

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 25$, $2 \leq y \leq 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN . Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = 2 \cdot \left(-\frac{7}{\sqrt{5}}\right) \cdot \cos(2\beta)$$

$$-\frac{2}{5} = -\frac{14}{\sqrt{5}} \cdot \cos(2\beta) \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{7}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin(2\beta) =$$

$$= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

~~$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha) \cos(2\beta) + \sin(2\beta) \cos(2\alpha)$$~~

~~$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\cos(2\beta) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) \Rightarrow$$~~

~~$$\Rightarrow \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 2\beta - \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$~~

~~$$2\alpha + 2\pi n = -\frac{\pi}{2}; \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \quad 2\alpha = 2\pi k - 2\beta - \frac{\pi}{2};$$~~

~~$$\alpha = \pi k - \beta - \frac{\pi}{4}, \text{ где } \cos(2\beta) = \frac{7}{\sqrt{5}};$$~~

$$\sin(2\beta) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

~~$$1) \alpha = \pi k - \beta - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\pi k - 2\beta - \frac{\pi}{2} + 2\beta) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$~~

~~$$2) \alpha = \pi k + \frac{\pi}{4} - \beta, \cos(2\beta) = \frac{7}{\sqrt{5}}, \sin(2\beta) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$~~

~~$$a) \sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\alpha) = \sin\left(\pi k + \frac{\pi}{4} - 2\beta\right) =$$~~

~~$$= \pm \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(2\beta) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(2\beta) =$$~~

~~$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(2\beta) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(2\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$~~

~~$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{\sqrt{10}}{2} \neq \frac{2}{\sqrt{5}}$$~~

~~$$\cos(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos(\alpha) = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$$~~

$$\begin{aligned} \delta) \sin(2\beta) &= -\frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Как и ранее, } \sin(\alpha + \beta - 2\beta) = \\ &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) = \\ &= \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) - \frac{3}{\sqrt{20}} \cdot \left(\frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{20}} \right) \\ & \left(\cos(\alpha) = \frac{7}{\sqrt{20}} \right) \end{aligned}$$

Сначала проверим все ли варианты рассмотрели.

$$\begin{aligned} \text{+ } \varphi(\alpha) &= -1; \alpha = -\frac{3\pi}{4}; 2\beta - \text{ такой угол, но } \sin(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos(2\beta) &= \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ Тогда } \sin(\alpha + \beta) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2) } \alpha &= \pi n + \frac{3\pi}{4} - 2\beta, \text{ где } \pi \Rightarrow \varphi(\alpha) = \operatorname{tg}(\pi n + \frac{3\pi}{4} - 2\beta) = \\ &= \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{4} - 2\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{4}) - \operatorname{tg}(2\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{4}) \cdot \operatorname{tg}(2\beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg}(2\beta)}{1 + \operatorname{tg}(2\beta)} \\ \text{или } \operatorname{tg}(\varphi(2\beta)) &= \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg}(2\beta) = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \sin(2\beta) &= -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg}(2\beta) = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

Тогда $\operatorname{tg}(\alpha) = -1; \frac{1}{3}; 3$. Так как все значения меньше нуля, то эти три значения подходят.

Ответ: $\operatorname{tg}(\alpha) = -1; \frac{1}{3}; 3$.

N2

$$\begin{cases} x - 72y = \sqrt{2x^2 - 72x - 4y + 6} = \sqrt{(2x-1)(x-6)}, \quad (2x-1)(x-6) \geq 0 \\ x^2 + 36y^2 - 72x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$a = x - 6; \quad b = 2x - 1 \Rightarrow x - 72y = a - 6b; \quad a \geq 0$$

$$a^2 + 36b^2 = x^2 - 72x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 45$$

Тогда получаем в итоге следующую систему:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab}, & ab \geq 0 \\ a^2 + 9b^2 - 36 - 9 = 45 \end{cases}$$



$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 - 12ab + 36b^2 = 9b; & a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \\ a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 (=) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a - 4b)(a - 9b) = 0 (=) \begin{cases} a = 4b \\ a = 9b \end{cases} \Rightarrow a = 4b; 9b^2 \geq 0 \text{ в модальном смысле}$$

1) $a = 4b \Rightarrow (4b)^2 + 9b^2 = 90;$

$$(7b + 9b)^2 = 90; b^2 = \frac{90}{25}; b = \pm \frac{\sqrt{90}}{5} = \pm \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

