МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

√ 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

√ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

√ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

± 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

√ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

Разложим подкоренное выражение правой части первого уравнения на множители, а во втором уравнении выделим полные квадраты.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2 \cancel{+9}-90=0 \end{cases}$$

Сделаем замену, пусть $x-1=u$, а $y-6=v$, тогда $y-6x=\cancel{v}\ v+6-6u-6=v-6u$.

Имеем:

$$\begin{cases} v-6u=\sqrt{uv} \\ 9u^2+v^2\cancel{=}=90 \end{cases}$$

Возведём первое уравнение в квадрат с учётом того, что $v-6u\geq 0$.

$$\begin{cases} v^2-12uv+36u^2=uv \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases}$$

~~Ес~~ Если $u=0$ имеем $\begin{cases} v^2=0 \\ v^2=90 \end{cases}$, система не имеет решений, т.е. $u\neq 0$.

Поделим первое уравнение на $u^2\neq 0$, и сделаем замену $t=\frac{v}{u}$

$$\begin{cases} t^2-13t+36=0 \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases}$$

Решая первое уравнение получаем $\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=9 \end{array}\right.$

1) $t=4$, тогда $\frac{v}{u}=4$, т.е. $v=4u$, подставляя во второе уравнение получаем:

$9u^2+16u^2=90 \Rightarrow u^2=\frac{18}{5}$, т.е. $u=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$ или $u=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$, тогда $v=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5}$ соответственно, т.е.

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ v=\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} u=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ v=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right.$, с учётом того, что $v-6u\geq 0$ подходит только $\begin{cases} u=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ v=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$,

выражая x и y получаем $\begin{cases} x=\frac{5-3\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{30-12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $t=9$, тогда $\frac{v}{u}=9$, т.е. $v=9u$, тогда

$9u^2+81u^2=90$, т.е. $u=\pm 1$, тогда имеем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=1\\ v=9\end{cases}\\ \begin{cases}u=-1\\ v=-9\end{cases}\end{array}\right.$$

с учётом ~~$u-6v \geq$~~ $v-6u\geq 0$

подходит только $\begin{cases}u=1\\ v=9\end{cases}$

выражая x и y получаем $\begin{cases}x=2\\ y=15\end{cases}$

Ответ: $\begin{cases}x=2\\ y=15\end{cases}$ или $\begin{cases}x=\frac{5-3\sqrt{10}}{5}\\ y=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}\end{cases}$

№3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0$

С учётом ОДЗ модуль раскрывается единственным образом, пусть $t=26x-x^2$, имеем:

$x \in (0; 26)$, но $\sqrt{42} < 6{,}5$, т.к. $6{,}5^2 = 42{,}25$,

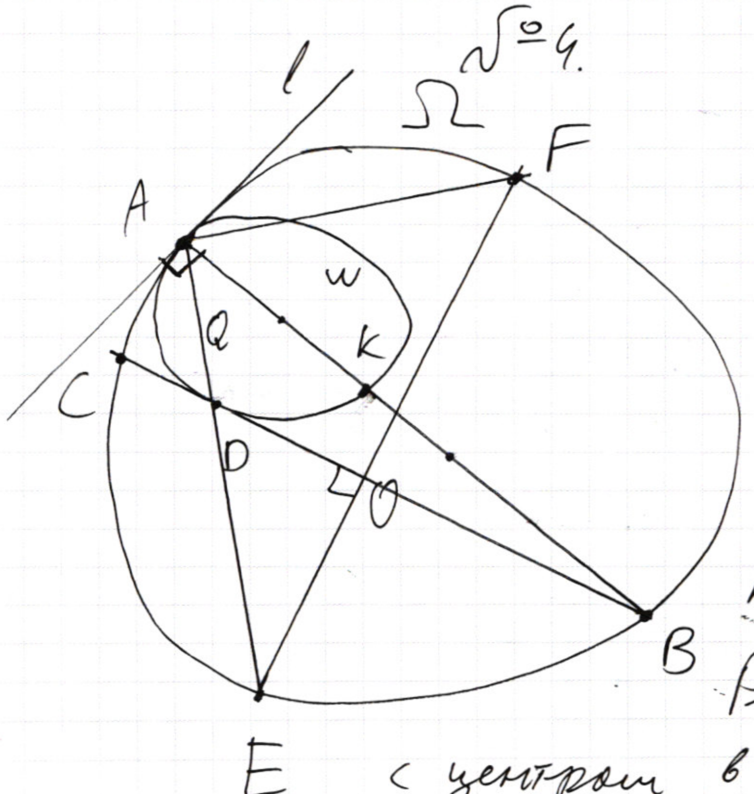
тогда $13 - 2\sqrt{42} > 0$ и $13 + 2\sqrt{42} < 26$,

