МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta$

$-\frac{2}{5} = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos(2\beta) \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin(2\beta) =$

$= \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac45} = \pm\frac{2}{\sqrt5}.$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\cos(2\beta) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) =$

$= \sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2\alpha+2\beta = 2\pi n + 2\beta - \frac{\pi}{2};$

$2\pi n + \pi - \left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right), n\in\mathbb{Z};\ 2\alpha = 2\pi n - 2\pi n + \frac{\pi}{2} - 4\beta;$

$\alpha = \pi n + \frac{\pi}{4} - 2\beta$, где $\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5};$

$\sin(2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}.$

1) ~~$\alpha = \pi n - \frac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow$~~

$\Rightarrow tg(\alpha) =$ ~~$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$~~

~~2) $\alpha = \pi n + \frac{\pi}{4} - 2\beta, \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}, \sin(2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$~~

~~a) $\sin(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$. $\sin(\alpha) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{4} - 2\beta\right) =$~~

~~$= \pm\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\beta\right)$ в зависимости от чётности n.~~

~~$\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos(2\beta) - \sin(2\beta)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$~~

~~$= \frac{1}{\sqrt2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}\right) = \frac{1}{\sqrt2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}.\ \sin(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$~~

~~$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \pm\frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{\pm\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = \pm\frac{1}{3}.$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

~~б) $\sin(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$. Как и ранее, $\sin(\frac{\pi}{4} - 2\beta) =$~~
~~$= \sin(\frac{\pi}{4})\cdot\cos(2\beta) - \sin(2\beta)\cos(\frac{\pi}{4}) =$~~
~~$= \frac{1}{\sqrt2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5} - (\frac{2}{\sqrt5})\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}\cdot \ldots$~~
~~$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1-(\frac{3}{\sqrt{10}})^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$, $tg(\alpha) = \pm 3$.~~

~~Теперь проверим все ли варианты подходят.~~
~~$tg(\alpha) = -1$; $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; 2β - такой угол, что ... $\frac{}{\sqrt5}$;~~
~~$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}$. Тогда $\sin(2\alpha + 2\beta) =$~~
~~$=$~~

г) $\alpha = \pi n + \frac{\pi}{4} - 2\beta$, $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow tg(\alpha) = tg(\pi n + \frac{\pi}{4} - 2\beta) =$

$$= tg(\frac{\pi}{4} - 2\beta) = \frac{tg(\frac{\pi}{4}) - tg(2\beta)}{1 + tg(\frac{\pi}{4})\cdot tg(2\beta)} = \frac{1 - tg(2\beta)}{1 + tg(2\beta)}.$$

a) $\sin(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow tg(2\beta) = \frac{\frac{1}{\sqrt5}}{\frac{2}{\sqrt5}} = \frac{1}{2}$.

$$tg(\alpha) = \frac{1 - \frac12}{1 + \frac12} = \frac{\frac12}{\frac32} = \frac13.$$

б) $\sin(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow tg(2\beta) = \frac{\frac{1}{\sqrt5}}{-\frac{2}{\sqrt5}} = -\frac12$.

$$tg(\alpha) = \frac{1+\frac12}{1-\frac12} = \frac{\frac32}{\frac12} = 3.$$

Тогда $tg(\alpha) = -1; \frac13; 3$. Т.к. есть всего не менее трёх значений, то эти три должны подходить.

Ответ: $tg(\alpha) = -1; \frac13; 3$.

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} = \sqrt{(2y-1)(x-6)}, & (2y-1)(x-6) \geq 0 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$a = x - 6$; $b = 2y - 1 \Rightarrow x - 12y = a - 6b$;

$a^2 + b^2 = x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9$ ...

Тогда получаем в итоге другую систему:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab}, \quad ab\geq 0 \\ a^2+9b^2-36-9=45 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} ab\geq 0 \\ a^2-12ab+36b^2=ab; \quad a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$a^2-13ab+36b^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-4b)(a-9b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right.$ $\Rightarrow ab=4b^2; 9b^2\geq 0$ в любом случае.