2) $a = 9b \Rightarrow 2y - 7 = \frac{3\sqrt{10}}{5}; y = \frac{3\sqrt{10} + 5}{10}; a = 4b = \frac{12\sqrt{10}}{5};$

$$x - 6 = \frac{12\sqrt{10}}{5}; x = \frac{12\sqrt{10} + 30}{5}$$

$$b = \frac{-3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow 2y - 7 = \frac{-3\sqrt{10}}{5}; y = \frac{-3\sqrt{10} + 5}{10}; a = 4b = \frac{-12\sqrt{10}}{5};$$

$$x - 6 = \frac{-12\sqrt{10}}{5}; x = \frac{-12\sqrt{10} + 30}{5}$$

2) $a = 9b \Rightarrow (9b)^2 + 9b^2 = 90; 90b^2 = 90; b^2 = 1; b = \pm 1.$

$$b = 1 \Rightarrow 2y - 7 = 1; y = 4; a = 9b = 9; x - 6 = 9; x = 15.$$

$$b = -1 \Rightarrow 2y - 7 = -1; y = 3; a = 9b = -9; x - 6 = -9; x = -3.$$

Ответ: Тогда у уравнения точные решения:

$$\left(\frac{12\sqrt{10} + 30}{5}; \frac{3\sqrt{10} + 5}{10} \right); \left(\frac{-12\sqrt{10} + 30}{5}; \frac{-3\sqrt{10} + 5}{10} \right); (15; 4); (-3; 3).$$

Ответ: $\left(\frac{12\sqrt{10} + 30}{5}; \frac{3\sqrt{10} + 5}{10} \right); \left(\frac{-12\sqrt{10} + 30}{5}; \frac{-3\sqrt{10} + 5}{10} \right);$

$$(15; 4); (-3; 3)$$

N3

$$70x + |x^2 - 70x| \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3 (10x - x^2) \Rightarrow 70x - x^2 \geq 0,$$

н.в. в этом отрезке
функция неотрицательна.

$$a = 70x - x^2, \text{ тогда } a \geq 0.$$

$$a + |1 - a| \log_3 4 \geq 5 \log_3 (a)$$

$$a + a \log_3 4 \geq 5 \log_3 (a)$$

Пусть $a = 3^t$, тогда $t = \log_3 a$.

$$3^t + 3^{t + \log_3 4} \geq 5^t; \quad 3^t + 4^t \geq 5^t, \quad \text{Заметим,}$$

что левая часть имеет максимум

правой, н.р. ~~...~~

~~...~~

~~...~~

~~...~~

~~...~~

Если t_1 — корень уравнения $3^{t_1} + 4^{t_1} = 5^{t_1}$, то при $t < t_1$ ~~...~~

~~...~~

~~...~~

~~...~~

~~...~~

~~...~~

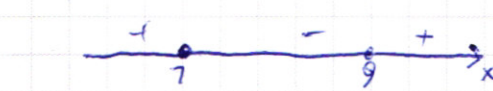
~~...~~

~~...~~

~~...~~

~~...~~

~~...~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

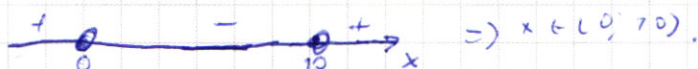
Также, $70x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 70x < 0;$

$$x(x-70) < 0; \quad g(x) = x(x-70), \quad g(x) < 0$$

н.ф.

Старший коэффициент положительный

0; 70



Тогда в итоге $x \in (0; 7] \cup [9; 70)$.

Ответ: $x \in (0; 7] \cup [9; 70)$.

N5

$$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) + f(b) = f(a);$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y), \quad x \text{ и } y \text{ — целые числа от } 2 \text{ до } 30$$

и, тогда можно найти все $f(a)$ для $a \in \mathbb{Z}, a \in [2; 30]$, после чего почитаем некоторые значения пары ~~каждой пары~~ ~~равных~~ чисел, у ко-

торых не равны значения функции,

$$\text{т.к. } f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) = -(f(y) - f(x)) = -f\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) > 0; \text{ т.е. для каждой}$$

пары чисел a и b , если $f(a) \neq f(b)$, то верно

$$f\left(\frac{a}{b}\right) \text{ и } f\left(\frac{b}{a}\right) \text{ равно одному из } 0.$$

$$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 0; \quad f(3) = \left[\frac{2}{3}\right] = 0; \quad f(5) = \left[\frac{2}{5}\right] = 1;$$

$$f(7) = \left[\frac{2}{7}\right] = 1; \quad f(11) = \left[\frac{2}{11}\right] = 2; \quad f(13) = \left[\frac{2}{13}\right] = 3;$$

$$f(17) = \left[\frac{2}{17}\right] = 4; \quad f(19) = \left[\frac{2}{19}\right] = 4; \quad f(23) = \left[\frac{2}{23}\right] = 5, \dots$$

Если взять произвольные числа.

