МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\cancel{\sin\alpha\cos\alpha\, 2(\cos\beta-\sin\beta)(\cos\beta+\sin\beta)+2\sin\beta\cos\beta}$$

$$\cos 4\beta + 1 = 2\cos^2 2\beta$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cdot 2\cdot\cos^2 2\beta + 2\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = -\frac{1}{5} & (2) \end{cases}$$

(2):(1): $\cos 2\beta = +\frac{1\cdot\sqrt5}{5\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt5}$

Если $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$, то возможны два варианта: $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ и $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$

I $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$: $\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ (подставим в (1))

$$2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -1$$

$$2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$$

$$3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

~~если~~ $\cos^2\alpha = 0$ не явл решением, т.к тогда $\sin^2\alpha$ д.б. равен нулю, а $\begin{cases}\cos^2\alpha = 0\\ \sin^2\alpha = 0\end{cases}$ $\varnothing$. Поделим на $\cos^2\alpha$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3 - tg^2\alpha + 2tg = 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$(tg\alpha + 1)(tg\alpha - 3) = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 3 \end{array}\right.$

II $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$-\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$-2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -1$

$-2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$-\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$, аналогично п I поделим на $\cos^2\alpha \neq 0$

$-1 + 3tg^2\alpha + 2tg\alpha = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$(tg\alpha + 1)(tg\alpha - \frac{1}{3}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Из п I и п II $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = \frac{1}{3}$; $tg\alpha = 3$

Т.к. по условию значений тангенса не менее трёх то найденные значения можно не проверять

Ответ: -1; $\frac{1}{3}$; 3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

(1): $\begin{cases} (x-12y)^2=2xy-12y-x+6 & (3) \\ x-12y\geq 0 \end{cases}$

(3): $x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

~~$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$~~

$x^2-24xy+144y^2=2y(x-6)-(x-6)$

$(x-12y)^2=(2y-1)(x-6)$

(2): $(x-6)^2+(6y-3)^2=0$

Система принимает вид: $\begin{cases} \sqrt{(x-6)(2y-1)}=(x-12y) & (*) \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=0 & (**) \end{cases}$

Из $(**)$: $\begin{cases} x=6 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$, т.к квадрат числа ≥ 0

Тогда ~~под~~ подставим в $*$ значения x и y:

$\sqrt{(6-6)(\frac{1}{2}\cdot 2-1)}=(6-12\cdot\frac{1}{2})$

$0=0$

$x=6$ и $y=\frac{1}{2}$ подходят

Ответ: $(6;\frac{1}{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq 0$

Пусть $10x - x^2 = t$, $t > 0$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

Введём функцию $f(t) = t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5}$, $D(f): t > 0$

$f(t) \geq 0$; $f(t) = 0$: $t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} = 0 \quad | : t^{\log_3 5} \neq 0$

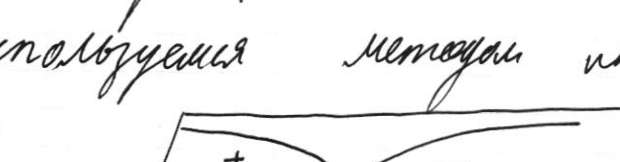
$t^{\log_3 \frac{3}{5}} + t^{\log_3 \frac{4}{5}} = 1$ (*)

$\log_3 \frac{3}{5}$ и $\log_3 \frac{4}{5} < 0$, тогда $t^{\log_3 \frac{3}{5}}$ и $t^{\log_3 \frac{4}{5}}$ – убывающие функции на $D(f)$, сумма убывающих функций – убывающая функция, тогда каждое своё значение функция принимает не более 1 раза.

$\frac{3}{5}^{\log_3 t} + \frac{4}{5}^{\log_3 t} = 1$ равносильно (*)

Подбором $t = 9$ – корень, тогда $t = 9$ – единственный корень.