1) $a=4b \Rightarrow (4b)^2+9b^2=90;$

$(16+9)b^2=90; \ b^2=\frac{90}{25}; \ b=\pm\frac{\sqrt{90}}{5}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$b=\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow 2y-1=\frac{3\sqrt{10}}{5}; \ y=\frac{3\sqrt{10}+5}{10}; \ a=4b=\frac{12\sqrt{10}}{5};$

$x-6=\frac{12\sqrt{10}}{5}; \ x=\frac{12\sqrt{10}+30}{5}.$

$b=\frac{-3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow 2y-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5}; \ y=\frac{-3\sqrt{10}+5}{10}; \ a=4b=-\frac{12\sqrt{10}}{5};$

$x-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5}; \ x=\frac{-12\sqrt{10}+30}{5}$

2) $a=9b \Rightarrow (9b)^2+9b^2=90; \ 90b^2=90; \ b^2=1; \ b=\pm 1.$

$b=1 \Rightarrow 2y-1=1; \ y=1; \ a=9b=9; \ x-6=9; \ x=15.$

$b=-1 \Rightarrow 2y-1=-1; \ y=0; \ a=9b=-9; \ x-6=-9; \ x=-3.$

~~Ответ~~ Тогда у уравнения точки решения:

$\left(\frac{12\sqrt{10}+30}{5}; \frac{3\sqrt{10}+5}{10}\right); \left(\frac{-12\sqrt{10}+30}{5}; \frac{-3\sqrt{10}+5}{10}\right); (15; 1); (-3; 0).$

Ответ: $\left(\frac{12\sqrt{10}+30}{5}; \frac{3\sqrt{10}+5}{10}\right); \left(\frac{-12\sqrt{10}+30}{5}; \frac{-3\sqrt{10}+5}{10}\right);$

$(15; 1); (-3; 0)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

N3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$ $\Rightarrow$ $10x - x^2 > 0$, т.к. взят от этого числа логарифм.

$a = 10x - x^2$, тогда что.

$a + |-a|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(a)}$

$a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(a)}$

Пусть $a = 3^t$ или же $t = \log_3 a$.

$3^t + 3^{t \cdot \log_3 4} \geq 5^t$; $3^t + 4^t \geq 5^t$. Заметим, что левая часть растёт медленнее правой, т.е. Если при некотором t_1 $3^{t_1} + 4^{t_1} = 5^{t_1}$, то при $\forall t < t_1$: $3^t + 4^t > 5^t$; а при $\forall t > t_1$ $3^t + 4^t < 5^t$, т.к. при $\forall \Delta > 0$ $3^{t_1+\Delta} + 4^{t_1+\Delta} <$
$< 4^{\Delta} \cdot (3^{t_1} + 4^{t_1}) = 4^{\Delta} \cdot 5^{t_1} < 5^{\Delta} \cdot 5^{t_1} = 5^{t_1+\Delta}$,

$3^{t_1-\Delta} + 4^{t_1-\Delta} > 4^{-\Delta} \cdot (3^{t_1} + 4^{t_1}) = 4^{-\Delta} \cdot (5^{t_1}) >$
$> 5^{-\Delta} \cdot 5^{t_1} = 5^{t_1-\Delta}$. Т.к. при $t = 2$
$3^t + 4^t = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 \Rightarrow t_1 = 2$;

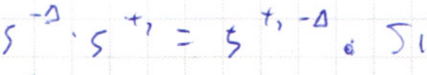
$t \leq 2 \Rightarrow \log_3 a \leq 2 \Rightarrow a \leq 9$; $10x - x^2 \leq 9$.

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$; $(x-9)(x-1) \geq 0$. $f(x) = (x-9)(x-1)$; $f(x) \geq 0$

н.ф.
1; 9

(старший коэффициент больше 0.)

$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$.



$\Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

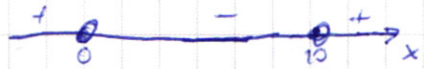
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Также, $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 10x < 0$;

$x(x-10) < 0$; $g(x) = x\cdot(x-10)$, $g(x) < 0$

н.ф. Старший коэффициент больше 0

0; 10



$\Rightarrow x \in (0; 10)$.

