

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 27$, $3 \leq y \leq 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ . Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) - \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha + 4\beta) &= \sin((4\alpha + 4\beta) - 2\alpha) = \sin(4\alpha + 4\beta) \cos 2\alpha - \\ &- \sin 2\alpha \cos(4\alpha + 4\beta) \end{aligned}$$

$$\sin(4\alpha + 4\beta) = 2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \cos(2\alpha + 2\beta)$$

$$\cos(4\alpha + 4\beta) = 1 - 2\sin^2(2\alpha + 2\beta)$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\text{I} \quad \cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(4\alpha + 4\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}$$

$$\cos(4\alpha + 4\beta) = 1 - \frac{2}{17} = \frac{15}{17}$$

$$-\frac{8}{17} \cdot \cos 2\alpha - \frac{15}{17} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \quad | \cdot 17$$

$$-8 \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha = -8 \quad | :2$$

$$-4 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -4$$

$$-1 \leq \cos 2\alpha \leq 1 \quad -1 \leq \sin 2\alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow -4 \cos 2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 0 + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = 0 + \pi k$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \text{ или неопр.}$$

$$\text{II} \quad \cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(4\alpha + 4\beta) = \frac{8}{17}$$

$$\cos(4\alpha + 4\beta) = \frac{15}{17}$$

$$\frac{8}{17} \cos 2\alpha - \frac{15}{17} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{8}{17}$$

$$4 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -4 \quad | :4$$

$$\cos 2\alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha = -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha = -1$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha = -1$$

sin.

N2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3(x^2 - 2x + 1) - 3 + \frac{3y^2 - 12y + 4}{3} - \frac{4}{3} = 4 \end{cases}$$

$$a = \cancel{x-1} 3y - 2 \quad ab \geq 0 \\ b = x - 1$$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ 3b^2 - 3 + \frac{a^2}{3} - \frac{4}{3} = 4 \quad | \cdot 3 \end{cases} \begin{cases} (a-2b)^2 = ab \\ 9b^2 + a^2 = 12 + 9 + 4 \end{cases} \begin{cases} a^2 - sab + 4b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 - 9b^2 - sab + 4b^2 = 0 \quad | : 5 \\ a^2 = 25 - 9b^2 \end{cases} \begin{cases} 5 - b^2 - ab = 0 \\ a^2 = 25 - 9b^2 \end{cases} \quad a = \frac{5-b^2}{b} \\ \frac{(5-b)^2 + 9b^4}{b^2} = 25$$

$$52b^2 - 10b^4 + b^4 + 9b^4 = 25b^2$$

$$10b^4 - 35b^2 + 25 = 0$$

$$2b^4 - 7b^2 + 5 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 0 & -7 & 0 & 5 \\ \hline 1 & 2 & -5 & -5 & 0 \end{array}$$

$$(b-1)(2b^3 + 2b^2 - 5b - 5) = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 2 & -5 & -5 \\ \hline -1 & 2 & 0 & -5 & 0 \end{array}$$

$$(b-1)(b+1)(2b^2-5) = 0$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ b = -1 \\ b^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ b = -1 \\ b = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ b = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \quad \text{н.н.}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = 4 \\ b = -1 \\ a = -4 \\ b = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ a = \frac{3.5}{\sqrt{2.5}} \\ b = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ a = -\sqrt{2.5} \end{cases} \quad \text{н.н.}$$

$$\begin{cases} 3y - 2 = 4 \\ x - 1 = 1 \\ 5x - 1 = -1 \\ 3y - 2 = -4 \\ x - 1 = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ 3y - 2 = \sqrt{2.5} \\ x - 1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 3y - 2 = -\sqrt{2.5} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