$F(4) = F(2) + F(2) = 0$; $F(6) = F(2) + F(3) = 0$;
 $F(8) = F(4) + F(2) = 0$; $F(9) = F(3) + F(3) = 0$; $F(10) =$
 $= F(2) + F(5) = 7$; $F(12) = F(3) + F(4) = 0$; $F(14) = F(2) + F(7) =$
 $= 7$; $F(15) = F(3) + F(5) = 7$; $F(16) = F(4) + F(4) = 0$;
 $F(18) = F(2) + F(9) = 0$; $F(20) = F(4) + F(5) = 7$; $F(27) =$
 $= F(3) + F(7) = 7$; $F(22) = F(2) + F(7) = 2$;
 $F(24) = F(2) + F(12) = 0$; $F(25) = F(5) + F(5) = 2$.

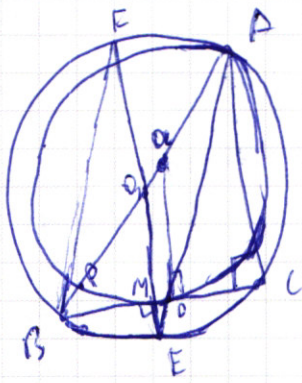
Тогда $F(a)$ для целых a от 2 до 25 принимает
 следующие значения 0; 0; 0; 7; 0; 7; 0; 0; 7; 2; 0;
 3; 7; 7; 0; 4; 0; 4; 7; 7; 2; 5; 0; 2; ~~и т.д.~~ (по порядку),
 или же 7 раз 0, 7 раз 7; 3 раза 2; 7 раз 3;

2 раза 4; 1 раз 5. Тогда ненулевыми
 пар различных чисел равно $\frac{20 \cdot 74 + 7 \cdot 77 + 3 \cdot 27 + 7 \cdot 23 +$

$77 + \frac{76 \cdot 2}{2} + 2 \cdot 22 + 7 \cdot 23 = (740 + 779 + 63 + 23 + 44 + 23) / 2 =$
 $= (203 + 779 + 90) / 2 = (322 + 90) / 2 = 767 + 45 = 206.$

Ответ: Тогда всего 206 пар различных пар.
 Ответ: 206 пар чисел (x, y) удовлетворяют, тогда
 $x, y \in \mathbb{N}$; $x, y \in F(2, 25)$ и $F(x, y) \geq 0$.

N4



То есть ~~отрезок~~ AE является
 средней линией BC ($BC \parallel AE$) в
 окружности Ω .
 Пусть O_1 и O_2 - центры окружностей
 Ω и ω соответственно, r_1 и r_2 - их ради-
 ус. Так как Ω и ω касаются в точке A , ~~то~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда эти линии на одной прямой, O_1 , A и B -
лежат на одной прямой, т.к. O_1 - центр Ω , а
 AB - диаметр. Тогда O_1 - середина AB .

Т.к. E - середина дуги BC , то FE перпендикулярна

BC и является средним перпендикуляром к BC , тогда FE проходит через O_2 и
 M - середину BC . Пусть P - точка пересечения
 AB и BC , отличная от A .

Заметим, что $O_2 \perp BC$, т.к. это касательная к радиусу w , $A \perp BC$, т.к. ABC - вписанный
в Ω и опирается на диаметр, то $\angle O_2PA$ по
теореме Фалеса $O_1A : O_2A = MC : PC$, т.к.

$$O_1M \perp BC \perp O_2P; BC \perp AP \Rightarrow O_1M \parallel O_2P \parallel AC.$$

$$MC = BC : 2 = (BD + DC) : 2 = \left(\frac{75}{2} + \frac{77}{2}\right) : 2 = 8.$$

$$\text{Тогда } O_1A : O_2A = MC : PC = 8 : \left(\frac{75}{2}\right) = 76 : 75.$$

$$O_1A = r_1, O_2A = r_2, \text{ как радиусы } R \text{ и } w. \text{ Тогда}$$

$$r_1 = \frac{75}{76} r_2. \text{ Теперь получим центр тяжести}$$

точки B относительно w : она равна

кратности диаметра, а точнее радиуса

квadrатное расстояние от центра и радиуса

$$w, \text{ т.е. она равна } BO^2 \text{ а также } BO^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$BO^2 = (BO_1)^2 - (AO_1)^2 = r_2^2 - (2r_1 - r_2)^2 - r_1^2$$