Тогда в итоге $x \in (0; 7] \cup [8; 10)$.

Ответ: $x \in (0; 7] \cup [8; 10)$.

№5

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(\frac{a}{b}) + f(b) = f(a)$;

$f(a/b) = f(a) - f(b)$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$, x и y ~~числа~~ целые числа от 2 до 25, тогда можно найти все $f(a)$ для $a \in \mathbb{Z}$, $a \in [2; 25]$, после чего посчитать неупорядоченные пары ~~[illegible]~~ чисел, у которых не равны значения функции, т.к. $f(x/y) = f(x) - f(y) = -(f(y) - f(x)) = -f(y/x)$, $f(x/y) < 0 \Leftrightarrow f(y/x) > 0$; т.е. для каждой пары чисел a и b, если $f(a) \neq f(b)$, то ровно $f(a/b)$ или $f(b/a)$ ровно одно меньше 0.

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$, $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$, $f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$;

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$; $f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$; $f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$;

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$; $f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$; $f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$, ...

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

были взяты простые числа.

Тогда $F(4)=F(2)+F(2)=0$; $F(6)=F(2)+F(3)=0$; $F(8)=F(4)+F(2)=0$; $F(9)=F(3)+F(3)=0$; $F(10)=F(2)+F(5)=1$; $F(12)=F(3)+F(4)=0$; $F(14)=F(2)+F(7)=1$; $F(15)=F(3)+F(5)=1$; $F(16)=F(4)+F(4)=0$; $F(18)=F(2)+F(9)=0$; $F(20)=F(4)+F(5)=1$; $F(21)=F(3)+F(7)=1$; $F(22)=F(2)+F(11)=2$; $F(24)=F(2)+F(12)=0$; $F(25)=F(5)+F(5)=2$.

Тогда $F(a)$ для целых a от 2 до 25 принимает значения 0; 0; 0; 1; 0; 1; 0; 0; 1; 2; 0; 3; 1; 1; 0; 4; 0; 4; 1; 1; 2; 5; 0; 2; ~~иначе~~ (по порядку), или ~~же~~ 10 раз 0, 7 раз 1; 3 раза 2; 1 раз 3; 2 раза 4; 1 раз 5. Тогда неупорядоченных пар различных чисел равно

$17 = \frac{17\cdot 16}{16}$; $\frac{16-1}{16}$; $\frac{17\cdot 16}{16}$; $\frac{16}{15}$; 17 и $16 - \frac{2}{16}$

$$\frac{10\cdot 14+7\cdot 17+3\cdot 21+1\cdot 23+2\cdot 22+1\cdot 23}{2}=(140+119+63+23+44+23)/2=$$

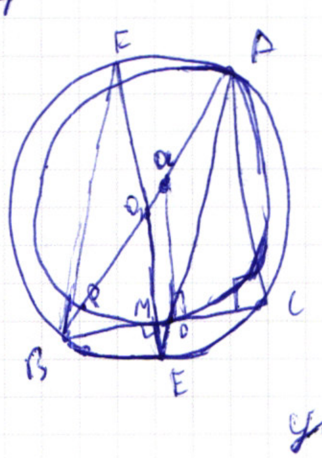
$$=(203+119+90)/2=(322+90)/2=161+45=206.$$

$\frac{16^2-1}{16}$; $16-\frac{1}{16}$ и 17

~~Ответ~~ Тогда всего 206 подходящих пар.

Ответ: 206 пар чисел $(x;y)$ подходят, чтобы $x,y\in\mathbb{N}$; $x,y\in[2;25]$ и $F(x/y)=0$.

N4



По лемме Архимеда E является серединой дуги BC (без A) в окружности Ω.

Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей Ω и ω соответственно, r_1 и r_2 — их радиусы. Т.к. Ω и ω касаются в точке A, ~~...~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда они лежат на одной прямой. O_1, A и B - лежат на одной прямой, т.к. O_1 - ~~ц~~ центр Ω, а AB - диаметр, а тогда O_1 - середина AB).