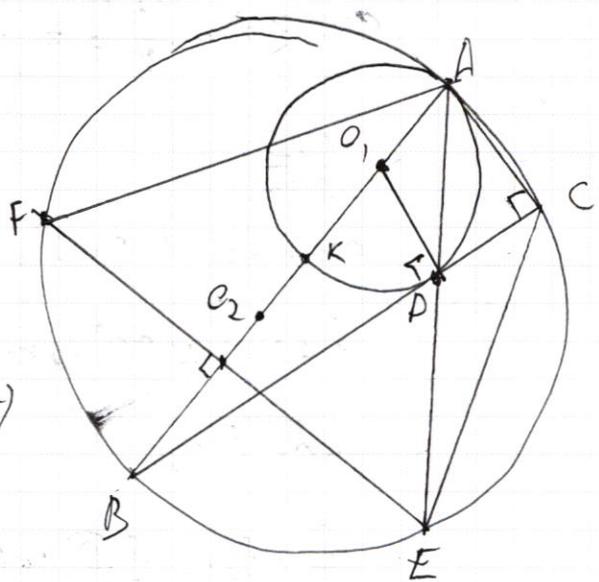
$$\begin{cases} x = \sqrt{35} + 1 \\ y = \frac{\sqrt{35} + 2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{35} + 1 \\ y = \frac{\sqrt{35} + 2}{3} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2); (0; -\frac{2}{3}); (\sqrt{35} + 1; \frac{\sqrt{35} + 2}{3});$
 $(-\sqrt{35} + 1; \frac{\sqrt{35} + 2}{3})$

№ 4
 $CD = 2,5$
 $BD = 6,5$
 $\omega(O_1, r)$
 $\Omega(O_2, R)$
 $R, r = ?$

$CD \cdot BD = AD \cdot DE$
 $BC^2 - BD^2 = BK \cdot AB$
 $AB = 2R$
 $BK = 2R - 2r$
 (не зависит от радиуса k)
 $\angle ACB = 90^\circ$ (опущ. же диаметр)
 $\angle O_1DB = 90^\circ$ (BD-кас.)
 $\Rightarrow O_1D \perp BC \quad AC \perp BC$
 $\Rightarrow O_1D \parallel AC \Rightarrow$ по γ Фалеса $\frac{BD}{DC} = \frac{BO_1}{O_1A}$
 $BO_1 = 2R - r \quad O_1A = r$



$$\frac{13}{5} = \frac{2R - r}{r} \quad 13r = 10R - 5r$$

$$10R = 18r \quad r = \frac{10}{18}R = \frac{5}{9}R$$

$$BD^2 = 2R \cdot 2(R - r) \quad BD^2 = 4R^2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9}R^2$$

$$\frac{169}{4} = \frac{16}{9} R^2 \quad R = \frac{13 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{39}{8}$$

$$r = \frac{39}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{195}{72}$$

$$AC = \sqrt{4R^2 - BC^2} \quad \text{но т. Пуп}$$

$$AC = \sqrt{\frac{4 \cdot 39^2}{64} - 81} = \frac{\sqrt{(2 \cdot 39 - 98)(2 \cdot 39 + 98)}}{8} = \frac{\sqrt{6 \cdot 150}}{8} =$$

$$= \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

$$AD = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{325}}{4} = \frac{5}{4} \sqrt{13}$$

$$\angle BAE = \angle BFE \quad (\text{сопоставляя})$$

$$\angle AFB = 90^\circ \quad \text{центр на дуге}$$

$$\Rightarrow \angle AFE = 90 - \angle BAE$$

$$\text{но т. кос.} \quad BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD$$

$$\frac{169}{4} = \frac{4 \cdot 39^2}{64} + \frac{25 \cdot 13}{16} - 2 \cdot \frac{39}{8} \cdot \frac{5}{4} \sqrt{13} \cos \angle BAD$$

$$\cos 2\alpha = \frac{AD}{BO} = \frac{\frac{78}{8} - \frac{195}{22}}{\frac{195}{72}} = \frac{\frac{195}{22}}{\frac{78 \cdot 9 - 195}{72}} = \frac{195}{78 \cdot 9 - 195} = \frac{195}{507}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha + 1}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{312}{2014} + 1}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{136}{2014}}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{13}$$

$$\angle AFE = 90^\circ - \arccos \frac{\sqrt{52}}{13}$$

$$\angle AEF = \mu \text{ (} \angle AFE = \angle AEF \text{)} \quad \angle AEB = 90^\circ \quad (\text{на дуге})$$

$$\frac{13 \cdot 8}{2 \cdot 2} = \frac{8\sqrt{13}}{4} \cdot DE \quad DE = \sqrt{13}$$

$$AE = \frac{9}{4} \sqrt{13}$$

$$S_{AEF} = \frac{\sin \angle AEF \cdot AE^2 \cdot 2 \cos \angle AEF}{2} = \frac{81 \cdot 13 \cdot \sin(90 - \arccos \frac{\sqrt{52}}{13}) \cos(90 - \arccos \frac{\sqrt{52}}{13})}{2}$$

