МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$.

по формуле для суммы синусов:

$2\sin\left(\frac{(2\alpha+4\beta)+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{(2\alpha+4\beta)-2\alpha}{2}\right)=-\frac{4}{5}$

$2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{\text{из усл}}\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$. $\Rightarrow$ при $\beta\in\left(\frac{\pi}{\cancel{}}+2\pi k;2\pi(k+1)\right)$ из ур. $\sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta=1$.

1) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

2). иначе $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

рассмотрим 1 случай:

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}=\sin 2\beta$.

$\sin(2\alpha+2\beta)-\sin 2\beta=0$.

по формуле разности sin:

$2\sin\left(\frac{(2\alpha+2\beta)-2\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{(2\alpha+2\beta)+2\beta}{2}\right)=0$

$\sin\alpha=0$

$\operatorname{tg}\alpha=0$

$\cos(\alpha+2\beta)=0$

$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k-2\beta$.

$k\,\vdots\,2$ | $k \,\vdots\, 2$ ~~$k \not\vdots\, 2$~~.

$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k-2\beta\right)=-\cos(2\beta)=\frac{-2}{\sqrt5}$ | $\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$.

$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k-2\beta\right)=-\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ | $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$.

$\operatorname{tg}\alpha=-2$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

рассмотрим случай 2:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\sin 2\beta$

по формуле суммы sin:

$2\sin(\alpha+2\beta)\cos\alpha = 0.$

при $\cos\alpha = 0$

$tg\alpha$ — не имеет смысла.

$\sin(\alpha+2\beta) = 0.$

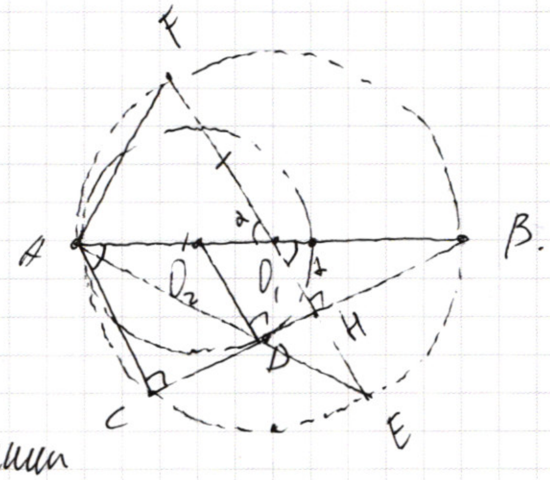
$\alpha + 2\beta = \pi k.$

$\alpha = \pi k - 2\beta.$

	$k \not\vdots 2$	$k \vdots 2$
$\sin\alpha = \sin(\pi k - 2\beta) =$	$\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\cos\alpha = \cos(\pi k - 2\beta) =$	$-\cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$
	$tg\alpha = -\frac{1}{2}$	

Ответ: $tg\alpha \in \{0; \frac{1}{2}; -2\}$.

№4.



Дано: Ω, ω — окр. (центры O_1 и O_2 соотв.)
AB — диаметр A — точка кас.
D — точка касания $BD = 17$. $CD = 8$
Найти: R_1 и R_2; $\angle AFE$ и S_{AFE}.

Решение

Заметим $\triangle ABC \sim \triangle O_2BD$ (они прямоуг. и $\angle B$ — совп.) $\Rightarrow$ по усл. $R_1 > R_2$

$AC = O_2D \cdot \frac{AB}{O_2B} = R_2 \cdot \frac{2R_1}{2R_1 - R_2}$

По теореме Пифагора для этих треугольников:

$\begin{cases} R_2^2 + 17^2 = (2R_1 - R_2)^2 \\ \left(\frac{2R_2R_1}{2R_1 - R_2}\right)^2 + 25^2 = 4R_1^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4R_1^2 - 4R_1R_2 = 17^2 \\ 4R_1^2\left(1 - \frac{R_2^2}{(2R_1 - R_2)^2}\right) = 25^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4R_1^2 - 4R_1R_2 = 17^2 \\ 4R_1^2 \cdot \frac{4R_1^2 - 4R_1R_2}{(2R_1 - R_2)^2} = 25^2 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} R_2 = R_1 - \frac{17^2}{4R_1} \\ \frac{4R_1^2 \cdot 17^2}{R_2^2 + 17^2} = 25^2 \end{cases} \qquad \frac{4R_1^2 \cdot 17^2}{R_1^2 - \frac{17^2}{2} + \frac{17^4}{16R_1^2} + 17^2} = 25^2$$

$$R_1^2 \cdot 4 \cdot 17^2 = 25 R_1^2 + \frac{25^2 \cdot 17^2}{2} + \frac{17^4 \cdot 25^2}{16R_1^2} \quad \Big| \cdot R_1^2 > 0.$$

$$R_1^4 (4 \cdot 17^2 - 25^2) - \frac{17^2 \cdot 25^2}{2} R_1^2 - \frac{17^4 \cdot 25^2}{16} = 0$$

$$D = \frac{17^4 \cdot 25^4}{4} + \frac{17^4 \cdot 25^2}{4}(4 \cdot 17^2 - 25^2) = 17^6 25^2$$

$$R_1^2 = \frac{\frac{17^2 \cdot 25^2}{2} + 17^3 \cdot 25}{4 \cdot 17^2 - 25^2} = \frac{17^2 \cdot 25 \left(\frac{25}{2} + 17\right)}{(2 \cdot 17 - 25)(2 \cdot 17 + 25) 2} = \frac{17^2 \cdot 25}{9 \cdot 2}$$

единств. положительный корень

$$R_1 = \frac{17 \cdot 5}{3\sqrt{2}} = \frac{17 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}{6}$$

$$R_2 = \frac{17 \cdot 5}{3\sqrt{2}} - \frac{17^2 \cdot 3\sqrt{2}}{4 \cdot 17 \cdot 5} = 17\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{20}\right) = 17\left(\frac{82}{60\sqrt{2}}\right) = \frac{17 \cdot 41\sqrt{2}}{60}$$

Пусть $\angle A = \alpha = \arccos \frac{O_2 D}{O_2 B} = \arccos \frac{R_2^2}{2R_1 - R_2}$

тогда $BO_1H = \angle A = \alpha$. т.к. $EF \perp BC$ и $AC \perp BC \Rightarrow EF \parallel AC$.

$$\Rightarrow \angle AFE = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$S_{AFE} = EF$

диаметр
из усл $\perp$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. $f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow$ заметим любое число можно представить в виде
$f(1\cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0.$ произв. простых чисел

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4

$f(4) = f(2) + f(2) = 0.$ $f(6) = f(3) + f(2) = 0$ $f(12) = f(6) + f(2) = f(3) + f(2) + f(2) = 0.$
и т. д.

20	21	22	23	24
1	1	2	5	0

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

итого: 11 – „0" 2 – „2" 2 – „4"
7 – „1" 1 – „3" 1 – „5"

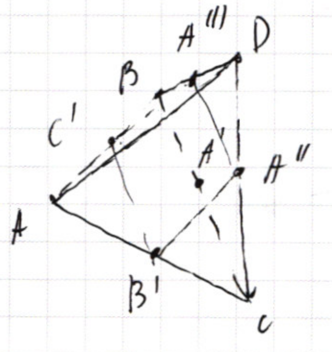
$0 = f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \to$
$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

соответственно пар:

$11\cdot 13 + 7\cdot 6 + 2\cdot 4 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 198$
считаем от „0" от „1" от „2" от „3" от „4"

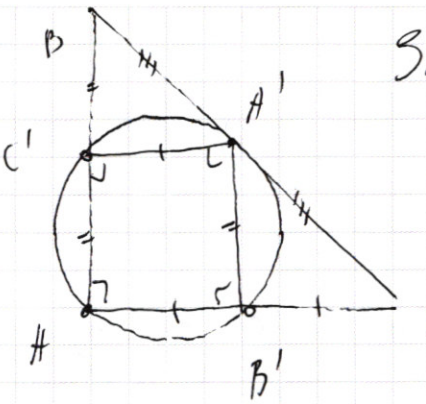
Ответ 198

№7.