Воспользуемся методом интервалов для функции $f(t)$:



$f(3) > 0$

$f(81) < 0$

Тогда $t \in (0; 9]$

$\cancel{\begin{cases} x^2 + 10x \leq 9 \\ x^2 + 10x > 0 \end{cases}}$

$\begin{cases} 10x - x^2 \leq 9 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases}$

$\cancel{\begin{cases} x^2 + 10x - 9 \leq 0 \\ x \end{cases}}$

$\begin{cases} 10x - x^2 - 9 \leq 0 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geq 0 \\ x^2 - 10x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-9) \geq 0 \\ x(x-10) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \\ x \in (0; 10) \end{cases}$$

$$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$$

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$

№5

Посчитаем для простых чисел. Для $2; 3$ $f(x)=0$; для $5; 7$ $f(x)=1$; для 11 $f(x)=2$, для 13 $f(x)=3$; для $17; 19$ $f(x)=4$ для 23 $f(x)=5$.

Тогда из формулы $f(ab) = f(a)+f(b)$ посчитаем все от числа. для $\{4; 6; 8; 9; 12; 18; 16; 24\}$ $f(x)=0$, для $\{10; 15; 14; 20; 21; \cancel{24}\}$ $f(x)=1$, для $\{22; 25\}$: $f(x)=2$.

$f(\frac{x}{y}) \Leftrightarrow f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$, нетрудно заметить, что $f(x)+f(\frac{1}{y}) \Leftrightarrow f(x) - f(y)$ (исходя из имеющихся у нас значений). Чтобы $f(x) - f(y)$ было <0 $f(x)$ д.б. $< f(y)$

1) $f(y)=5$, тогда есть 23 варианта x
2) $f(y)=4$, тогда есть 21 вариант x
3) $f(y)=3$, тогда есть 20 вариантов x
4) $f(y)=2$, тогда есть 17 вариантов x
5) $f(y)=1$, тогда есть 9 вариантов x
6) $f(y)=0$, тогда нам не подходит ни один x.

Итого $23+21+20+17+9+0 = 90$ вариантов

Ответ: 90

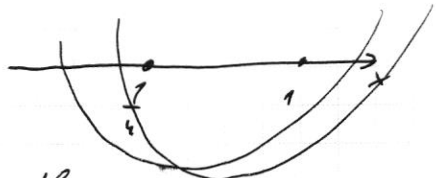
№6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ на $[\frac{1}{4}; 1]$

Придадим вид системы: $\begin{cases} \frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b & (*) \\ ax+b \le -32x^2+36x-3 & (**) \end{cases}$

(**): $-32x^2+(36-a)x-3-b \ge 0$

$32x^2+(a-36)x+3+b \le 0$ – парабола с ветвями вверх



Нам подойдут параболы, удовлетворяющие условию:

$\begin{cases} f(\frac{1}{4}) \le 0 \\ f(1) \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -32\cdot\frac{1}{16}+(36-a)\frac{1}{4}-3-b \ge 0 \\ -32+36-a-3-b \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -2+9-\frac{a}{4}-3-b \ge 0 \\ 1-a-b \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 16-a-4b \ge 0 \\ 1-a-b \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 32\cdot\frac{1}{16}+(a-36)\frac{1}{4}+3+b \le 0 \\ 32+(a-36)+3+b \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2+a\cdot\frac{1}{4}-9+3+b \le 0 \\ 32+a-36+3+b \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{4}a+b-4 \le 0 \\ a+b-1 \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{4}a+b-4 \le 0 \quad |\cdot 4 \quad (1) \\ 1-a-b \ge 0 \quad (2) \end{cases}$

Т.к. (1) ≤ 0, а (2) ≥ 0, то (1) − (2) ≤ 0

$\cancel{4a+b-4}$ $a+4b-16-1+a+b \ge 0$

$2a+5b-17 \ge 0$

(*): $ax+b \ge \frac{16x-16}{4x-5}$

$(ax+b)(4x-5) \ge 16x-16$

$4ax^2+(4b-5a)x-5b \ge 16x-16$

$4ax^2+(4b-5a-16)x-5b-16 \ge 0$

аналогично предыдущему равносилен переход к

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

системе: $\begin{cases} \cancel{D > 0} \\ \cancel{(4b - 5a - 16)^2 + 16a(5a + 6) = 0} \end{cases}$