$$\text{ответ: } \frac{730}{8}; \frac{195}{72}; 90 - \arccos \frac{\sqrt{52}}{13}; \frac{81 \cdot 13}{16} \cdot \sin(90 - \arccos \frac{\sqrt{52}}{13}) \cos(90 - \arccos \frac{\sqrt{52}}{13})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$y = 2 + \frac{1}{2(x-1)} \quad \text{гипербола}$$

$$y = 8x^2 - 34x + 30 \quad \text{парабола}$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{34}{16}$$

$$y_0 = 8 \cdot \frac{34^2}{16^2} - \frac{34^2}{16} + 30 = \frac{-289 + 240}{8} = -\frac{49}{8}$$

$$8x^2 - 34x + 30 = 0$$

$$4x^2 - 17x + 15 = 0$$

$$D = 289 - 240 = 49$$

$$x_1 = \frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$$

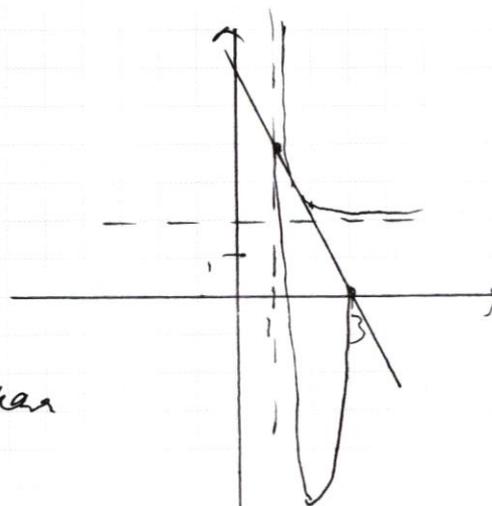
$$x_2 = \frac{17+7}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$y(1) = 8 - 34 + 30 = 4$$

$y = ax+b$ выше параболы
и ниже гиперболы

$\Rightarrow y = -2x + 6$ - как самая низкая
из возможных прямых

Г как ось абсцисс



однако она может касаться гиперболы

$$-2x+6 = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$-2x+4 = \frac{1}{2(x-1)}$$

$$-4x+8 = \frac{1}{x-1}$$

$$-4(x-2) = \frac{1}{x-1}$$

$$x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$(x-2)(x-1) = -\frac{1}{4}$$

$$D = 9 - 4 \cdot \frac{9}{4} = 0$$

$$x = \frac{3}{2} = 1,5$$

~~$\epsilon \frac{1}{(x-1)} = -4 \Rightarrow$ таких x нет~~

\Rightarrow у $y = ax+b$ и гипербола одна x кас.

значит если увеличивать a или b то
число точек касания станет больше

$\Rightarrow a = -2; b = 6$ это единственные корни

Ответ: $-2; 6$

16

$$ax+b \leq 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \quad a) \quad 4b-2 = \frac{1}{2(x-1)}$$

$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$y = 8x^2 - 34x + 30$$

$$y = 4x^2 - 17x + 15$$

$$8x^2 - 34x + 30$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 289 \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot 17^2 - 34 \cdot 17}{8} + 30$$

$$D = 289 - 16 \cdot 15 = 49$$

$$x = \frac{17 \pm 7}{8 \pm 4} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \quad \frac{16}{8} = 2$$

$$x = \frac{17 \pm 7}{8 \pm 4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \quad \frac{16}{8} = 2$$

$$\frac{289}{8} - \frac{289 \cdot 2}{8} + 30$$

$$-\frac{289}{8} + 30 = \frac{-289 + 240}{8} = -\frac{49}{8}$$

$$y_1 = 8 - 34 + 30 = 4$$

$$y_2 = 32 - 102 + 30 = -40$$

$$2 + \frac{1}{2(x-1)} = 4$$

$$\frac{1}{2(x-1)} = 2$$

$$1 = 4(x-1)$$

$$x-1 = \frac{1}{4} \quad x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2x} = x \quad 1 = 2x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