тогда пересекая $x \in [13 - 2\sqrt{42}; 13 + 2\sqrt{42}]$ и

$x \in (0; 26)$ получаем $x \in [13 - 2\sqrt{42}; 13 + 2\sqrt{42}]$.

Ответ: $x \in [13 - 2\sqrt{42}; 13 + 2\sqrt{42}]$

№4.



Если окружности касаются, то существует гомотетия с центром в точке касания, переводящая одну окружность в другую.

Рассмотрим гомотетию с центром в A, переводящую

w в Ω, но AB – диаметр, т.е. O – центр Ω

лежит на AB, но тогда в силу гомотетии

O_2 – центр w, тоже лежит на AB, пусть $AB \cap w =$

$= K$ (повторно).

Рассмотрим степень точки D, относительно Ω,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t} \\ t>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^{\log_5 60} \geq 13^{\log_5 t} \\ t>0 \end{cases}$$

; прологарифмируем по основанию 5 (это равносильное преобразование на ОДЗ)

$$\begin{cases} \log_5 60 \cdot \log_5 t \geq \log_5 t \cdot \log_5 13 \\ t>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_5 t \cdot \log_5 \frac{60}{13} \geq 0 \\ t>0 \end{cases}$$

, т.к. $\log_5 \frac{60}{13} > 0$, то $\begin{cases} \log_5 t \geq 0 \\ t>0 \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} t \geq 1 \\ t>0 \end{cases}$

Имеем $t \geq 1$, делая обратную замену получаем:

$x^2-26x+1 \leq 0$, т.е. $(x-13+2\sqrt{42})(x-13-2\sqrt{42}) \leq 0$,

т.е. $x \in [13-2\sqrt{42}; 13+2\sqrt{42}]$, ОДЗ даёт:

с одной стороны она равна $CD \cdot BD$, но также

она равна $AD \cdot DE$, т.е. $CD \cdot BD = AD \cdot ED$. ①

При этом степень точки B, относительно ω,

это BD^2, но также это $BK \cdot AB$, т.е.

$BD^2 = BK \cdot AB$. ②

Гомотетия переводит D в E и K в B,

но также она переводит Q в O, тогда

если k – коэф. гомотетии, r – радиус ω,

а R – радиус ~~A~~ Ω, то ~~$\frac{AD}{A}$~~ $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AK} = \frac{R}{r}$

т.к. ~~AE~~ ~~AI~~ $DE = AE - AD$, ~~a B~~

~~а BC~~ а $CD = 12$; $BD = 13$ из ① имеем:

$12 \cdot 13 = AD(AE - AD)$, а из ② имеем:

$13^2 = BK \cdot AB$, но $BK = 2R - 2r$, а $AB = 2R$,

тогда $13^2 = 4R(R - r)$ ~~подставим~~

$12 \cdot 13 = AD(A\cancel{D}E - AD) = AD\left(AD\frac{R}{r} - AD\right) =$

$= AD^2 \frac{R - r}{r} = 12 \cdot 13$ ⊛

$\cos\angle ABC = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{2R}$ из $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90°$; ведь AB – диам)

~~по т. ко~~ Продолжение на стр. 12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Заметим, что $f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$,

тогда $f(1)=f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$;

$f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$ тогда если $a=p$, где p – простое, то

$$f(p)=-f\left(\frac{1}{p}\right)=\left[\frac{p}{4}\right], \text{ т.е. } f\left(\frac{1}{p}\right)=-\left[\frac{p}{4}\right]$$

~~$f(x;y)$~~ $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$, но тогда

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$, тогда $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ если

$f(x)<f(y)$, т.к. $4\le x\le 28$, $4\le y\le 28$ найдём

значения $f(4); f(5); f(6) \ldots f(27); f(28)$.