$\begin{cases} f(\frac{1}{4}) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_b > 1 \\ x_b < \frac{1}{4} \end{array} \right. \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{a}{4} + b - \frac{5}{4}a - 4 - 5b - 16 \geq 0 \\ 4a + 4b - 5a - 16 - 5b - 16 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_b > 1 \\ x_b < \frac{1}{4} \end{array} \right. \end{cases}$

$\begin{cases} -2a - 5b - 17 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_b > 1 \\ x_b < \frac{1}{4} \end{array} \right. \end{cases}$

Объединяя с условием (**): $\begin{cases} 2a + 5b - 14 \geq 0 \\ +2a + 5b + 32 \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_b > 1 \\ x_b < \frac{1}{4} \end{array} \right. \end{cases}$ $\varnothing$

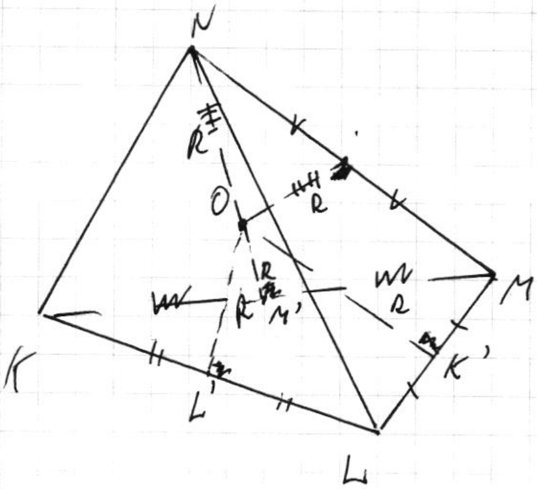
Ответ: $\varnothing$

Задача 7

Дано:
KLMN-пир.
N ∈ сфере
Серед всех от-ков
кроме KN ∈ сфере
$KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$

LM-?
$R_{опис. шара}$-?

O-центр сферы



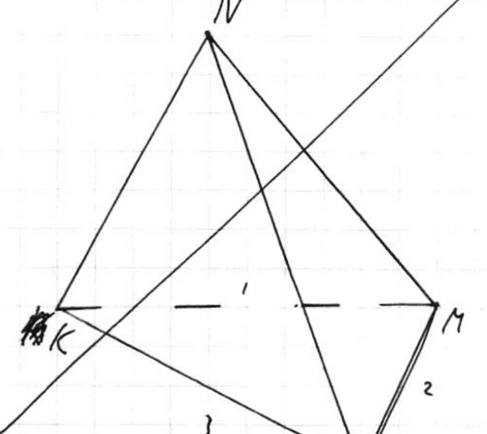
а) 1) сфера пересекает MN, ~~...~~

2) Сфера ~~вп~~ ~~прох~~ пересекает (KML) по окружности, эта окружность вписана в △KML, т.к. середины [KM] - M'; [KL] - L'; [LM] - K' - ∈ окружности.

3) $LL' = LK'$ как отрезки касательных, аналогично $K'M = M'M$

4) Из условия $LL' = 1,5$; $MM' = 0,5$, тогда из п 3
$ML = 2$

б)



~~Ответ: ML =~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

системе: $\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f(\frac{1}{4}) \geq 0 \end{cases}$

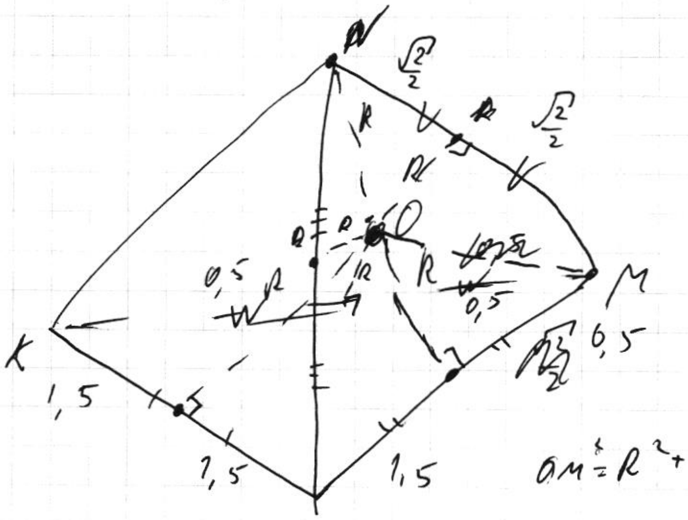
$$\begin{cases} 4a+4b-5a-16-5b-16 \geq 0 \\ \frac{a}{4}+b-\frac{5}{4}a-4-5b-16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a-b-32 \geq 0 \\ -a-4b-20 \geq 0 \end{cases} \quad (+)$$

