МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$8+tg^2\alpha$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha \qquad \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$8tg\alpha + tg^2\alpha - 1 = 1 + tg^2\alpha$

$170+15+7\cdot 8+6+2 \qquad 170+64+15$

79

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4. \end{cases}$$

$(x+y)(3x+3y-10) - 28y^2 - 18x^2 - 24 =$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$, пусть $2\alpha = x$, $2\beta = y$

$tg\alpha$ - существ.

$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(x+2y)+\sin x = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$2\sin\left(\frac{x+2y+x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+2y-x}{2}\right) = -\frac{8}{17}$

$\sin(x+y)\cos(y) = -\frac{4}{17}$

$\cos(y) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin y = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x\cos y + \sin y\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} 4\sin x - \cos x = 1 \\ 4\sin x + \cos x = 1 \end{array}\right.$ ун. триг. подст. $x = 2\alpha$

$\left[\begin{array}{l} 4\left(\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) - \left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) = 1 \\ 4\left(\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) + \left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) = 1 \end{array}\right.$

$(1+tg^2\alpha) > 0$

$\left[\begin{array}{l} 8tg\alpha + tg^2\alpha - 1 = 1+tg^2\alpha \\ 8tg\alpha + 1 - tg^2\alpha = 1+tg^2\alpha \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{1}{4} \\ tg^2\alpha - 4tg\alpha = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{1}{4} \\ tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = 4 \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = \frac{1}{4}, 0, 4$

№5

$f(a) = f(1) + f(a)$

$f(1) = 0$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Так, чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right)$ было меньше нуля $f(y)$ должно быть больше $f(x)$ для каждой пары (x,y)

$f(x)=0$ $f(y)>0$

10 17 (сколько таких x и y)

$f(x)=1$ $f(y)>1$

7 8

$f(x)=2$ $f(y)>2$

3 5

$f(x)=3$ $f(y)>3$

2 3

$f(x)=4$ $f(y)>4$

2 1

(нет $f(x)>5$)

$N(x,y) = 10\cdot17 + 7\cdot8 + 3\cdot5 + 2\cdot3 + 2\cdot1 = 249$

Ответ: $N = 249$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0 = \left[\frac{1}{2}\right]$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(4) = f(2)+f(2) = 0$

$f(5) = \left[1+\frac{1}{4}\right] = 1$

$f(6) = f(2)+f(3) = 0$

$f(7) = \left[1+\frac{3}{4}\right] = 1$

$f(8) = f(2)+f(4) = 0$

$f(9) = f(3)+f(3) = 0$

$f(10) = f(2)+f(5) = 1$

$f(11) = \left[2+\frac{3}{4}\right] = 2$

$f(12) = f(6)+f(2) = 0$

$f(13) = \left[3+\frac{1}{4}\right] = 3$

$f(14) = f(2)+f(7) = 1$

$f(15) = f(3)+f(5) = 1$

$f(16) = f(8)+f(2) = 0$

$f(17) = \left[4+\frac{1}{4}\right] = 4$

$f(18) = f(2)+f(9) = 0$

$f(19) = \left[4+\frac{3}{4}\right] = 4$

$f(20) = f(10)+f(2) = 1$

$f(21) = f(7)+f(3) = 1$

$f(22) = f(11)+f(2) = 2$

$f(23) = \left[5+\frac{3}{4}\right] = 5$

$f(24) = f(6)+f(4) = 0$

$f(25) = f(5)+f(5) = 2$

$f(26) = f(13)+f(2) = 3$

$f(27) = f(3)+f(9) = 0$

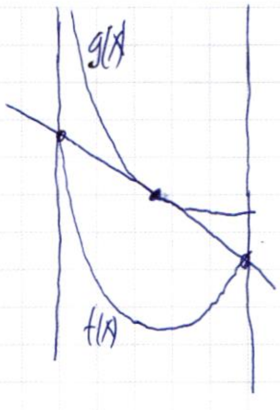
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \quad x\in[1;3]$



$f(x)=8x^2-34x+30$ (парабола, вершина $x_в=\frac{34}{2\cdot 8}=\frac{17}{8}$)
$x_в \in [1;3]$

$f(1)=4$

$f(3)=0$ (рассмотрю прямую $ax+b=y$ через эти точки)