Это нетрудно сделать через разложение на простые множители числа t и представления его в виде суммы функций f от простых чисел, тогда:

$f(27)=f(4)=f(6)=f(8)=f(9)=f(12)=f(16)=f(18)=f(24)=0$

$f(5)=f(7)=f(10)=f(14)=f(15)=f(20)=f(21)=f(28)=1$

$f(11)=f(22)=f(25)=2$;

$f(13)=f(26)=3$;

$f(17)=f(19)=4$;

$f(23)=5$

Тогда если необходимо $f(x)<f(y)$, то $f(x)\neq 5$,

$f(x)\in\{0;1;2;3;4\}$.

1) $f(x)=0$; Существует 9 удовлетворяющих значений x и 16 значений y таких, что $f(x)=0$ и $f(x)<f(y)$, тогда всего $9\cdot 16=144$ способов выбрать удовлетворяющую пару $(x;y)$, случаи когда $f(x)=1;2;3;4$ рассматриваются аналогично: для $f(x)=1$ существует $8\cdot 8=64$ способов, для $f(x)=2$ существует $3\cdot 5=15$ способов, для $f(x)=3$ $2\cdot 3=6$ способов, для $f(x)=4$ $2\cdot 1=2$ способа.

Итого способов:

$144+64+15+6+2=233$

Ответ: 233.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

По формуле суммы синусов:

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17},$$

но $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда

$$-\frac{2\cos 2\beta}{\sqrt{17}} = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}},$$ или

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right) = \frac{1}{\sqrt{17}},$$ тогда:

$$\left[\begin{array}{l} 2\beta+\frac{\pi}{2} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi n;\ n\in Z \\ 2\beta+\frac{\pi}{2} = \pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi n;\ n\in Z \end{array}\right.$$, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} 2\beta = -\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi n \\ 2\beta = \frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi n \end{array}\right.$$

Но из $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k;\ k\in Z \\ 2\alpha+2\beta = \pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k \end{array}\right.$$

Возможны 4 случая:

1) $\begin{cases} 2\beta = -\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2\alpha + 2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{cases}$, тогда

подставим 2β:

$$2\alpha - \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi l;\ l \in Z$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi l$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi l, \text{ тогда}$$

$$tg\alpha = tg\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{3}{5}$$

2) $\begin{cases} 2\beta = -\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2\alpha + 2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\alpha - \frac{\pi}{2} + \cancel{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}} = \pi + \cancel{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}} + 2\pi l;\ l \in z$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi l$$

$$tg\alpha = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\begin{cases} 2\beta = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2\alpha + 2\beta = \cancel{\pi + \arcsin} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha + \frac{\pi}{2} - \cancel{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}} = -\cancel{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}} + 2\pi l; \; l \in \mathbb{Z}$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi l; \; \operatorname{tg}\alpha = -1$

4) $\begin{cases} 2\beta = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2\alpha + 2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha + \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \cancel{+2\pi} = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi l; \; l \in \mathbb{Z}$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi l$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi l$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)} =$

$= \frac{\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{5}{3}$ Ответ: $\pm 1; \frac{3}{5}; -\frac{5}{3}$.

Продолжение № 4

по т. косинусов в ΔADB:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2\cos\angle ABC \cdot BD \cdot AB$$

$$AB = 2R;\ BD = 13$$

$$AD^2 = 4R^2 + 169 - \frac{25}{\cancel{R}} \cdot 2\cancel{R} \cdot 13$$

$$AD^2 = 4R^2 - 12 \cdot 13$$

Подставим AD^2 в (*):

$$\left(4R^2 - 12 \cdot 13\right)\left(\frac{R-r}{r}\right) = 12 \cdot 13$$, но при этом

$$13^2 = 4R(R-r)$$, подставим $(R-r)$:

$$\left(4R^2 - 12 \cdot 13\right) = 12 \cdot \cancel{13} \cdot \frac{4Rr}{13^{\cancel{2}}}$$

$$\cancel{4R^2 - \frac{12}{13} \cdot 4Rr - 12 \cdot 13 = 0 \mid \cdot 13}$$

$$\cancel{52R^2 - 48Rr - 12 \cdot 169 = 0}$$

$$\cancel{D = 48^2 r^2 \cdot 12 \cdot 169 \cdot 52 = 4 \cdot 2 \cdot 1 \ldots}$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 13^2 = 4R(R-r) \\ 4R^2 - 12 \cdot 13 = \frac{12}{13} \cdot 4Rr \end{cases} (**)$$

