 \cdot \frac{\sqrt{10}}{5}; 0,5 - 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10})$

№ 3

$$10x + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3 (10x - x^2)$$

$$(10x - x^2) \log_3 3 + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq 5 \log_3 (10x - x^2)$$

$$3 \log_3 (10x - x^2) + 4 \log_3 |x^2 - 10x| \geq 5 \log_3 (10x - x^2)$$

$$10x - x^2 > 0; \quad \text{значит } x^2 - 10x < 0$$

$$3 \log_3 (10x - x^2) + 4 \log_3 (10x - x^2) \geq 5 \log_3 (10x - x^2)$$

Можно заметить, что $3^2 + 4^2 = 5^2$

т.к. 5^x возрастает быстрее чем $3^x + 4^x$, то

$$\log_3(10x - x^2) \leq 2$$

$$10x - x^2 \leq 9$$

$$x^2 - 10x + 9 \geq 0 \quad (x-9)(x-1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$$

$$10x - x^2 \geq 0 \quad x(x-10) \leq 0 \quad x \in (0; 10)$$

$$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$$

$$\text{Ответ: } (0; 1] \cup [9; 10)$$

~ 1

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$1) \sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \cos^2 \alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} - \sin^2 \alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha + \frac{3}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = 0$$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \frac{3}{2} = 0$$

$$-\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha + 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 3 \quad \operatorname{tg} \alpha = -1$$

$$2) \sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha = 0$$

$$\frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} = 0$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } -1; \frac{1}{3}; 3$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha (2 \cos 2\beta - 1) + \cos 2\alpha (2 \sin 2\beta \cos 2\beta)$$

$$+ \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2 \cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$2 \cos 2\beta \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} \quad \sin 2\beta = -\sqrt{1 - \cos^2 2\beta}$$

$$\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin 2\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

Решим. $f(x) = -32x^2 + 36x - 3$ — парабола, ветви направлены вниз. Значит любая прямая, пересекающая эту параболу будет отсекав часть параболы, проходящую над этой прямой.

Значит $g(x) = ax + b$ меньше $f(x)$ на промежутке $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ при $g(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4})$ и

$$g(1) = f(1)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a + b = -32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 36 \cdot \frac{1}{4} - 3 \\ a + b = -32 + 36 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{1}{4}a + b = -2 + 9 - 3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{1}{4}a + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{1}{4}a + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a = -3 \\ \frac{1}{4}a + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a = -3 \\ \frac{1}{4}a + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$$

Решим. $\varphi(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$

$\varphi'(x) = -\frac{16}{(4x-5)^2}$ функция убывает на промежутке

$[\frac{1}{4}; 1]$ и не еб-се возрастает

$$g(x) \geq \varphi(x) \text{ при } g\left(\frac{1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{1}{4}\right); g(1) = \varphi(1)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{1}{4}a+b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a=-3 \\ \frac{1}{4}a+b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=4 \end{cases}$$

~~а~~ $a = -4$; $b \in [4; 5]$

Ответ: $(-4; [4; 5])$

✓ 5

Цз св-ва $f(ab) = f(a) + f(b)$ если, это
функция логарифмическая.

Тогда ~~вс~~ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow \log_y x < 0$

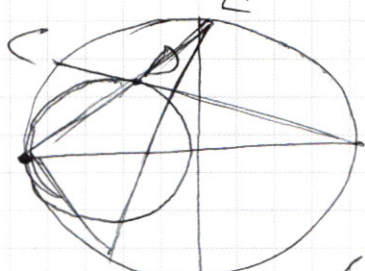
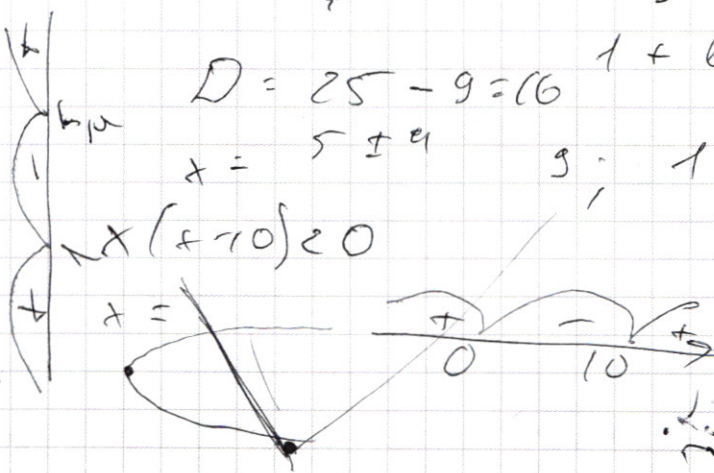
Это условие выполняется ~~+~~ когда $x < y$