$\begin{cases} a\cdot 1+b=4 \\ a\cdot 3+b=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=-2 \\ b=6 \end{matrix} \quad y=6-2x$

$g(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$ (рассмотрю пересечения с $y=6-2x$)

$g'(x)=\frac{-2}{4(x-1)^2}$

$6-2x=\frac{4x-3}{2x-2}$

$(2x-2)(6-2x)=4x-3$

$(2x-3)^2=0$

$x=\frac{3}{2}$

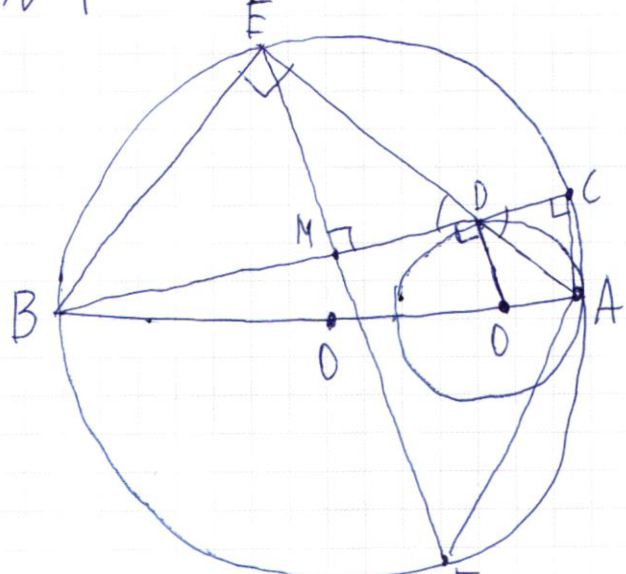
уравняю производные в пересеч.

$-2=\frac{-2}{4(\frac{1}{2})^2}=-2$

($y'=g'(x)$ -> это кас.)

Прямая единственна, т.к. „зажата" между $f(x)$ и $g(x)$, и другая будет пересекать один из графиков дважды => Ответ: $a=-2$, $b=6$

№4



$\angle EMC=90^0$

$BD=\frac{13}{2}$

$DC=\frac{5}{2}$

$R=?$

$r=?$

$\angle AFE=?$

$S\Delta AEF=?$

Решение

$\angle BCA=90^0$ (т.к впис. и опир. на диам.)

$\angle BPO=90^0$ (т.к кас. и радиус)

$BD^2=2R(2R-2r)$ (степень точки B отн. окр w)

$DO \parallel CA$ (по одост. углам)

$\Delta BPO \sim \Delta BCA$ (по 2м углам)

$\frac{BD+DC}{BD}=\frac{2R}{2R-r}=\frac{CA}{r}$

$\begin{cases} \frac{13^2}{4}=2R(2R-r) \\ \frac{18}{13}=\frac{2R}{2R-r} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} R=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{13}{2}} \\ r=\frac{5}{6}\sqrt{\frac{13}{2}} \end{matrix}}$ $(R,r>0)$

$\angle BEA=90^0$ (т.к впис. и опир. на диам.)

$\angle EFA=\angle EBA$ (т.к впис и опир. на 1 дугу)

$\angle FBA=\angle DBO+\angle EBD$

$\Delta EBD \sim \Delta DCA$ (по 2м углам)

$\angle DBO=\arcsin\left(\frac{r}{2R-r}\right)$

$\angle EBD=\angle CAD=\operatorname{arctg}\frac{DC}{CA}$

$CA=\frac{2Rr}{2R-r}$

$\angle EFA=\arcsin\left(\frac{r}{2R-r}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{(2R-r)DC}{2Rr}\right)$

$\boxed{\angle EFA=\arcsin\left(\frac{\frac{5}{6}}{3-\frac{5}{6}}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{(3-\frac{5}{6})\cdot\frac{5}{2}}{2\cdot\sqrt{\frac{13}{2}}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}}\right)}$

$S_\Delta AEF=S_{CAFM}-S_{DCA}+S_{EDM}$

$\boxed{S_\Delta AEF=\frac{CA+MF}{2}MC-\frac{DC\cdot CA}{2}+\frac{DC\cdot CA}{2}(K^2)}$