Т.к. E - середина дуги BC, то FE (поскольку $FE \perp BC$) является серединным перпендикуляром к BC, тогда FE проходит через O_1 и M - середину BC. Пусть P - ~~точка~~ точка пересечения AB и ω, отличная от A.

Заметим, что $O_2 D \perp BC$, т.к. это касательная и радиус ω, $AC \perp BC$, т.к. $\angle ABC$ — вписанный в Ω и опирается на диаметр. Тогда по теореме Фалеса $O_1 A : O_2 A = MC : DC$, т.к. $O_1 M \perp BC \perp O_2 D$; $BC \perp AC \Rightarrow O_1 M \parallel O_2 D \parallel AC$.

$MC = BC : 2 = (BD + DC) : 2 = (\frac{15}{2} + \frac{17}{2}) : 2 = 8$.

Тогда $O_1 A : O_2 A = MC : DC = 8 : (\frac{15}{2}) = 16 : 15$.

$O_1 A = r_1$, $O_2 A = r_2$, как радиусы Ω и ω. Тогда $r_1 = \frac{15}{16} r_2$. Теперь посчитаем степень точки B относительно ω: Она равна квадрату касательной, а также разности квадратов расстояния до центра и радиуса ω, т.е. Она равна BD^2, а также $BO_2^2 - r_2^2$

$BD^2 = (BO_2)^2 - (r_2)^2 = \cancel{\ldots} \overset{(AB-AO_2)^2 - r_2^2 =}{} (2r_1 - r_2)^2 - r_2^2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$BO = \frac{15}{2} \Rightarrow \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \cancel{(2r_1-r_2)^2 - r_2^2} = \cancel{(2r_1-2r_2)(2r_1)} =$

$= 4r_1(r_1 - r_2)$. $r_1 = \frac{16}{15} r_2 \Rightarrow \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 4\cdot\frac{16}{15} r_2 \cdot$

$\cdot\left(\frac{16}{15} r_2 - r_2\right) = \frac{4\cdot 16}{15^2}\cdot r_2^2 \Rightarrow \cancel{\frac{64}{15^2}}\cdot r_2^2 = \frac{15^2\cdot 17^2}{16^2}$,

$r_2 = \frac{15\cdot 17}{16}$. Тогда $r_1 = \frac{15\cdot 17}{16}\cdot\frac{16}{15} = 17$.

$BC = 16$. $BO_1 = r_1 = 17$. $BM = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BO_1M = \arcsin\left(\frac{BM}{BO_1}\right)$, т.к.

$\sin(\angle BO_1M) = BM : O_1B$, т.к. ΔBO_1M – прямоугольный (прямым углом M.

Тогда $\angle BO_1M = \arcsin\left(\frac{8}{17}\right)$.

$\angle FO_1A = \angle BO_1M$, как вертикальные;

$FO_1 = O_1A = r_1 \Rightarrow \angle O_1FA = 90° - \frac{\angle FO_1A}{2} =$

$= 90° - \frac{\arcsin\left(\frac{8}{17}\right)}{2}$, как угол при основании FA равнобедренного ΔO_1FA.

$S_{\Delta AEF} = S_{\Delta AO_1F} + S_{\Delta AO_1E} = 2S_{\Delta AO_1F}$, т.к. FO_1 и O_1E принадлежат одной прямой, $FO_1 = O_1E = r_1$; A – общая вершина (расстояния от A до FO_1 и O_1E одинаковы, стороны FO_1 и O_1E равны), тогда

$S_{\Delta AO_1F} = \frac{1}{2}\cdot O_1F\cdot O_1A\cdot\sin\angle FO_1A =$

$= \frac{1}{2}\cdot 17\cdot 17\cdot\frac{8}{17} = 4\cdot 17$. $S_{\Delta AFE} = 2\cdot 4\cdot 17 =$

$= 112$.

Ответ: радиусы равны 17 и $\frac{15\cdot 17}{16} = \frac{16^2-1}{16} =$

$= 16 - \frac{1}{16} = 15\frac{15}{16}$ для Ω и ω соответственно;

$\angle AFE = 90° - \frac{\arcsin\left(\frac{8}{17}\right)}{2}$; $S_{\Delta AEF} = 112$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ при $\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$.