$$-2a-5b-52 \geq 0$$

Тогда изначальная система на $x \in [\frac{1}{4};1]$ равносильна

$$\begin{cases} 2a+5b-17 \geq 0 \\ -2a-5b-52 \geq 0 \end{cases}$$



$OM^2 = R^2 + 0,5^2 = \frac{1}{2} + R^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq 0$

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 > 0$

~~Пусть $-x^2 + 10x = t$~~

~~$10x + |-t|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 t}$~~

~~1) $x \in (-\infty; 0] \cup [10; +\infty)$. Тогда $x^2 - 10x \geq 0$. Раскроем модуль: $10x +$~~

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$5^{\log_3 t}$ $t^{\log_3 5}$

$f(t) = -/-$ $D(t) \in \mathbb{R}$

$f(t) = 0$: $t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} = 0 \mid : t^{\log_3 5}$

$10^{\log_{10} 100} = 10^2$

$100^{\log_{10} 10} = 100$

$e^{\ln e^2} = e^2$

$t^{\log_3 \frac{3}{5}} + t^{\log_3 \frac{4}{5}} = 1$

$\frac{3}{5}^{\log_3 t} + \frac{4}{5}^{\log_3 t} = 1$

$\log_3 t = 2$

$t = 9$

~~$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 10x - x^2$~~

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 5}$

~~$(10x - x^2) \geq (10x - x^2)^{\log_3 4} - 10x$~~

$t + t^{\log_3 4} \pm t^{\log_3 5} \geq 0$ $t = 0$ - корень

$t^3 + t^4 - t^5 \geq 0 \mid : t^4$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0 \quad \mid : t^{\log_3 4} \neq 0$

$t^{-1} + t^0 - t^5$

$t^{\log_3 \frac{3}{4}} + t^0 - t^{\log_3 \frac{5}{4}} \geq 0$

$t^{\log_3 \frac{3}{4}} = t^{\log_3 \frac{5}{4} - \log_3 \frac{9}{2}}$

$t^{\log_3 \frac{3}{4}} + 1 - t^{\log_3 \frac{5}{4}} \geq 0$

$\frac{5}{4} : \frac{3}{4} = \frac{5}{3}$

~~$\log_3 t \log_3 \frac{3}{4} + \log$~~

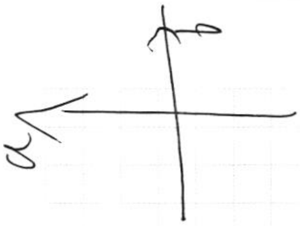
$t^{\log_3 \frac{3}{4}} (1 - t^{\log_3 \frac{5}{3}}) = 1$

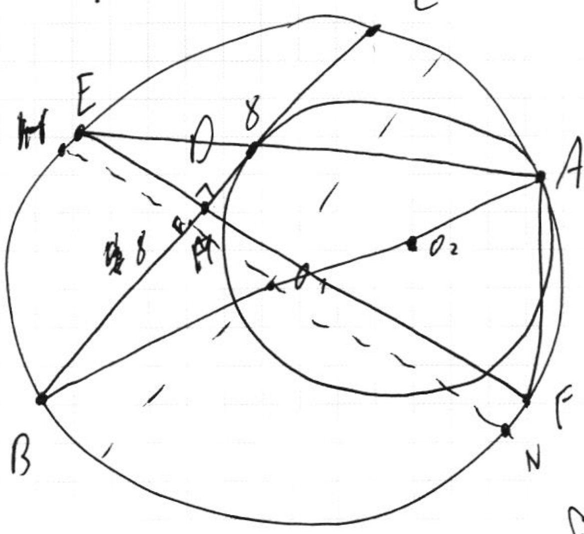
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