$$BO = \frac{25}{2} \Rightarrow \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{(2n_1 - n_2)^2 - n_2^2}{4} = \frac{(2n_1 - 2n_2)(2n_2)}{4} =$$

$$= 4n_1(n_2 - n_2). \quad n_1 = \frac{76}{75}n_2 \Rightarrow \left(\frac{25}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{76}{75}n_2$$

$$\cdot \left(\frac{76}{75}n_2 - n_2\right) = \frac{4 \cdot 76}{75} \cdot n_2^2 \Rightarrow \frac{75 \cdot 25^2}{4 \cdot 76} = n_2^2 = \frac{75 \cdot 25^2}{76}$$

$$n_2 = \frac{75 \cdot 11}{76}. \quad \text{Получа } n_1 = \frac{75 \cdot 11 \cdot 96}{76 \cdot 75} = 11.$$

$$BC = 76. \quad BO_1 = n_1 = 11. \quad BM = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BO_1M = \arcsin\left(\frac{BM}{BO_1}\right), \text{ м.к.}$$

$\sin(\angle BO_1M) = \frac{BM}{BO_1}$; $\angle BO_1M$ - угол при основании равнобедренного $\triangle BO_1M$.

$$\text{Получа } \angle BO_1M = \arcsin\left(\frac{8}{11}\right).$$

$\angle FO_1A = \angle BO_1M$, как вертикальные;

$$\angle FO_1A = \angle O_1FA = \alpha \Rightarrow \angle O_1FA = 90^\circ - \frac{\angle FO_1A}{2} =$$

$$= 90^\circ - \frac{\arcsin\left(\frac{8}{11}\right)}{2}, \text{ как угол при основании}$$

$\triangle FA$ равнобедренного $\triangle O_1FA$.

$$S_{\triangle AEF} = S_{\triangle AO_1F} + S_{\triangle AO_1E} = 2 S_{\triangle AO_1F}; \text{ м.к.}$$

Получа FO_1 и O_1E принадлежат одной прямой, $FO_1 = O_1E = n_1$; A - другая вершина

(расстояния от A до FO_1 и O_1E одинаковы,

прямые FO_1 и O_1E перпендикулярны AA_1).

$$S_{\triangle AO_1F} = \frac{1}{2} \cdot O_1F \cdot O_1A \cdot \sin(\angle FO_1A) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 11 \cdot \frac{8}{11} = 4 \cdot 11. \quad S_{\triangle AFE} = 2 \cdot 4 \cdot 11 =$$

$$= 88.$$

Ответ: радиус равен 11 и $\frac{75 \cdot 11}{76} = \frac{16^2 - 7}{76} =$

$= 76 - \frac{7}{76} = 75 \frac{75}{76}$ для Ω и ω соответственно;

$$\angle AFE = 90^\circ - \frac{\arcsin\left(\frac{8}{11}\right)}{2}; \quad S_{\triangle AEF} = 88.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{76x-76}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2 + 36x - 3 \text{ при } x \in \left[\frac{7}{4}, 1\right].$$

$4x-5 < 0$, т.е. $x < \frac{5}{4}$, т.е. $x \leq 7 < \frac{5}{4}$.

$$\frac{76x-76}{4x-5} \leq ax+b \Leftrightarrow \frac{76x-76 - (4x-5)(ax+b)}{4x-5} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 76x - 76 - 4ax^2 + 5ax - 4bx + 5b \geq 0, \text{ т.е. } 4x-5 < 0$$

$$\Leftrightarrow -4ax^2 + (76 + 5a - 4b)x - 76 + 5b \geq 0.$$

$$ax+b \leq -32x^2 + 36x - 3 \Leftrightarrow -32x^2 + (36-a)x - 3-b \geq 0.$$

$-32 < 0 \Rightarrow$ это вершина парабола и только парабола, парабола
~~открыта вверх, $x_1 = x_2$, $x_1 = x_2 = x_0$ — единственный и самый маленький~~
~~корень уравнения $-32x^2 + (36-a)x - 3-b = 0$ (т.е. отсюда~~
~~используя формулу $x = \frac{(36-a) \pm \sqrt{(36-a)^2 - 4(-3-b)(-32)}}$~~
 ~~$= \frac{36-a \pm \sqrt{1296 - 72a + a^2 - 128b + 480}}{64} = \frac{36-a \pm \sqrt{1296 - 72a + a^2 - 128b + 480}}{64}$,~~
 ~~$x_1, x_2 = \frac{36-a \pm \sqrt{1296 - 72a + a^2 - 128b + 480}}{64}$;~~
 ~~$x_1 = \frac{36-a + \sqrt{1296 - 72a + a^2 - 128b + 480}}{64}$ и $x_2 = \frac{36-a - \sqrt{1296 - 72a + a^2 - 128b + 480}}{64}$;~~
 ~~$x_1 \leq \frac{7}{4}$ и $x_2 \geq 1$ и $x_1 \leq x_2$, $x_1 \leq x_2$.~~