Очевидно эта система решаема и из нее можно найти R и r

Зная R, можно найти AD из того, что

$AD^2 = 4R^2 - 12 \cdot 13$, ну а зная AD, R и r, можно найти AE, ведь $AE = AD \cdot \frac{R}{r}$,

а $\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{AD \cdot \frac{R}{r}}{2R} =$

$= \frac{4R^2 - 12 \cdot 13}{2r} = \frac{2R^2 - \cancel{26}\ 78}{r}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{2R^2 - 78}{r}\right)$

Ответ: R и r можно найти из (**), ведь это система из 2-х уравнений с двумя неизвестными, а $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{2R^2 - 78}{r}\right)$.

№6.

Пусть $\frac{8 - 6x}{3x - 2} = f(x)$; $18x^2 - 51x + 28 = g(x)$

Рассмотрим $ax + b \geq g(x)$

$\Updownarrow$

$18x^2 - (51 + a)x + (28 - b) \leq 0$

Если и $D < 0$, то это не выполнится никогда.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

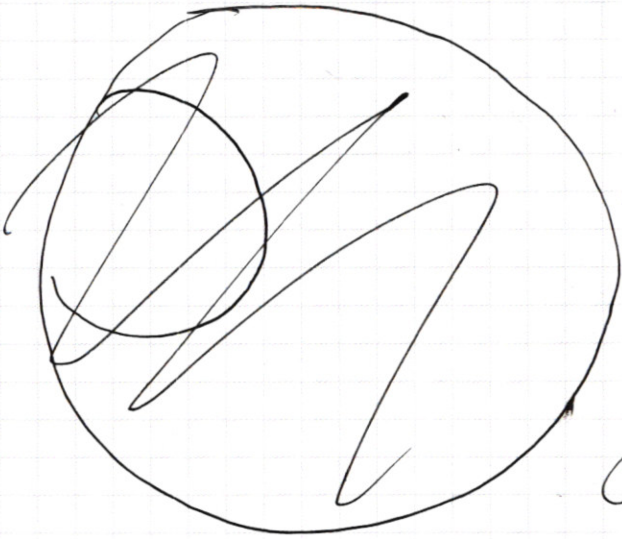
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

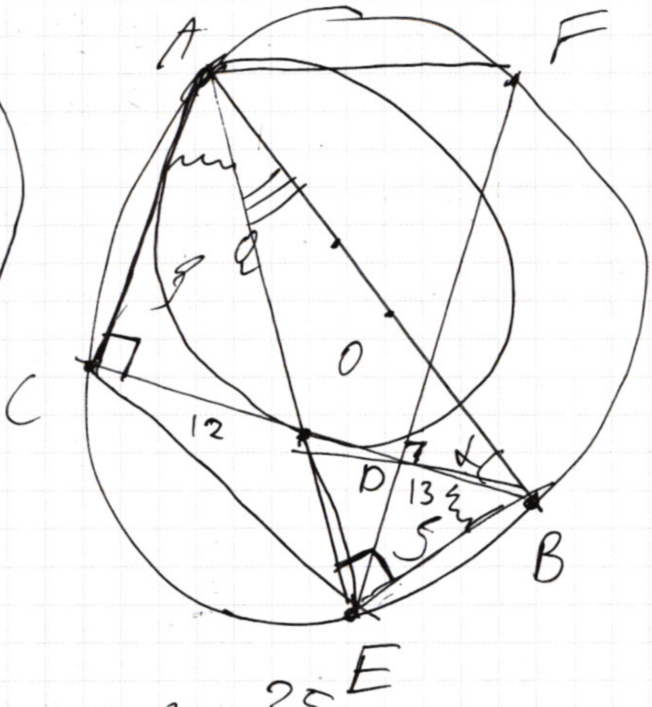
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





~~AD~~

$AD^2 = 169 +$

$\cos\alpha = \frac{25}{2R}$

$\sin\beta = \frac{DE}{13}$

$\sin\beta = \frac{12}{AD}$

$\frac{DE}{13} = \frac{12}{AD}$

48×48: 384, 192, 2304

52×48: 416, 208, 2496

2496×169: 22464, 14976, 2496, 421824

421824

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит $D \geq 0$, т.е. $(a+51)^2 - 109 + 4b \geq 0$,

но если $x \in (\frac{2}{3}; 2]$ необходимо, чтобы,

один ~~корень~~ ~~был~~ если x_1, x_2 – решения ур-я,

нужно $x_1 < \frac{2}{3}$; $x_2 \geq 2$, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{a+51-\sqrt{(a+51)^2-109+4b}}{36} < \cancel{0}\ \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{a+51+\sqrt{(a+51)^2-109+4b}}{36} \geq 2 \end{cases}$$

, решая эту систему можно получить ~~усл~~ условие $\Leftrightarrow$ $ax+b \geq g(x)$.