Так, при $y = 25$ возьмем 23* натуральных
 x , удовлетворяющих условию.

при $y = 24$ 22 числ. x и т.д.

$$n = \frac{1+23}{2} \cdot 23 = 286 \text{ пар натуральных чисел}$$

Ответ: 286

$324y^2 - 108y + 9 + 36y^2 - 216y + 36 - 36y - 45 = 0$
 $360y^2 - 360y = 0 \quad y^2 - y = 0 \quad y(y-1) = 0$
 $64y^2 + 32y + 4 + 36y^2 - 96y - 24 - 36y - 45 = 0$
 $100y^2 - 100y - 85 = 0 \quad x = 8 \cdot 0,5 = 4$
 $4y^2 - 4y - 1 = 0$
 $20y^2 - 20y - 10 = 0$
 $D = 100 + 80 = 180 \quad 2 \geq 4y$
 $y = \frac{10 \pm \sqrt{360}}{20}$
 $y = 0,5 - 0,97 = -0,47$
 $x = -2$

 $10x + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq x^2 + (10x - x) \log_3 5$
 $10x - x^2 \geq (10x - x^2) \log_3 5 - |x^2 - 10x| \log_3 4$
 $3 \log_3 (10x - x^2) + 4 \log_3 |x^2 - 10x| \geq 5 \log_3 (10x - x^2)$
 $3^2 + 4^2 = 5^2 \quad x^2 - 10x \leq 0$
 $\log_3 (10x - x^2) \leq 2$
 $10x - x^2 \leq 9$
 $x^2 - 10x + 9 \geq 0$
 $D = 25 - 9 = 16$
 $x = 5 \pm 4$
 $x(x-10) \geq 0$


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \left[\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \right. \\ \left. 2 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + 2 \sin \beta \cos \beta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \right. \end{aligned}$$

$$\left[2 \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta \cos^2 \alpha - \right. \\ \left. - 2 \sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \right.$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha (\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2\alpha (2 \sin 2\beta \cos 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha (\cos^2 2\beta - 1 + \cos^2 2\beta) + \cos 2\alpha (2 \sin 2\beta \cos 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha (2 \cos^2 2\beta) + \cos 2\alpha (2 \sin 2\beta \cos 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$2 \cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$2 \cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{h}{b} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = (4) / f$$

$$\frac{h}{b} = \frac{2}{2} + 2 \cdot \frac{2}{2} = (8) / f$$

$$\frac{h}{b} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = (4) / f$$

$$\frac{h}{b} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = (4) / f$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 = 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$x - 12y \geq 0$$

$$2xy - 12y - x + 6 \geq 0$$

$$45 + 12x + 36y \geq 0$$

$$x^2 - 26xy + 12y + x + 144y^2 - 6 = 0$$

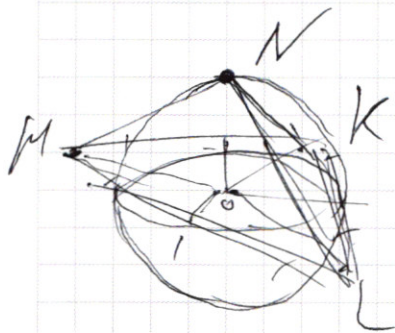
$$x^2 - (26y - 1)x + 12y + 144y^2 - 6 = 0$$

$$D = (26y - 1)^2 - 4(12y + 144y^2 - 6) =$$

$$= 676y^2 - 52y + 1 - 48y - 576y^2 + 24 = 100y^2 - 100y + 25 =$$

$$= 10^2 y^2 - 10 \cdot 2 \cdot 5y + 5^2 = (10y - 5)^2$$

$$x = \frac{26y - 1 \pm (10y - 5)}{2}; \quad \frac{26y - 1 - 10y + 5}{2} \quad \begin{cases} x = 8y - 2 \\ x = 18y - 3 \end{cases}$$