$\frac{7}{4}$ и 1 находятся между корнями и самым маленьким корнем уравн. $-32x^2 + (36-a)x - 3-b = 0$, это равносильно тому, что x_1 — левая точка $\left(\frac{7}{4}, 1\right)$ иначе или не меньше 0. Т.е. ~~$x_1 \leq \frac{7}{4}$ и $x_2 \geq 1$~~
 $0 \leq -32 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 + (36-a) \cdot \frac{7}{4} - 3 - b = -2 + 9 - \frac{a}{4} - 3 - b = 4 - \frac{a}{4} - b$
 $\frac{a}{4} + b \geq 4$, $0 \leq -32 + 36 - a - 3 - b \Rightarrow a + b \leq 7$.

Вертикаль к первому уравнению.

$$-4a x^2 + (7b + 5a - 4b)x - 7b + 5b \geq 0$$

~~$a = 0 \Rightarrow (7b - 4b)x - 7b + 5b \geq 0 \Rightarrow x$ удовлетворяет~~

~~равенству с одной стороны, тогда достаточно~~

~~маленькое, чтобы в точках $\frac{1}{4}$ и 1 было~~

~~не меньше нуля, тогда все условия будут выполнены.~~

~~Поэтому $(7b - 4b) \cdot \frac{1}{4} - 7b + 5b \geq 0$; $4 - b - 7b + 5b \geq 0$;~~

~~$72 \leq 4b$; $b \geq 3$. $(7b - 4b) - 7b + 5b \geq 0$; $b \geq 0$;~~

~~тогда достаточно мало, чтобы $a \geq 0$ удовлетворяло, а.к. $a - 3 \leq 0$ тогда $a \geq 3$~~

~~$a > 0 \Rightarrow$ достаточно и необходимо является~~

~~равенство, что в точках $\frac{1}{4}$ и 1 выполнено~~

~~все неравенство, а.к. этот случай анализируют~~

~~сторону неравенству ($a > 0 \Rightarrow -4a \leq 0$, минимальный~~

~~коэффициент меньше 0, точки единственности~~

~~между корнями). Тогда: $-4a \cdot (\frac{1}{4})^2 + (7b + 5a - 4b) \cdot \frac{1}{4} -$~~

~~$-7b + 5b \geq 0$; $-\frac{a}{4} + 4 - b + \frac{5}{4}a - 7b + 5b \geq 0$; $a + 4b \geq 92$;~~

~~$\frac{a}{4} + b \geq 3$, что верно, т.к. $\frac{a}{4} + b \geq 4$. Также,~~

~~$-4a \cdot (1) + (7b + 5a - 4b) - 7b + 5b \geq 0$; $-4a + 7b + 5a - 4b -$~~

~~$-7b + 5b \geq 0$; $a + b \geq 0$, что верно, т.к. $a + b \geq 1$.~~

~~$a \geq 0 \Rightarrow a/4 + b \leq a + b$; $4 \leq a + b \leq 7$, тогда $4 \leq a + b \leq 7$, удовлетворяет.~~

~~$a < 0$. Тогда $a/4 + b \leq a + b$; $4 \leq a + b \leq 7$, тогда $4 \leq a + b \leq 7$, удовлетворяет.~~

~~исполняются, чтобы на отрезке от $\frac{1}{4}$ до 1 было~~

~~два корня ур-ния $-4ax^2 + (7b + 5a - 4b)x - 7b + 5b = 0$.~~

~~Это равносильно тому, что между~~

~~ур-ния нет корней, либо они есть (x_1, x_2) , но~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при этом $\frac{x_1+x_2}{2}$ не попадает на отрезок $[\frac{1}{4}; 1]$.

$$D \quad (76 + 5a - 4b)^2 - 4(-76 + 5b)(-4a) =$$

$$= 76^2 + 25a^2 + 16b^2 + 760a - 728b - 40ab - 256a + 80ab =$$

$$= 256 + 25a^2 + 16b^2 - 96a - 728b + 40ab \geq 0$$

Значит, $f(x)$ не принимает отрицательных значений на отрезке $[\frac{1}{4}; 1]$.