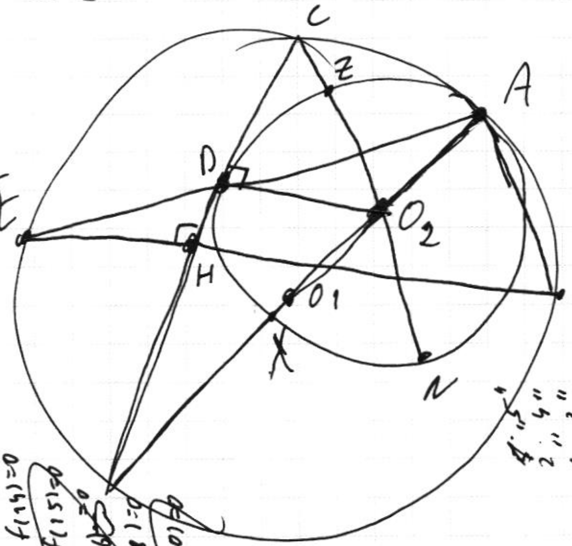


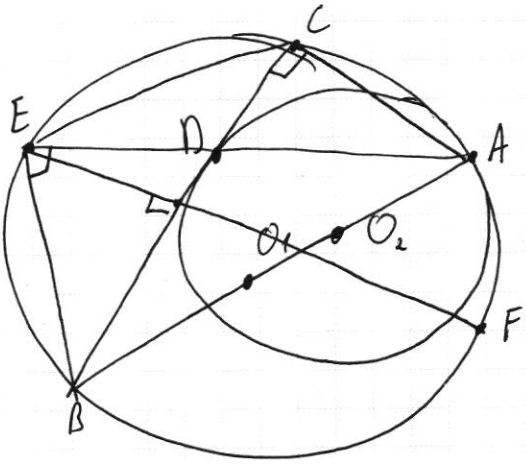


$f(4)=0$, $f(6)=0$, $f(8)=0$, $f(10)=1$, $f(9)=0$, $f(12)=0$, $f(15)=1$, $f(18)=0$, $f(16)=0$, $f(19)=1$, $f(20)=1$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(24)=0$, $f(25)=2$

$2a \geq 17-5b$

$-17+5b-5b-52 \geq 0$





$CZ \cdot CO_2 = CD^2$

$BX \cdot BO_2 = BD^2$

$CZ \cdot 2r = \frac{225}{4}$

$(2R-2r)\cdot 2R = \frac{289}{4}$

$f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$

$\frac{17 \cdot 17}{289}$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) < 0$

$BX \cdot BA = BD^2$

$2R(2R-2r) = \frac{289}{4}$

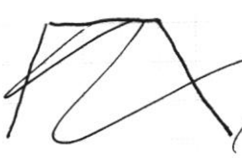
$16R(R-r) = 289$ $\quad 16R^2 - 16Rr = 289$

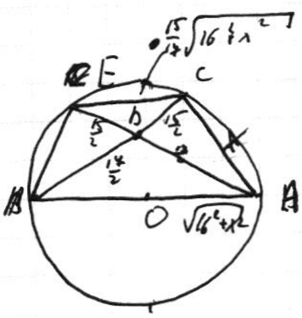
$f(x)g() < 0$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(\frac{a}{b}) = f(a)+f(b)$

$d_1^2 + d_2^2 = \frac{1}{2}(BE^2+ED^2+CA^2+AA^2)$





$-32x^2+(36-a)x-3-6 \geq 0$

$32x^2+(a-36)x+3+6 \leq 0$

$[\frac{1}{4};1]$

$\begin{cases} f(\frac{1}{4}) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$

$\frac{9}{16}$

$[\frac{1}{4};1]$

$-32x^2+36x-3$

$x_b = -\frac{b}{2a}$

$\frac{36}{64}$