~~Решение~~ Дано: тетраэдр ABCD
A лежит на сфере с сер. рёбер кроме AD
AB = 1 ; BD = 2 ; CD = 3.
Найти: BC ; Rmin

Решение.
Заметим из усл. все указан. точки (A и сер. рёбер) в своих плоскостях лежат на окружностях :



Заметим: $C'A'$ и $A'B'$ – средние линии $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $C'A' = AB'$ $C'A' \parallel AB'$

$C'A = A'B'$ $C'A \parallel A'B'$ $\Rightarrow$ $A'C'AB'$ – $\parallel$ $\Rightarrow$ – прямоуг.

+ все леж. на окр

$\Rightarrow \angle A' = 90^\circ$

Также для точки $C'B'A''A'''$ – прямоуг. т.к. $A''A''' \parallel C'B'$, $A''A''' = C'B' = \frac{1}{2}BC$ $\Rightarrow$

$C'A''' \parallel B'A''$ и все точки леж. на одной окр.

$C'A''' = B'A'' = \frac{1}{2}AD$

$\Rightarrow$ угол между AD и BC –

№ 3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$t = x^2+18x \geqslant 0.$

$5^{\log_{12} t} \geqslant |t|^{\log_{12} 13} - t.$

$t^{\log_5 t \log_{12} t} \geqslant |t|^{\log_{12} 13} - t.$

$t^{\log_5 + \log_{12} t} + t^1 - |t|^{\log_{12} 13} \geqslant 0.$

$\frac{17^4\cdot 25^4}{4} + 25^2\cdot 17^6 = \frac{17^4\cdot 25^4}{4}$ $\quad (25\cdot 17^3)^2$

$a_1 = \dfrac{\frac{17^2\cdot 25^2}{2} \pm 25\cdot 17^3}{4\cdot 17^2 - 25^2} = \dfrac{\left(\frac{25}{2} \pm 17\right)17^2\cdot 25}{4\cdot 17^2 - 25^2} =$

$= \dfrac{2\left(\frac{25}{2}+17\right)17^2\cdot 25}{(2\cdot 17-25)(2\cdot 17+25)} = \dfrac{17^2\cdot 25\cdot 2}{2\cdot 17 - 25} = \dfrac{17^2\cdot 25\cdot 2}{9}$

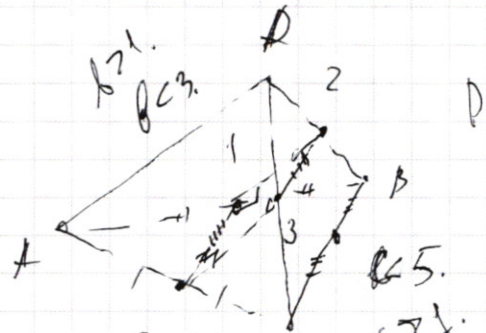
$R = \dfrac{17\cdot 5\sqrt2}{3}$

$r = -\dfrac{17^2\cdot 3}{4\cdot 17\cdot 5\sqrt2} + \dfrac{17\cdot 5\sqrt2}{3} = 17\left(-\dfrac{3}{20\sqrt2} + \dfrac{5\sqrt2}{3}\right) = 17\cdot\left(\dfrac{200-9}{60\sqrt2}\right)$ 191