$\frac{1}{4}$ и 1 . $f(x) = 4ax^2 + (76 + 5a - 4b)x - 76 + 5b$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -4a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + (76 + 5a - 4b) \cdot \frac{1}{4} - 76 + 5b =$$

$$= -\frac{a}{4} + 4 + \frac{5}{4}a - b - 76 + 5b = 4 + \frac{5}{4}a - b - 72; \quad \frac{a}{4} + b \geq 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{a}{4} + b\right) - 72 \geq 76 - 12 = 64 \geq 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) \geq 0 \text{ и макс.}$$

$$f(1) = -4a + (76 + 5a - 4b) - 76 + 5b =$$

$$= a + b \geq 1 \Rightarrow f(1) \geq 0$$

Если есть корни уравнения, то минимум функции на отрезке $[0; 1]$ достигается в одной из точек x_1 и x_2 . Тогда

$$\frac{a}{4} \leq \frac{76 - 5a + 4b}{2} \leq 1; \quad 2 \leq -32 - 70a + 8b;$$

$$70a - 8b \leq -32 \leq 0; \quad -76 - 5a + 4b \leq 2; \quad 5a - 4b \geq -78.$$

Если же нет корней уравнения, то минимум функции достигается в одной из точек x_1 и x_2 .

Значит, $\frac{1}{4} \geq \frac{76 - 5a + 4b}{2}$ или

$$7 \leq \frac{-76 - 5a + 4b}{2}; \quad 2 \geq -32 - 70a + 8b; \quad 5a - 4b \geq -\frac{33}{2};$$

$$5a - 4b \geq -76,5. \text{ Имеем } 2 \leq -76 - 5a + 4b;$$

$$5a - 4b \leq -78.$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten solution for a trigonometric problem. It includes several equations, a geometric diagram of a sphere with points A, B, C, D, E, F, and extensive calculations. The diagram shows a sphere with a vertical axis and a horizontal diameter AB. Points C, D, E, F are marked on the sphere's surface. Lines connect A, B, C, D, E, F, forming various geometric shapes. The handwritten notes around the diagram include trigonometric identities and numerical values.

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha$$

$$\sin(x) + \sin(y)$$

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin(2\beta) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha) \cdot \cos(2\beta) + \sin(2\beta) \cdot \cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \cos(2\alpha) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$-2 \sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) = -2$$

$$\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sin(2\alpha + \varphi) = \dots$$

$$\sin(2\alpha + \varphi) = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\sin(2\alpha) = 0; -\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos(2\alpha) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(x) = \sin(y) \Rightarrow x = y; x = \pi - y$$

$$\frac{\sin(2+\beta)}{\cos(2+\beta)} = \frac{\sin 2 \cdot \cos \beta}{\cos 2 \cdot \cos \beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta} = 1 + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta} = 1 + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta} = 1 + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

(3) $\frac{1}{\cos \alpha}$

$$2xy - 22y - x + 6 \geq 0$$

$$x^2 - 24xy + 74y^2 = 2xy - 22y - x + 6$$

$$x^2 - 26xy$$

$$x^2 - 26xy + 74y^2 + 22y + x - 6 = 0$$

$$x^2 - 36y^2 - 72x - 36y + 45 = 0$$

$$a = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$a = \frac{23b \pm \sqrt{5b}}{2}$$

$$b^2 - 9b^2 = (77b)^2 - 4 \cdot 36b^2 = 253b^2$$

$$a^2 - 73ab + 36b^2 = 0$$

$$73b - 5b = \frac{68b}{2}$$

$$9b + 9b = 18b$$

$$a^2 + 9b^2 = x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 45 + 45 = 90$$