$4x-5<0$, т.к. $x < \frac{5}{4}$, т.к. $x \le 1 < \frac{5}{4}$.

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \Leftrightarrow \frac{16x-16-(4x-5)(ax+b)}{4x-5} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x-16-4ax^2+5ax-4bx+5b \ge 0$, т.к. $4x-5<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4ax^2+(16+5a-4b)x-16+5b \ge 0$.

$ax+b \le -32x^2+36x-3 \Leftrightarrow -32x^2+(36-a)x-3-b \ge 0$.

$-32<0 \Rightarrow$ Это верно тогда и только тогда, когда

$\frac{1}{4}$ и 1 находятся между меньшим и большим корнем ур-ния $-32x^2+(36-a)x-3-b=0$, что равносильно тому, что в этих точках ($\frac{1}{4}$ и 1) значение не меньше 0. Т.е.

$0 \le -32\cdot(\frac{1}{4})^2+(36-a)\cdot\frac{1}{4}-3-b = -2+9-\frac{a}{4}-3-b = 4-\frac{a}{4}-b$;

$\frac{a}{4}+b \ge 4$; $0 \le -32+36-a-3-b \Rightarrow a+b \le 1$.

Вернёмся к первому неравенству.

$-4ax^2 + (1b+5a-4b)x - 1b + 5b \geq 0$, ~~это все доп~~

~~1) $a = 0 \Rightarrow (1b-4b)x - 1b + 5b \geq 0 \Rightarrow x$ ограничен~~
~~ровно с одной стороны, тогда достаточно~~
~~мало того, чтобы в точках $\frac{1}{4}$ и 1 было~~
~~не меньше нуля, тогда весь отрезок будет под-~~
~~ходить. $(1b-4b)\cdot\frac{1}{4} - 1b + 5b \geq 0$; $4 - b - 16 + 5b \geq 0$;~~
~~$12 \leq 4b$, $b \geq 3$. $(1b-4b) - 1b + 5b \geq 0$, $b \geq 0$,~~
~~тогда достаточно того, чтобы $b \geq 0$.~~
~~противоречие, т.к. $a - 3 < 0$. Тогда $a \geq a$~~

~~1) $a > 0 \Rightarrow$ достаточным и необходимым является~~
~~условие того, что в точках $\frac{1}{4}$ и 1 выполня-~~
~~лось неравенство, т.к. этот случай аналогичен~~
~~второму неравенству ($a > 0 \Rightarrow -4a < 0$, старший~~
~~коэффициент меньше 0, точки должны быть~~
~~между корнями). Тогда: $-4a\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (1b+5a-4b)\cdot\frac{1}{4} -$~~
~~$- 1b + 5b \geq 0$, $-\frac{a}{4} + 4 - b + \frac{5}{4}a - 16 + 5b \geq 0$; $a + 4b \geq 12$;~~
~~$\frac{a}{4} + b \geq 3$, что верно, т.к. $\frac{a}{4} + b \geq 4$. Также,~~
~~$-4a\cdot(1) + (1b+5a-4b) - 1b + 5b \geq 0$, $-4a + 1b + 5a - 4b -$~~
~~$- 1b + 5b \geq 0$; $a + b \geq 0$, что верно, т.к. $a + b \geq 1$.~~

1) $a \geq 0 \Rightarrow$ $a/4 + b \leq a + b$; ~~нас~~ ~~$a \geq 0$~~, $a + b \leq 1$, ~~противо-~~
~~речие~~ $4 \leq a + b \leq 1$, противоречие.

2) $a < 0$. Тогда ~~неравенство~~ Кроме того,
чтобы в точках $\frac{1}{4}$ и 1 было ~~больше~~ не меньше 0,
~~между~~ требуется, чтобы на отрезке от $\frac{1}{4}$ до 1 не
было корней ур-ния $-4ax^2 + (1b+5a-4b)x - 1b + 5b = 0$.
Это равносильно также тому, что либо у
ур-ния нет корней, либо они есть (x_1 и x_2), но

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при этом $\frac{x_1+x_2}{2}$ не попадает на отрезок $[\frac{7}{4}; 7]$.