$\frac{75}{3}$ $\quad \dfrac{85\cdot 1{,}41}{3\cdot 1{,}4}$

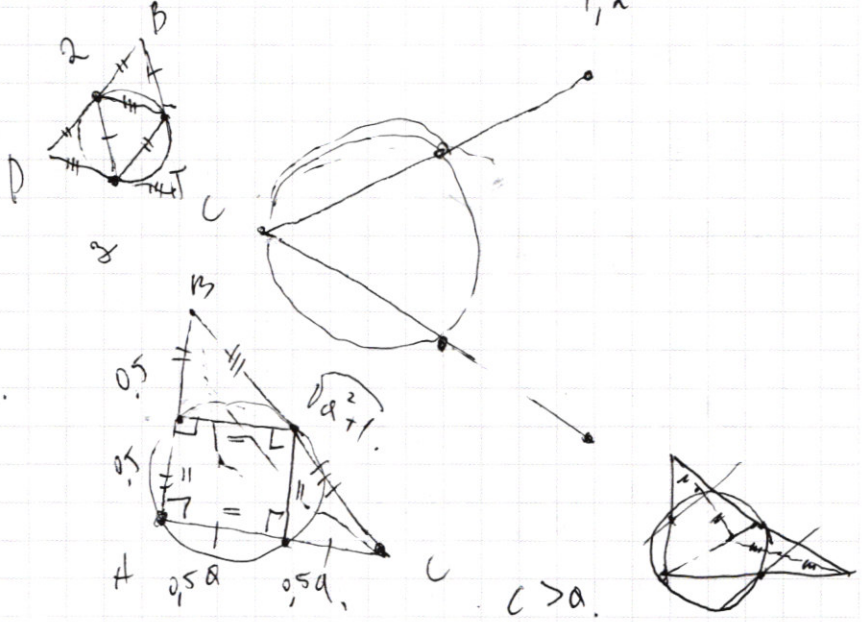
4,2

(7).



$a < 6$

$a > 1$



$c > a$

55

$\dfrac{5+8+42+143}{50} = 198$

13
$\times 13$
143

2 3 4 5 7 11 13 17 19 23

0 0 0 1 1 2 3 4 4 5

(4)

$f(4) = f(2) + f(2) = 0.$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0.$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = 0.$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $2\sin\underbrace{\frac{4\alpha+4\beta}{2}}_{(2\alpha+2\beta)} \cos\frac{4\beta}{2} = -\frac{4}{5}.$

$-\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

① $\sin 2\beta = \sqrt{\frac{1}{5}}$ ② $\sin 2\beta = -\sqrt{\frac{1}{5}}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$ $\quad$ $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

② $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin^2\beta$

$2\sin\alpha\cos(\alpha + 2\beta) = 0.$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0.$

$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k.$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta + \pi k.$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2.$

$x^2 + x - 2$

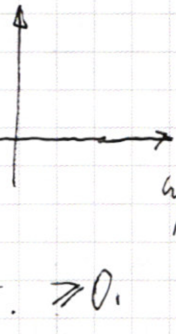
2) $x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$ $\qquad$ $x \geq 2y$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25.$ $\qquad$ $xy - x - 2y + 2 \geq 0$

$(x-2)^2 + 3(3y-1)^2 = 5^2$ $\qquad$ $\cancel{(x-2)}y$

$(x-2)^2 = 5^2 - (3y-3)^2$ $\qquad$ $(y-1)x - 2(y-1). \geq 0$

$(2y-2)^2 \geq (8-3y)(3y+2).$ $\qquad$ $(x-2)(y-1) \geq 0.$



при $x \geq 2$ $y \geq 1$

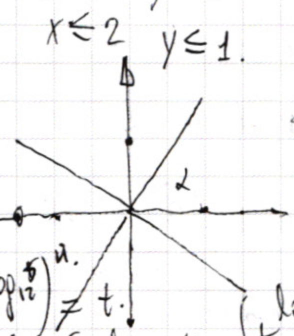
$x \leq 2$ $y \leq 1.$

3) $5^{\log_{12} t} \geq |t|^{\log_{12} 13} - t. \geq 0.$

~~вспомни Мегра~~

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$

$(2y-2)^2 + (3y-3)^2 \geq 5^2.$ $\quad$ $12^a = t.$



$y < 0.$

$t^{\log_5 12^{13}} (y-1)^2$ $\qquad$ $(y-1)^2 \geq \frac{25}{13}$ $\qquad$ $5^a = (12^{\log_{12} 5})^a = t.$

$12^{\log_{12} 5 \cdot \log_{12} t}.$ $\qquad$ $(t^{\log_5 t})^a.$ $\quad$ $t^{\log_5 t \cdot \log_{12} t}.$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

$f(a\cdot b) = f(a) + f(b)$

$f(1 - t^{\log_{12}\frac{13}{2}})$

$f(p) = [p/4]$

$t - t^{\log_{12} 13}$

$= \cancel{\tfrac{13}{2}}(1 - t^{\log_{12} 13 - 1} \log_{12}\frac{13}{12})$

$a = x \qquad b = \frac{1}{y}$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \le 0$.