$K=\frac{ED}{DA}$, $DA=\sqrt{DC^2+CA^2}$

$ED=BD\sin\angle EBD$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \quad |\uparrow^2 \cdot 2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \; +$$

$$3(x+y)^2-10(x+y)-2(3y-2x)^2=0$$

$$(x+y)(3x+3y-10)-18y^2-8x^2+24xy=0$$

$$\cancel{(x+y)(3x+3y-10)-}$$

$$18y^2+8x^2-24xy=0$$

поделю на $3x+3y-10$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{8}{17}$

$\frac{2tg\frac{3}{2}}{1-tg^2\frac{3}{2}}$

$\sin x\cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x\cos 2y + \sin 2y\cos x + \sin x = -\frac{8}{17}$

$\cos^2 y \sin x + \cos^2 x \sin y = -\frac{4}{17}$

$\cancel{\sin x \cos y(\cos y + \cos x)} = -\frac{4}{17}$

$(1-\sin^2 y)\sin x + (1-\sin^2 x)\sin y$

$\sin x + \sin y - \sin x \sin y(\sin x + \sin y) = \frac{4}{17}$

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$

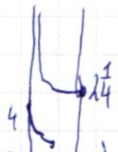
$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$

$36 - 4(3y^2 - 4y - 4)$

$9 - 3y^2 + 4y + 4$

$4\cdot 3(3 - 3y^2 + 4y + 4 \quad -3y^2 + 4y + 7$

$-4\cdot 9(y+1)(y-\frac{7}{3})$



$(4x - 3 = 8x^2 - 34x + 30)$

$8\cdot 4 - 34\cdot 2 + 30$

$8\cdot 4 - 30 - 8$

$2 + \frac{1}{2x-2}$

$8x^2 - 34x + 30$

$9y^2 - 12yx + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$\frac{34}{16}\ \frac{17}{8}$

$\cancel{9y^2+3y} \quad 4x^2 + (2+15y)x + 3y - 2 + 9y^2 = 0$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$4x^2 - (15y+2)x + (9y^2 + 3y - 2) = 0 \mid \cdot 3$

$3x^2 - 6x + (3y^2 - 4y - 4) = 0 \mid \cdot 4$

$a = b$

$\cancel{D = (15y+2)^2 - 16(9y^2+3y-2)}$

$-24x + (45y+6)x + 12y^2 - 16y - 16 - 27y^2 - 9y + 6 = 0$

$\cancel{x} =$

$(45y - 18)x - 15y^2 - 25y - 10 = 0$

$x = \frac{15y^2 + 25y - 10}{45y - 18} = \frac{5}{9}\left(\frac{3y^2 + 5y - 2}{5y - 2}\right)$

$4 +$

$f(6) = 0$

$f(4) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) =$

$\cancel{f(x) = f(y) + f(x)}$

$f\left(\frac{1}{x}\right) =$

$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$\log_4\frac{3}{5} = -\log_4\frac{4}{4}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - (x^2+6x)$

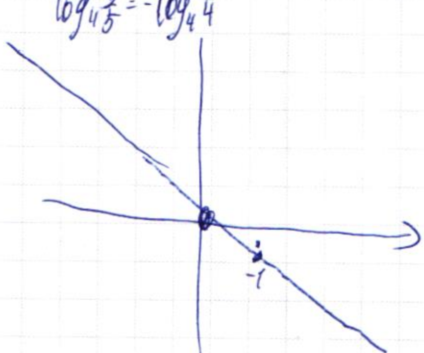
$t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5} - t$

$t\left(t^{\log_4 5 - \log_4 4} - 1\right)$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} \geq -t$

$5^{\log_5 3}$

$3^{\log_5 5}$



$\log_4 3 \cdot t^{\log_4\frac{3}{4}} - \log_4 5 \cdot t^{\log_4\frac{5}{4}} = 0$

$t^{\log_4\frac{3}{5}} = \cancel{\log_4 5}$

$\log_5 3 = t^{\log_4\frac{3}{5}}$

$t = (\log_5 3)^{\frac{1}{\log_4\frac{3}{5}}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4x-3=(8x^2-34x+30)(2x-2)$