$D = (7b+5a-4b)^2 - 4(-7b+5b)\cdot(-4a) =$

$= 256 + 25a^2 + 16b^2 - 96a - 128b + 40ab \geq 0$

Проверим угл. точки $\frac{7}{4}$ и 7. $F(x) = -4ax^2 + (7b+5a-4b)x - 7b + 5b$.

$F(\frac{7}{4}) = -4a\cdot(\frac{7}{4})^2 + (7b+5a-4b)\cdot\frac{7}{4} - 7b + 5b =$

$= -\frac{a}{4} + 4 + \frac{5}{4}a - b - 7b + 5b = a + 4b - 12;\ \frac{a}{4} + b \geq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(\frac{a}{4}+b) - 12 \geq 16 - 12 = 4 \geq 0 \Rightarrow F(\frac{7}{4}) \geq 0$ и так

$F(7) = -4a + (7b + 5a - 4b) - 7b + 5b =$

$= a + b \geq 7 \Rightarrow F(7) \geq 0.$

Если есть корни ур-ия, что их сумма по теореме Виета равна $-7b - 5a + 4b$, тогда

$\cancel{\frac{7}{4} \leq \frac{-7b-5a+4b}{2} \leq 7;\ 7 \geq -32 - 10a + 8b;}$

$\cancel{10a - 8b + 33 \leq 0,}\ -7b - 5a + 4b \leq 2;\ 5a - 4b \geq -18.$

Если их нет, то $\frac{7}{4} \geq \frac{-7b-5a+4b}{2}$ или

$7 \leq \frac{-7b-5a+4b}{2};\ 7 \geq -32 - 10a + 8b;\ 5a - 4b \geq -\frac{33}{2},$

$5a - 4b \geq -16,5.$ Или же $2 \leq -7b - 5a + 4b;$

$5a - 4b \leq -18.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{90}{7} + \frac{92+6}{2} + 0 + 1 + 0 = 49 + 27 + 3 + 7 = 70.$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(x)+\sin(y) = 2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$? или что? Не помню.

$\sin(4\alpha+4\beta) =$

$\sin(x)+\sin(y)$

$\sin(x)+\sin(-y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin(x)-\sin(y)$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{2}{5} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\sin(2\alpha)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \cos(2\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-2\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) = -1$

$\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sin(2\alpha+\varphi)$, $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos(\varphi) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\sin(2\alpha+\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = 2\pi n + \pi - 2\varphi$

$\sin(2\pi n + \pi - 2\varphi) = \sin(\pi - 2\varphi) = \sin(2\varphi) =$

$= 2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha) = 0, -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \cos(2\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\alpha+\pi) = -\sin(2\pi-\alpha) = -\sin(\alpha)$?

$\sin(x) = \sin(y) \Rightarrow x = y$, $x = \pi - y$

$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \ldots}{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \ldots}$

$\cos(2\alpha) = 0$, $\cos 2\beta$

$f(x)+f(y)$, $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$+4(\alpha+\beta)$

$768\cdot(-76+54)$

$+3046$

2508

$\frac{1}{2}$, $\frac{76}{2}$, $\frac{8}{3.5}$, $\frac{32}{2} = 16$, $\frac{15}{2} = 7.5$, $\frac{75}{2}$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$tg(\alpha \cdot tg$

$\frac{\sin\alpha \cdot \sin}{\cos}$

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + ..}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha)\cdot tg(\beta)}$$

$2xy - 12y - x + 6 \geq 0$

$(2y-1)(x-6)$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$2y-1,\ x-6.$

$x^2 - 26xy$

$x^2 - 26xy + 144y^2 + 1244x - 6 = 0$

$x^2 - 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0$

a, b

$a = x - 6 \qquad ab \geq 0;$

$b = 2y - 1.$

$a - 6b = \sqrt{ab}$

$a^2 = x^2 - 12x + 36$

$b^2 = 4y^2 - 4y + 1$

$a^2 + 9b^2 = x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 =$

$= 45 + 45 = 90$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$a = \frac{13b \pm 5b}{2}$