$f\left(\frac{1}{a}\cdot a\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) + f(a)$.

$f(1) = f\left(\frac{1}{a}\right) + f(a)$ — для любого $a \in R$.

$f\left(\frac{1}{a}\right) + f(a) = 0$. ~~log~~

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$.

$f(1) = 2f(1)$.

$f(a) = f(1) + f(a)$ $\quad f(1) = 0$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \le 0$.

$f(x) \le f(y)$

найти все пары.

$\frac{12x + 11}{4x + 3} - ax - b \le 0$.

$3 + \frac{2}{4x+3} - ax - b \le 0$

$\frac{12x + 11 - 4ax^2 - 4xb - 3ax - 3b}{4x + 3} \le 0$

$\frac{-4ax^2 + (12 - 4b - 3a)x + 11 - 3b}{4x+3} \le 0$

≥ 0.

$f(6) = f(3) + f(2)$.

$8x^2 + (30 + a)x + 17 + b \ge 0$.

$-\frac{b}{2a} = \frac{-(30+a)}{16}$.

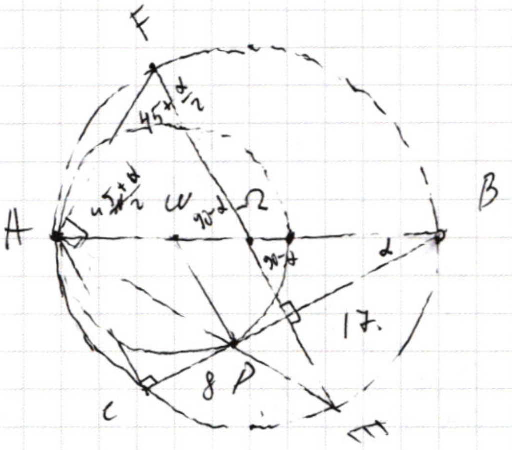
$\frac{(30+a)^2}{16} + 17 + b \ge 0$.

$\frac{8(30+a)^2}{16^2}$

$\frac{8(3+a)^2 - 16(30+a^2)}{16^2} + 17 + b \ge 0$

$\frac{8(30+a^2)}{16^2} \ge 17 + b$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$? \angle AFE$

$R \quad r$

S_{AFE}

$CD = 8$

$BD = 17.$

$r = -\frac{17^2}{4R} + R.$

$4R(R - r) = 17^2.$

$\cancel{17^2 = 2R^2}$

$2R - 2r + r = (2R - r)^2 = r^2 + 17^2$

$$\begin{cases} 4R^2 - 4Rr = 17^2 \\ \frac{4R^2 r^2}{(2R-r)^2} - 4R^2 = -25^2. \end{cases}$$

$\left(r \cdot \frac{2R}{2R - r}\right)^2 + 25^2 = 4R^2$

$R_1 \cdot (R_1 - 2R_2) = 17^2.$

$4R^2\left(1 - \frac{r^2}{(2R-r)^2}\right) = 25^2$

$4R^2\left(\frac{4R^2 - 4Rr}{(2R-r)^2}\right) = 25^2$

$\cancel{4R^2 = \frac{25}{17}}$

$R = \frac{25}{17 \cdot 4}.$

$\frac{4R^2 \cdot 17^2}{(2R-r)^2} = 25^2.$

$\frac{4R^2 \cdot 17^2}{r^2 + 17^2} = 25^2.$

$4R^2 \cdot 17^2 = 25^2 r^2 + 25^2 \cdot 17^2$

$4R^2 \cdot 17^2 = \frac{25^2 \cdot 17^4}{16R^2} + \frac{17^2 \cdot 25^2}{2} + 25^2 \cdot R^2 + \cancel{25^2 \cdot 17^2}$

$a^2(4 \cdot 17^2 - 25^2) - \frac{25^2 \cdot 17^4}{16} + \frac{17^2 \cdot 25^2}{2} a = 0 \qquad R^2 = a.$

$D = \frac{17^4 \cdot 25^4}{4} + \frac{25^2 \cdot 17^4}{4}(4 \cdot 17^2 - 25^2)$