$\cancel{18\times 4-34\times 2+30}$

$8\times 9-34\times 3+30$

$16x^3-68x^2+60x-16x^2+68x-60=4x-3$

$\cancel{16x^3-84x^2+}$

$8x-3=$

$18(2R+r)=26R$

$36 \quad 10R=18r \quad R=\frac{9}{5}r$

$30\cdot 21$

$\frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{4(x+1)^2}$

$\frac{18}{5}\left(\frac{18}{5}-1\right)r^2=\frac{13^2}{4}$

$r^2=$

$2\cdot 9-17\cdot 3+30$

$48-$

90

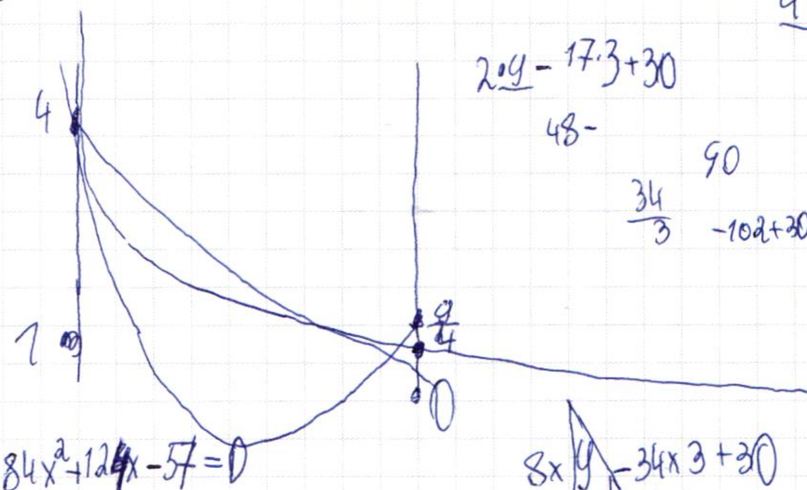
$\frac{-2}{4(x+1)^2}$

$\frac{34}{3}$ $\quad -102+30-72$

$-1=2(x+1)^2(16x-34)$

$r^2\frac{18}{25}=\frac{13}{4}$

$\frac{5}{6}\sqrt{\frac{13}{2}}$



$y=-$

$\frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{4(x-1)^2}$

$16x^3-84x^2+124x-57=0$

$8\times 9-34\times 3+30$

$-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2}$

$(6-2x)(2x-2)$

$\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2y+x)+\sin x=-\frac{8}{\sqrt{17}}$

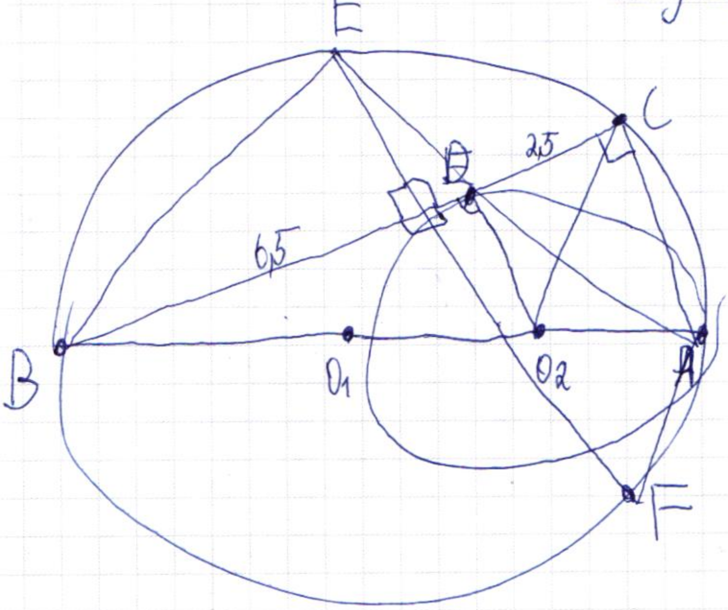
$2\sin(x+y)\cos y=-\frac{8}{17}$

$12x-4x^2-9+4x=0$

$\cos y=\frac{4}{\sqrt{17}}\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-(2x-3)^2=0$