$$KL = 3$$

$$KM = 1$$

$$MN = \sqrt{2}$$

$$OL = \sqrt{9 \frac{9}{4} + R^2}$$

$$OM = \sqrt{\frac{1}{4} + R^2}$$

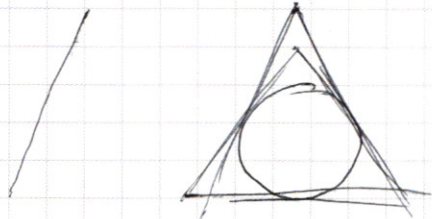
$$0,5 \quad 1,5 \quad OL^2 = \frac{9}{4} + R^2$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad OM^2 = \frac{1}{4} + R^2$$

$$MI^2 = \frac{9}{4}$$

$$LI^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = a \quad \frac{1}{y} = b$$



$$f(2)$$

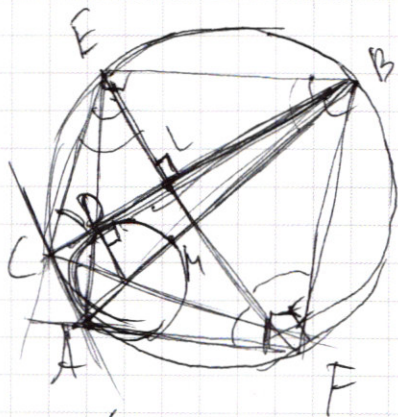
$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(5)$$

$$2 \times 5 + 11$$

$$f(7) = 1 \quad f(5) = 1 \quad f(2) = 0 \quad f(3) = 0$$

$$f'(a)f(b) + f'(b)f(a) = f'(a) + f'(b)$$



$$BM \cdot BA = BD^2$$

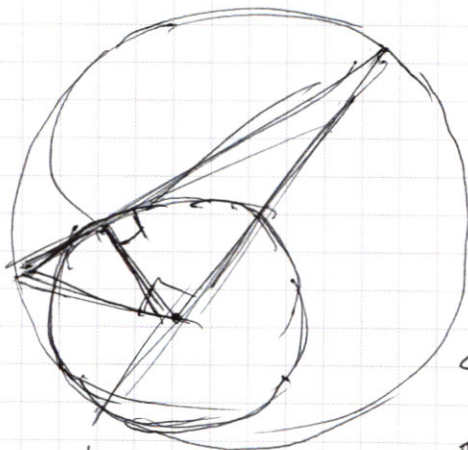
$$(D-d) \cdot D = \frac{17}{22}$$

$$\left(D - \frac{d}{2}\right)^2 = BD^2 + \frac{d^2}{22}$$

$$CL = CD + DL$$

$$BL = BD - DL$$

16



$$EL \cdot LF = CL \cdot LB$$

$$\angle AFB = 90^\circ$$

$$\angle CEA = \angle CBA$$

$$\angle EBA =$$

$$= \angle CEF =$$

$$= \angle AFE$$

$$S_{\Delta} = pr = ha \cdot \frac{1}{2} = \frac{ab \sin C}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

23 5 7 11 13 17 19 23

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(1 \cdot 5) = f(1) + f(5)$$

$$f(1) = 0 \quad \log 1 = 0 \quad \log 5$$

~~23~~

$$\log_4 5 = 1, \dots$$

$$\log_y x$$

$$x < y$$

24 $\frac{x}{y}$

n $(n-1)$

23 22 21 ... 5 4 3 2

$$\frac{1+23}{2} \cdot n$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 12 \\ \hline 56 \\ 23 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\log \frac{x}{y}$$

$$\log x - \log y$$

$$\log_n P \quad 0 \quad 5$$

- | | |
|----|----|
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 5 | 4 |
| 6 | 5 |
| 7 | 6 |
| 8 | 7 |
| 9 | 8 |
| 10 | 9 |
| 11 | 10 |
| 12 | 11 |
| 13 | 12 |
| 14 | 13 |
| 15 | 14 |
| 16 | 15 |
| 17 | 16 |
| 18 | 17 |
| 19 | 18 |
| 20 | 19 |
| 21 | 20 |
| 22 | 21 |
| 23 | 22 |
| 24 | 23 |
| 25 | 24 |