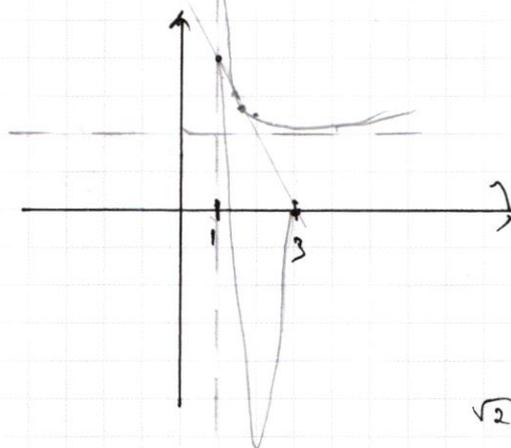
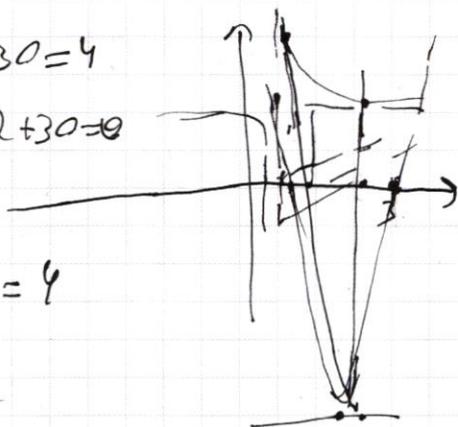
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = 2 + \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{4-5}$$

$$y = kx + b \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2-5}$$

$$y = -2x + b \quad \sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) + b = -\sqrt{2} + 4$$



$$\sqrt{2} = 1,3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 507 \overline{) 1169} \\ - 3 \\ \hline 20 \\ - 18 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 7 \\ \hline 546 \\ + 546 \\ \hline 546 \end{array}$$

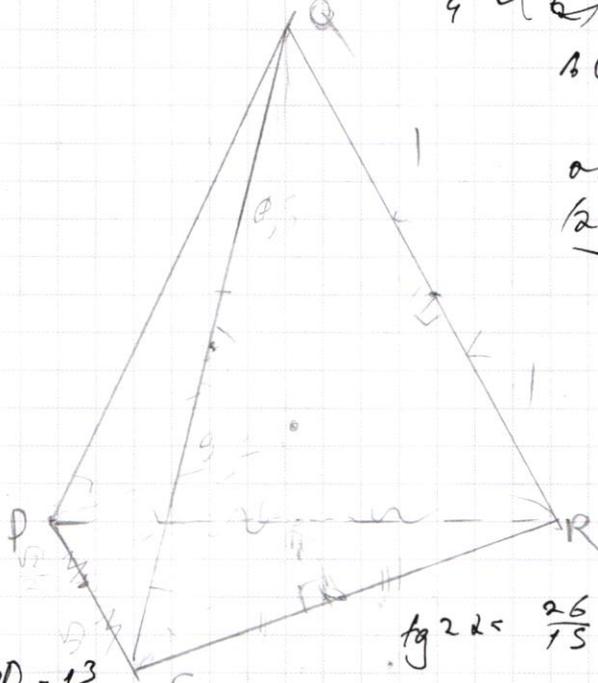
$$\frac{169}{4} = \left(\frac{13}{2}\right)^2 +$$

$$BC = \frac{27^2}{4} - 81$$

$$a^2 = 81 \cdot 4$$

$$\frac{(27 - 3 \cdot 2 \cdot 18)(27 + 18)}{4}$$

$$\frac{9 \cdot 45}{4} = \sqrt{\frac{405}{4}}$$



$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{13}{\frac{2}{\frac{15}{4}}}$$