$x=$



$\frac{13^2}{4}=2R(2R-2r)$

$\frac{2R}{2R-2r}=\frac{9}{\cancel{6,5}}$

$\sin=\frac{a}{b}$

$\frac{13}{18}$

$\frac{\sin}{\cos}=\frac{a}{c}$

$\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$

$\cos=\frac{c}{b}$

$4\sin x\pm\cos x=1$

$\frac{1-tg^2x+\cancel{4tg}\,tg}{1+tg^2x}$

$2tg\alpha \quad 4(1-tg^2\alpha)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

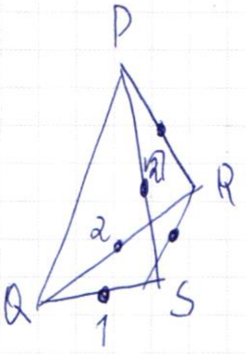
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\cancel{3y-2x}$

$x^{\log_4 3} - x^{\log_4 5} \geq -x$

$\log_4 3\, x^{\log_{4} \frac{3}{4}} - \log_4 5 \cdot x^{\log_4 \frac{5}{4}} \geq 0$

$x^{\log_4 5} - x$

$\log_4 3 \cdot x^{\log_4 \frac{3}{4}} \geq \log_4 5\, x^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$\log_4 3 \geq \log_4 (x^{\log_4 5 - 1} - 1)$

$x^{\log_4 \frac{3}{5}} \geq \log_3 5$

$3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y$ 268

48

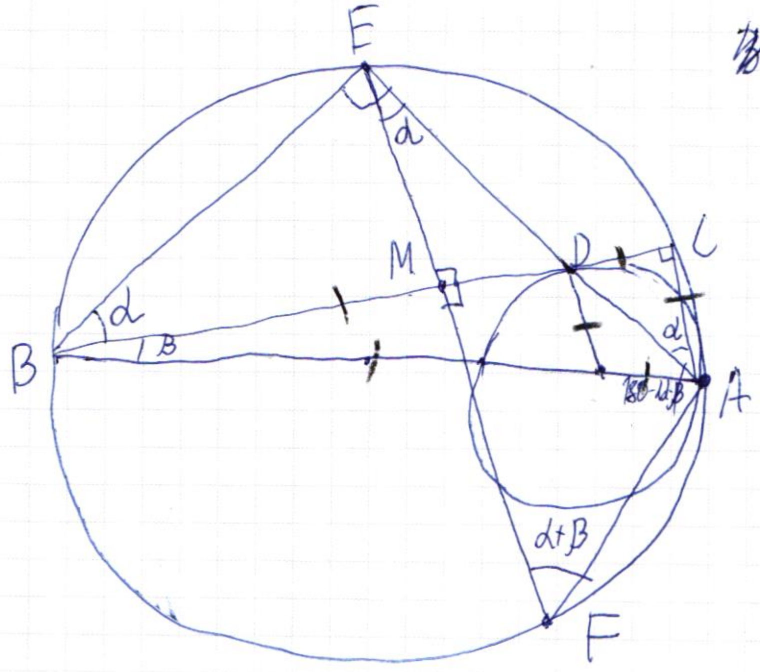
240

$5(3+4x-x^2$

240

24

12



$y = \frac{14+20x-5x^2}{15(x-1)} +$

$15y = 5(3-x) + \frac{1}{(x-1)}$

$y = 1 - \frac{x}{15} + \frac{1}{15x+15}$ $9y^2 + 4x^2 - 12$

$3x^2 + 3y^2 + 6xy - 6x - 4x - 6y - 4y + 4$

$= (3y-2x)^2$

$3(x+y)^2 - 10(x+y) - 2(3y-2x)^2 = 0$

$3t - 10t - 2a = 0$

$\frac{10 \pm \sqrt{100+24a}}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№3~~

~~$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - 6x - x^2$~~

~~пусть $x^2+6x=t$~~

~~$t>0$ (усл ∃)~~

~~$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$~~

~~$t^{\log_4 3} \geq t(t^{\log_4 5 - 1} - 1)$ (логарифмирую)~~

~~$\log_4 t \cdot \log_4 3 \geq \log_4 t + \log_4(t^{\log_4(5)-1} - 1)$~~

~~№2~~

~~$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \quad |^2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad |\cdot 3 \end{cases}$~~

~~$\ominus\ 5x^2-20x-15y-14+15xy=0$~~

~~$y=\frac{15-x}{15}+\frac{1}{15x-15}$~~