$$a^2 + 9b^2 = 90$$

$$a - 6b = \sqrt{9b^2 - 4ac}$$

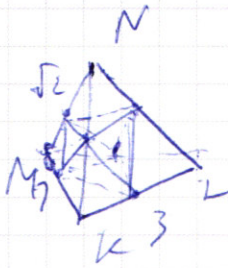
$$a^2 - 73ab + 36b^2 = 0$$

$$-73ab + 27b^2 = 0$$

$$b = 0 \Rightarrow a = \dots$$

$$27b^2 - 73ab + 90 = 0$$

$\log_3 3 = 1$
 $\log_3 9 = 2$
 $\log_3 27 = 3$
 $\log_3 81 = 4$
 $\log_3 243 = 5$
 $\log_3 729 = 6$
 $\log_3 2187 = 7$
 $\log_3 6561 = 8$
 $\log_3 19683 = 9$
 $\log_3 59049 = 10$
 $\log_3 177147 = 11$
 $\log_3 531441 = 12$
 $\log_3 1594323 = 13$
 $\log_3 4782969 = 14$
 $\log_3 14348907 = 15$
 $\log_3 43046721 = 16$
 $\log_3 129140163 = 17$
 $\log_3 387420489 = 18$
 $\log_3 1162261467 = 19$
 $\log_3 3486784401 = 20$
 $\log_3 10460353203 = 21$
 $\log_3 31381059609 = 22$
 $\log_3 94143178827 = 23$
 $\log_3 282429536481 = 24$
 $\log_3 847288609443 = 25$
 $\log_3 2541865828329 = 26$
 $\log_3 7625597484987 = 27$
 $\log_3 22876792454961 = 28$
 $\log_3 68630377364883 = 29$
 $\log_3 205891132094649 = 30$
 $\log_3 617673396283947 = 31$
 $\log_3 1853020188851841 = 32$
 $\log_3 5559060566555523 = 33$
 $\log_3 16677181699666569 = 34$
 $\log_3 50031545099000007 = 35$
 $\log_3 150094635297000021 = 36$
 $\log_3 450283905891000063 = 37$
 $\log_3 1350851717673000189 = 38$
 $\log_3 4052555153019000567 = 39$
 $\log_3 12157665459057001701 = 40$
 $\log_3 36472996377171005103 = 41$
 $\log_3 109418989131513015309 = 42$
 $\log_3 328256967394539045927 = 43$
 $\log_3 984770902183617137781 = 44$
 $\log_3 2954312706550851413343 = 45$
 $\log_3 8862938119652554230029 = 46$
 $\log_3 26588814358957662690087 = 47$
 $\log_3 79766443076872988070261 = 48$
 $\log_3 239299329230618964210783 = 49$
 $\log_3 717897987691856892632349 = 50$
 $\log_3 2153693963075570677897027 = 51$
 $\log_3 6461081889226712033691081 = 52$
 $\log_3 1938324566768013609107303 = 53$
 $\log_3 5814973700304040827321909 = 54$
 $\log_3 17444921100912122481965727 = 55$
 $\log_3 52334763302736367445897281 = 56$
 $\log_3 157004289908209092337691843 = 57$
 $\log_3 471012869724627276913075529 = 58$
 $\log_3 1413038609173881830739226567 = 59$
 $\log_3 4239115827521645492197679701 = 60$
 $\log_3 12717347482564936476593039703 = 61$
 $\log_3 38152042447694809429779119407 = 62$
 $\log_3 114456127343084428289337358221 = 63$
 $\log_3 343368382029253284868012074663 = 64$
 $\log_3 1030105146087759854604036223989 = 65$
 $\log_3 3090315438263279563812108671967 = 66$
 $\log_3 9270946314789838691436325915901 = 67$
 $\log_3 27812838944369516074308977747703 = 68$
 $\log_3 83438516833108548222926933243107 = 69$
 $\log_3 250315550499325644668780799729321 = 70$
 $\log_3 750946651497976933906342399187963 = 71$
 $\log_3 2252839954493930801718027197563889 = 72$
 $\log_3 6758519863481792405154081592691667 = 73$
 $\log_3 20275559590445377215462244778075001 = 74$
 $\log_3 60826678771336131646386734334225003 = 75$
 $\log_3 182480036314008394939159203002675009 = 76$
 $\log_3 547440108942025184817477609008025027 = 77$
 $\log_3 1642320326826075554452432827024075081 = 78$
 $\log_3 4926960980478226663357298481072225043 = 79$
 $\log_3 147808829414346799800718954432166750127 = 80$
 $\log_3 443426488243040399402156863295000181 = 81$
 $\log_3 1330279464729121198206470589885000543 = 82$
 $\log_3 4000838394187363594619411769655001627 = 83$
 $\log_3 12002515182562090783858235308965004881 = 84$
 $\log_3 36007545547686272351574705926895014643 = 85$
 $\log_3 108022636643058827054724117780685043927 = 86$
 $\log_3 324067909929176481164172353342055041781 = 87$
 $\log_3 972203729787529443492517059026165045243 = 88$
 $\log_3 2916611189362588328477551177078495135727 = 89$
 $\log_3 8749833568087764985432653531235485407181 = 90$
 $\log_3 26249490704263294956297960593706455201643 = 91$
 $\log_3 78748472112789884868893881781113365204927 = 92$
 $\log_3 236245416338369654606681645343340080614781 = 93$
 $\log_3 70873624891510896381904493603002024204427 = 94$
 $\log_3 212620874674532689145713480809006072613281 = 95$
 $\log_3 63786262402359806743714044242701821787881 = 96$
 $\log_3 191358787207079420231142132728105465363643 = 97$
 $\log_3 574076361621238260693426398184316396080927 = 98$
 $\log_3 1722229084863714782080279194552948188242781 = 99$
 $\log_3 516668725459114434624083758365884476470843 = 100$