Решая $ax+b \leq f(x)$, т.е.

$\cancel{8-(6+a)x-b}$

$$\frac{8-6x-(ax+b)(3x-2)}{3x-2} \geq \cancel{\leq}\ 0$$

$$\frac{8-6x-3ax^2+2ax-3bx+2b}{3x-2} \geqslant 0$$

~~Я~~ на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$ это ~~аналогич~~ эквивалентно ~~совокупности~~ системе (аналогично с 1 случаем):

$$\begin{cases} \dfrac{2a-3b-\sqrt{(2a-3b)^2+4(2b+8)\cdot 3a}}{3a} \leqslant \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2a-3b+\sqrt{(2a-3b)^2+4(2b+8)\cdot 3a}}{3a} \geqslant 2 \end{cases}$$

Решая эту систему и пересекая с решениями 1-й системы будут получены все пары ~~в~~ чисел $(a;b)$, удовлетворяющие условию

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\alpha+2\beta=\gamma$.

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin\gamma \cdot \cos 2\beta + \cos\gamma \cdot \sin 2\beta$

$\cos^2\gamma = 1-\frac{1}{17} = \frac{16}{17}$

$\cos\gamma = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad 3=\sqrt{30-12-15+6}=$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad | \cdot \sqrt{17}$

$-\cos 2\beta \pm 4\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad |:\cos\alpha$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} = 2\,tg\,\alpha$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{y(x-1)+6(1-x)}=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (9x^2-18x+9)+(y^2-12y+36)=90 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{9}9(x-1)^2+(y-6)^2=90$ $f(5)=1$

$\begin{cases} x-1=u \\ y-6=v \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=u+1 \\ y=v+6 \end{array}$

$f(7)=1$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(\cancel{16}17)=4$

f

$\cancel{11}, \cancel{13}, \cancel{17}, \cancel{18}, \cancel{22}, 23, \cancel{25}, \cancel{26},$

$\begin{cases} v+\cancel{6}-6u-\cancel{6}=\sqrt{uv} \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases}$

$v-6u\geq 0$

$\begin{cases} v^2-12uv+36u^2=uv \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} v^2-13uv+36u^2=0 \\ 9u^2+v^2-90=0 \end{cases}$ $| : u^2$

$\cancel{\frac{u}{v}}$ $\frac{v}{u}=t$

$\cancel{27u^2-13uv+90=0}$

$D=169-144=25$

$t^2-13t+36=0$

$t_{1,2}=\frac{13\pm5}{2}$ $\left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=4 \end{array}\right.$

1) $\frac{v}{u}=9$

$v=4u$

2) $\frac{v}{u}=4$

$-2u\geq0$

$x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5}$; $y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$26x-x^2>0 \quad x(26-x)>0$

$x(x-26)<0$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$$

$26x-x^2=t$

$$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t} \geq 0$$

$$t^{\log_5 60} \geq 13^{\log_5 t}$$

$\times 26$
26
156
52
676

$6{,}5^2>42$ $\quad \log_5 60 \cdot \log_5 t \geq \log_5 t \cdot \log_5 13$

$\log_5 t \cdot \log_5 \frac{60}{13} \geq 0$ $\quad 672=336\cdot 2=4\cdot 168=$

$=8\cdot 84=16\cdot 42$

$\times 65$
65
325
390
4225

$\log_5 t \geq 0 \quad t \geq 1$

$D=672$

$26x-x^2 \geq 1$

$x^2-26x+1 \leq 0$

$x=\frac{26 \pm 4\sqrt{42}}{2}$

$x \in [13-2\sqrt{42}; 13+2\sqrt{42}]$

$0 \quad 13-2\sqrt{42} \quad 13+2\sqrt{42} \quad 26$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$