$(13b)^2 - 4\cdot 36b^2$

$a^2 + 9b^2 \quad (169 - 144)b^2 = 25b^2$

$(13-12)\cdot 25$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$13b - 5b = \frac{8b}{2}$

$9b \text{ и } 9b \qquad 13b$

$(2y-1)(x-6)$

$x = 6 \Rightarrow$

$6 - 12y = 0$

$y = \frac{1}{2}$

$36 + 9 - 72 \cdot 6 - 36 \cdot \frac{1}{2} = -45$

$a - 6b = \sqrt{ab}\ (\cdot),\ \begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \end{cases}$

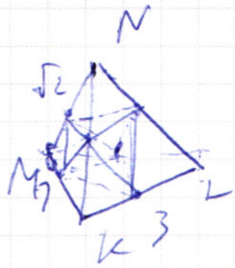
$a^2 + 9b^2 = 90; \quad a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$-13ab + 27b^2 = 90 \Rightarrow$

$b = 0 \Rightarrow a \qquad b \neq 0.$

$27b^2 - 13ab + 90 = 0$

$a^2 + 9b^2 = 90$



$256-96a-128b\geq0$

$\frac{a}{4}+b\leq4$

$16-6a-8b\geq0$

$8-3a-4b\geq0$

$(3a+4b)^2$

$96a+128b$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

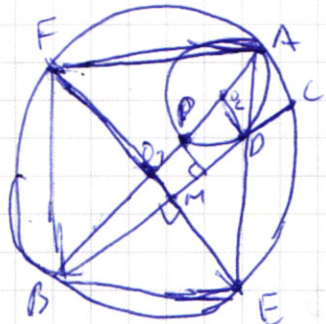
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



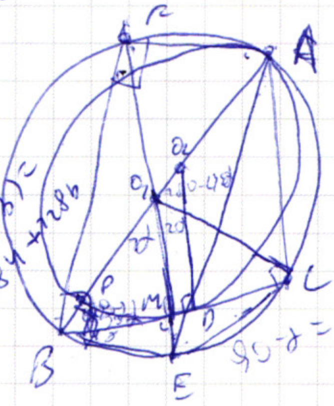
$r_1, r_2 - ?$

$\angle AFE - ?$

$CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2} \Rightarrow BC = 16$

$O_1 A$.

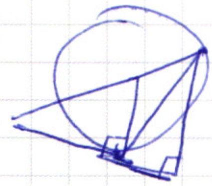
$36 \cdot 36 = 1296$



$4 \cdot 32 = 128$

$BC = 7{,}5$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{16}{15}$



$(2r_1 - 2r_2) \cdot 2r_1 = (8{,}5)^2$

$(r_1 - r_2) \cdot r_1 = \frac{(8{,}5)^2}{4}$

$(r_1 - r_2) \cdot r_1 = \frac{(8{,}5)^2}{4} = \frac{19^2}{16}$

$r_1 = r_2 \cdot \frac{16}{15}$

$r_2 \cdot (\frac{1}{15} \cdot r_2 \cdot \frac{16}{15} = \frac{}{16}$

$r_2 = \frac{15}{16}$

$r_1 = 19.$

C

$90 - \gamma$.

$\gamma - ?$

$BC = 16$.

1) радиус - есть.

$4ax^2 - 5ax + 4bx - 5b$

$(ax + b)(4x - 5)$

$4 + \frac{4}{(4x-5)(\ldots)} \frac{16x - 16}{4x - 5} \le ax + b$ на промежутке $[\frac{7}{4}; 7]$

$4x - 5 > 0$, т.к. $x + \frac{5}{4} > 7$.

$4x - 5 \le 0$; т.к. x

$$\frac{16x - 16 - 4ax^2 + 5ax - 4bx + 5b}{4x - 5} \ge 0;$$

$16x - 16 - 4ax^2 + 5ax - 4bx + 5b \ge 0$ при всех $x \in [\frac{7}{4}; 7]$

$-4a\,x^2 + (16 + 5a - 4b)x - 16 + 5b \ge 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)