$$3 - 4 \cdot 20 + 60 = 38$$

774 33-го уровня

$$x + y = z$$

$$x + y + z = 34$$

$$246 - 96a - 728b = 0$$

$$246 - 96a - 728b = 0$$

$$246 - 96a - 728b = 0$$

$$(7a + 7b) = 246$$

$$5 \in 7-9$$

$$7 \in 4-8$$

$$1-9 \in 2-6$$

$$3-9 \in 4-8$$

$$83 + 8a$$

$$0,29 \cdot 73$$

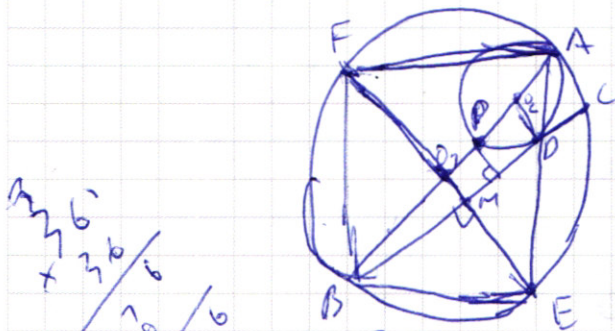
$$766 \cdot 73$$

$$96a - 728b = 246$$

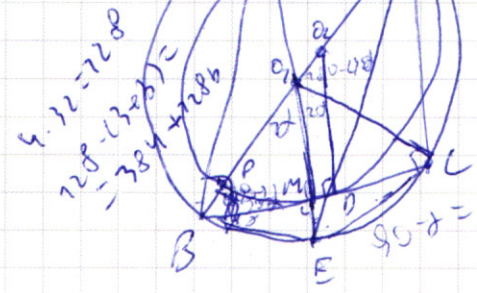
$$96a - 728b = 246$$

$$96a - 728b = 246$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 7296 \\ + 36 \\ \hline 7296 \\ + 27 \\ \hline 7296 \end{array}$$

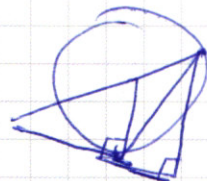


$$\begin{array}{r} 7296 \\ - 36 \\ \hline 7296 \\ - 27 \\ \hline 7296 \end{array}$$

$n_1, n_2 - ?$
 $\angle AFE - ?$

$CD = \frac{75}{2}, BD = \frac{72}{2} \Rightarrow BC = 76$

$n_1 = 7,5$
 $\frac{n_1}{n_2} = \frac{76}{75}$



$(2n_1 - 2n_2) \cdot 2n_1 = (8,5)^2$

$(n_1 - n_2) \cdot n_1 = \left(\frac{8,5}{2}\right)^2$

$(n_1 - n_2) \cdot n_2 = \left(\frac{8,5}{2}\right)^2 = \frac{79}{4}$

$n_1 = n_2 \cdot \frac{76}{75}$

$n_2 \cdot \left(\frac{76}{75} - n_2\right) \cdot \frac{76}{75} = \frac{79}{4}$

$n_2 = \frac{75}{76}$

$n_1 = 79$

$4ax^2 - 5ax + 76x - 53$

$(ax + 3)(4x - 5)$

$4 + \frac{4}{(4x-5)(76x-76)} \leq ax + b$ на промежутке $[7/4; 2]$
 $4x - 5 \neq 0, \text{ т.к. } x \geq 7/4$
 $4x - 5 \leq 0, \text{ т.к. } x \leq 2$

$\frac{76x - 76 - 4ax^2 + 5ax - 4bx + 5b}{4x - 5} \geq 0;$

$-76x - 76 - 4ax^2 + 5ax - 4bx + 5b \geq 0$ при всех $x \in [7/4; 2]$
 $-4ax^2 + (76 + 5a - 4b)x - 76 + 5b \geq 0.$