$y = q_1^{\beta_1} \dots q_j^{\beta_j}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{p}{q}\right)$ $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

~~2~~
~~3~~
5 может быть в кв.
7
11
13
17
19
23

1) $x = 2^k \cdot 3^t$

$y \Rightarrow : p > 3$

4, 6, 8, 9,
12, 16, 18,
24,

$8 \cdot 17 + \dots$

5, 7, 10, 11, 13, 14, 15

$f\left(\frac{1}{a}\right) = 8.$

НОД $(x; y) = K$

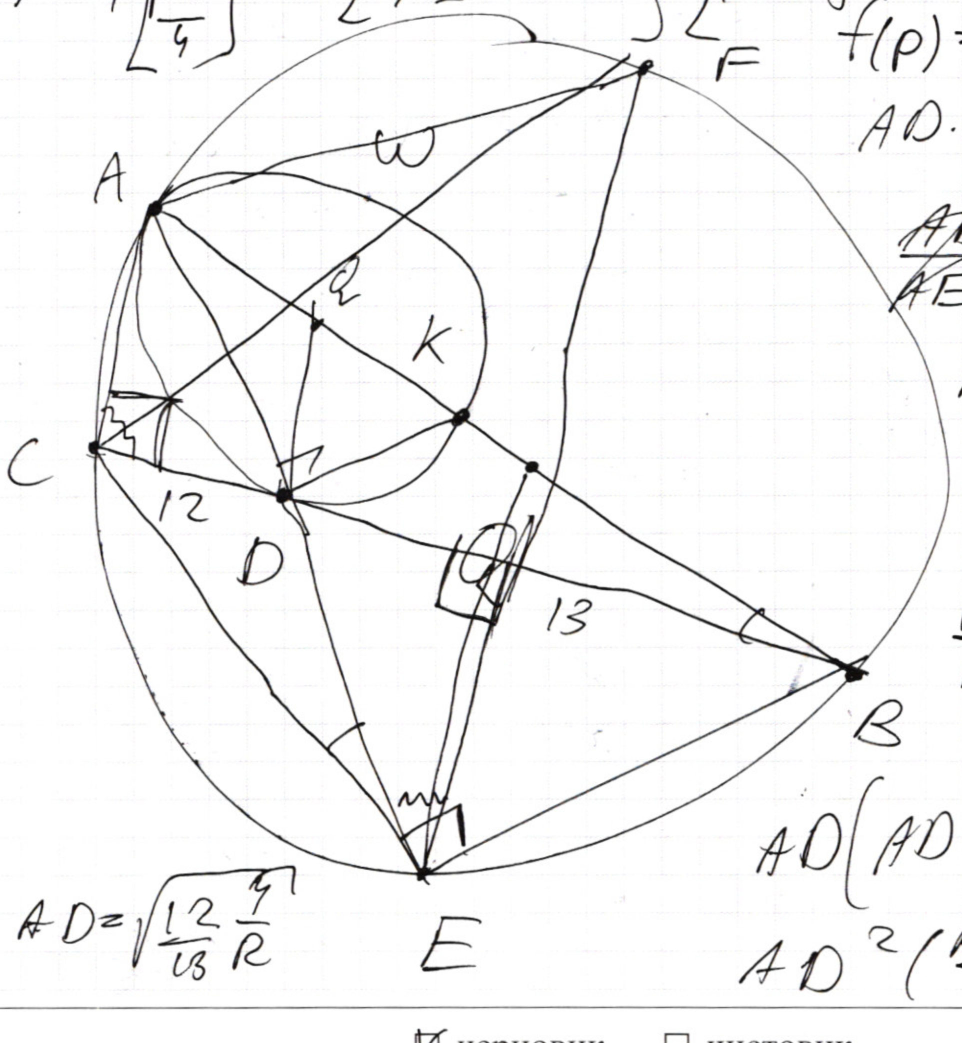
$0 = f\left(p \cdot \frac{1}{p}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$\frac{x}{y} = \frac{K \cdot a}{K \cdot b} = \frac{a}{b}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \alpha_1 \cdot \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \dots + \alpha_i \cdot \left[\frac{p_i}{4}\right] - \beta_1 \dots$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$



$AD \cdot DE = DC \cdot BD = 12 \cdot 13$

$AD(AE - AD) = 12 \cdot 13$

BK.