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

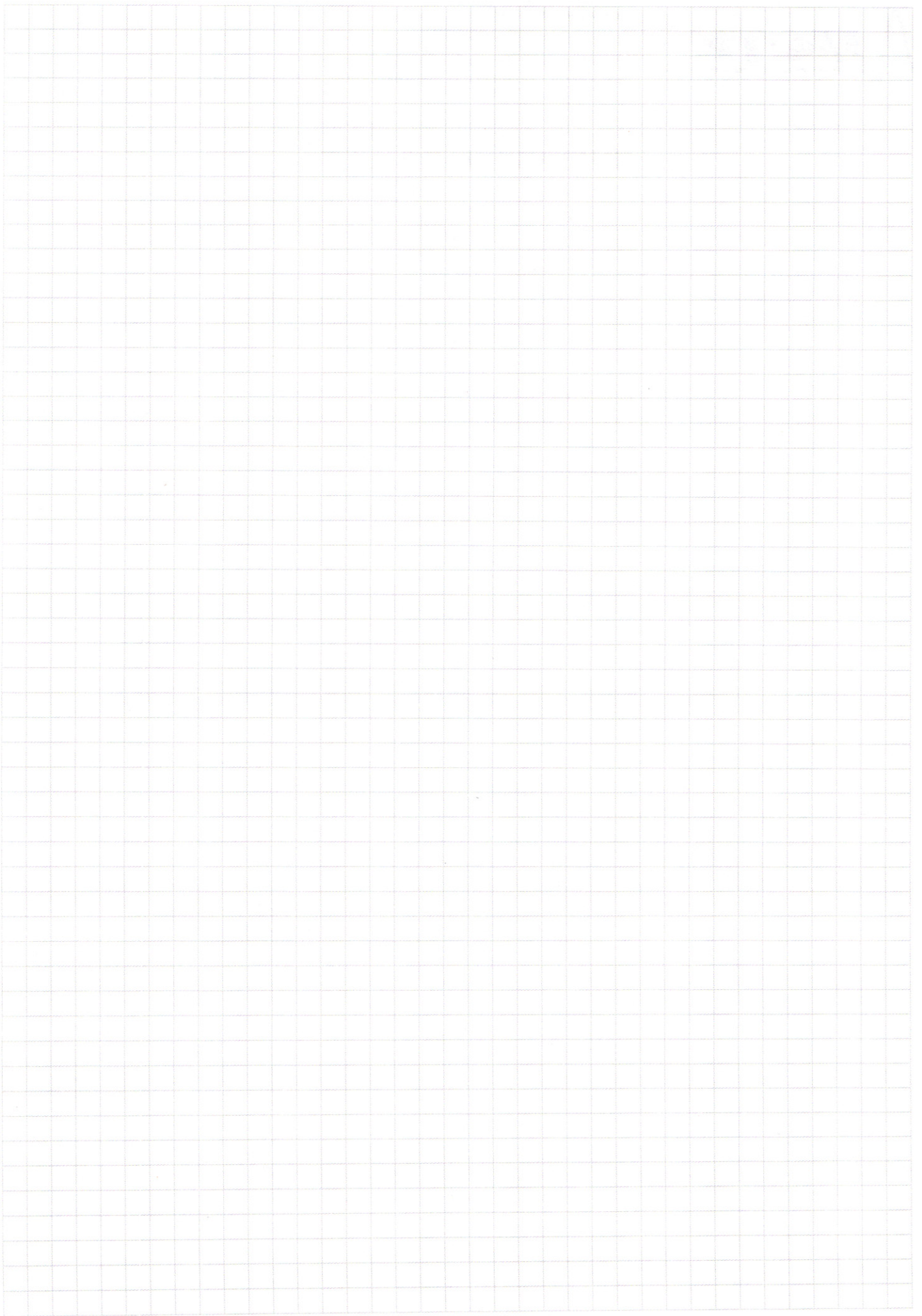
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)