$\frac{12}{13} = AD^2 \cdot \frac{R}{4}$

$AD^2 = \frac{12 \cdot 4}{13R}$

$AD\left(AD\frac{R}{4} - AD\right) = \frac{R-4}{R \cdot 4}$

$AD^2\left(\frac{R-4}{4}\right) = 12 \cdot 13$

$AD = \sqrt{\frac{12}{13}\frac{4}{R}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

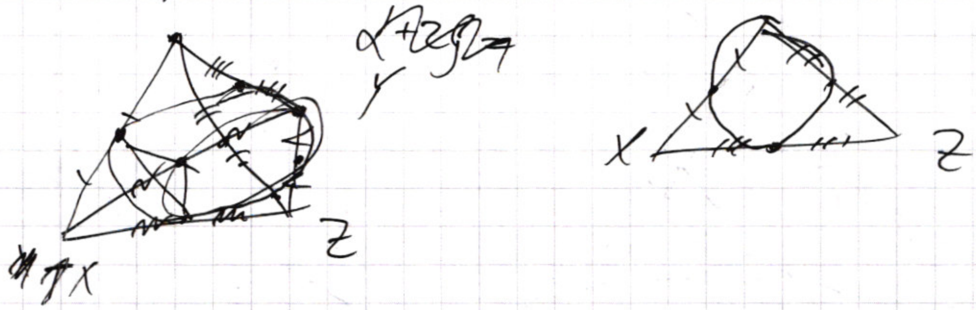
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

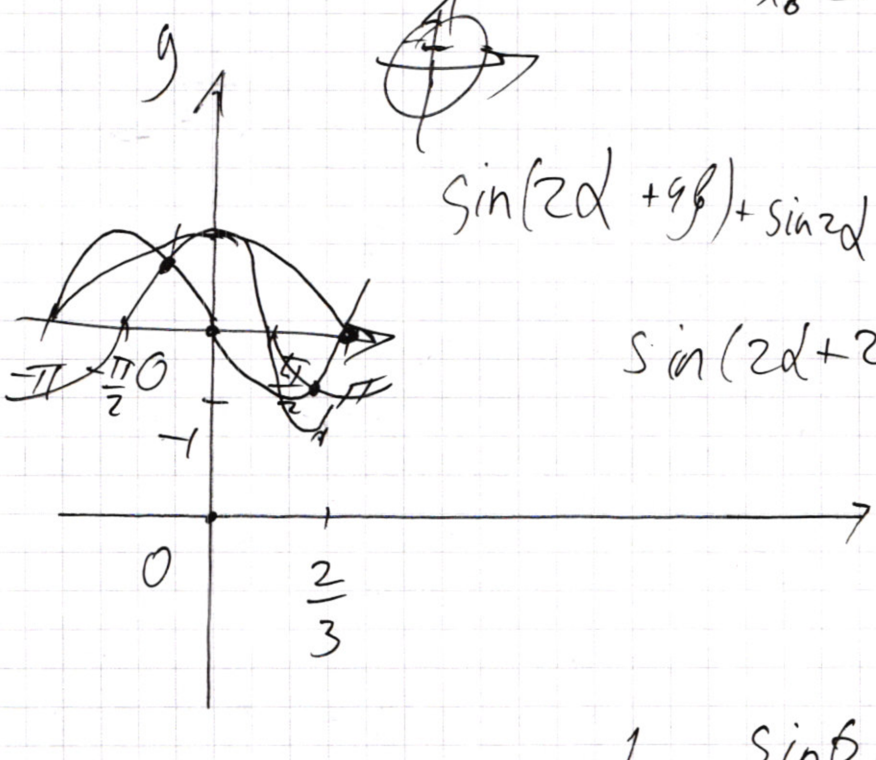
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\alpha+4\beta=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$



$g(x)=\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28=f(x)$

$x_в=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$



$f(1)=-5$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\cos(2\alpha+}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\beta\right)$

$2\alpha+2\beta=\frac{3\pi}{2}-2\beta+2\pi n$

$2\alpha+2\beta=\pi-\cancel{\frac{3\pi}{2}}+2\beta-\pi+2\pi m$

$\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n$

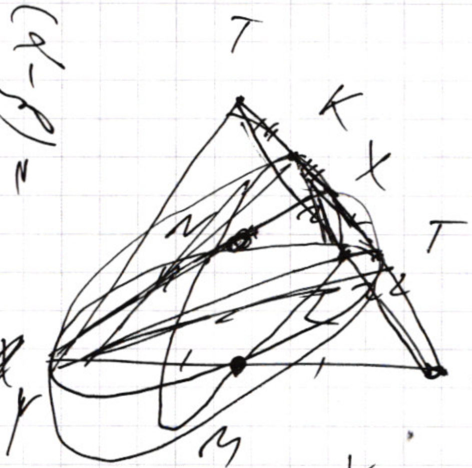
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

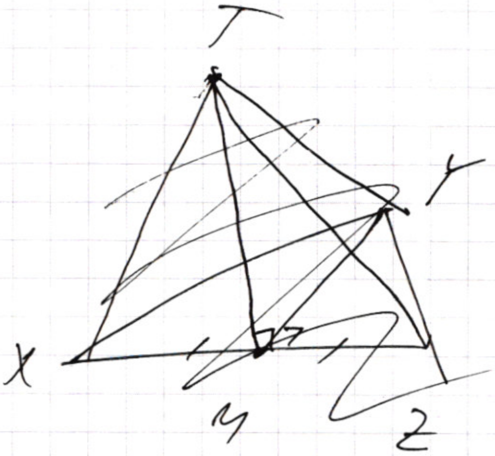
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

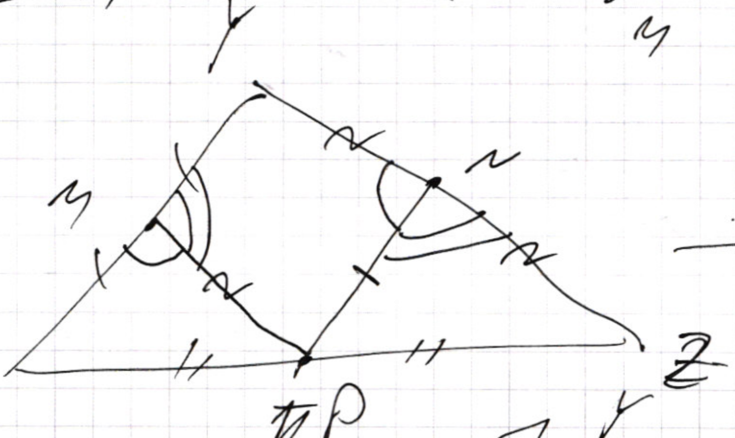
$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

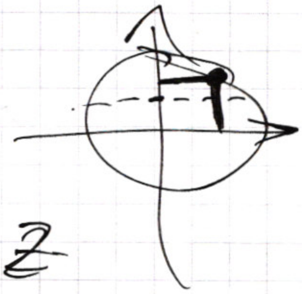
$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cancel{\sin\cos\alpha}\,\sin 4\beta+3\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

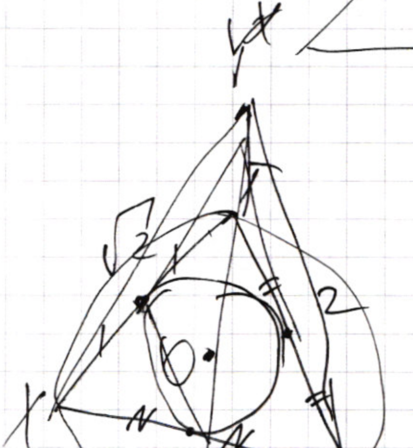
$tg(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}$

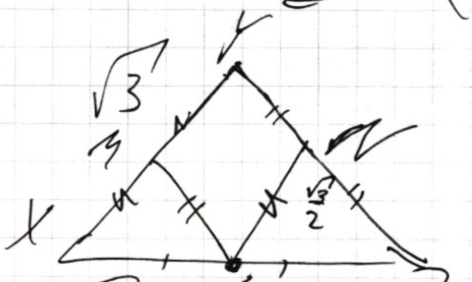












$2\alpha+\frac{\pi}{2}\;\cancel{\quad}=2\pi n$

$\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi n$

$$\left[\begin{array}{l}2\alpha+2\beta=\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi n\\ 2\alpha+2\beta=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi n\\ \frac{\pi}{2}+2\beta=\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi n\\ \frac{\pi}{2}+2\beta=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi n\end{array}\right.$$

$2\alpha+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi n$ $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$