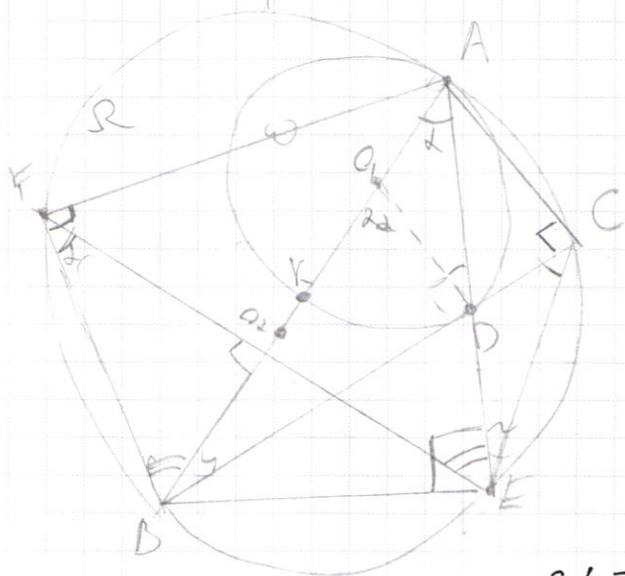
$$\frac{BD}{DC} = \frac{2R+r}{r}$$

$$\frac{13}{5} = \frac{2R-r}{r} \quad r = \frac{5}{9}R$$

$$13r = 10R - 5r \quad r = \frac{10}{18}R$$

$$18r = 10R \quad R = 1.8r$$

2 смуг.
k го с₂
k после с₂



$$CD = 3.5$$

$$BD = \frac{13}{2}$$

$$CD \cdot BD = AD \cdot DE$$

$$BC = 9 \quad BK = 2(R-r)$$

$$BC^2 = BK \cdot AB$$

$$AB = 2R$$

$$BK = R + R - 2r = 2R - 2r$$

$$81 = R \cdot 2R \quad R^2 = 81$$

$$R = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$81 = 2(R-r) \cdot 2R$$

$$81 = \frac{1}{2} \cdot 2R^2 \cdot 2 \left(\frac{4}{9}R^2 \cdot 2\right)$$

$$81 = \frac{16}{9}R^2 \quad \frac{81 \cdot 9}{16} = R^2 = \frac{27}{4} = R$$

$$R = \frac{27}{4}$$

$$r = \frac{5 \cdot 10}{18} \cdot \frac{27}{4} = \frac{15}{4}$$

r2

$$3y-2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$$

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$x \cdot (3y-2) - (3y-2)$$

$$3x(x-2) + 3y(3y-2) = 4$$

$$9y^2 - 12yx + 4x^2 = (x-1)(3y-2)$$

$$\begin{aligned} 3y-2 &= a \\ x-1 &= b \end{aligned}$$

$$3(x^2-2x+1)-3$$

$$3(x-1)^2 + 3y^2 - 4y = 7$$

$$a-2b$$

$$y(3y-2) - 2y$$

$$3y-2-2x+2 = ab$$

$$a-2b = \sqrt{ab}$$

$$a = b(a+2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{9y^2 - 12xy + 4}{3} \\ & 3y^2 - 4y + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$3b^2 + \frac{a^2}{3} = 7 + \frac{4}{3} \quad \cdot \frac{1}{3}$$

$$a^2 + 9b^2 = 25$$

$$3b^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{25}{3} \quad | \cdot 3$$

$$a-2b = \sqrt{ab}$$

$$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$$

$$9b^2 + a^2 = 25$$

$$a-2b = \sqrt{ab}$$

$$(a-2b)^2 = ab$$

$$\frac{9a^2}{(a+2)^2} + a^2 = 25$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$$

$$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$$

$$a^2 = 25 - 9b^2$$

$$25 - 9b^2 + 4b^2 = 5ab$$

$$9b^2 + \frac{(5-b^2)^2}{b^2} = 25$$

$$25 - 5b^2 = 5ab$$

$$5 - b^2 = ab$$

$$9b^4 + 25 - 10b^2 + b^4 = 25b^2$$

$$a = \frac{5-b^2}{b}$$

$$10b^4 - 35b^2 + 25 = 0$$

$$\frac{\sqrt{5}^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$2b^4 - 7b^2 + 5 = 0$$

$$b = 1; -1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{8} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 \leq x, y \leq 27$$

№3

$$x^2 + 6x = 1$$

$$3^{\log_4 t} + t \geq |t| \log_4 5$$

$$\log_4 3 \cdot \log_4 t \geq \log_4 (t^{\log_4 5} + t)$$

№4

$$3^{\log x} = 3$$

$$\log 3 - \log x = \log 1$$

$$3^{\log x} + \log x = 10$$

$$\log_3 \log x + \log_3 1 = \log_3 10$$

$$2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2\sqrt{17}}$$

№5

$$\log_4 4^t$$

$$\log(3^{\log x} + 1) = \log 10 \quad x \geq 10^0$$

$$\log 3 \cdot \log x + \log 1 = \log 10$$

$$3^{\log x} = 10^2 - 1$$

$$2^{\log x} = 3^2 - 1$$

$$\log 2 \log x = \log(3^2 - 1)$$

№6

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \sin \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cos(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$-\cos 2\beta + 4 \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$2 \sin^2 \beta - 1 + 8 \sin \beta \cos \beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\alpha + 2\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{17}}$$

$$\cos 2\alpha + 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{\cos^2 2\alpha + 2\beta}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$8 \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha =$$

$$\sin 2\alpha + 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta)$$

$$8 \sin 2\alpha \cos 2\beta + 8 \sin 2\beta \cos 2\alpha -$$

$$8 \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha + 2\beta)$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = (8 - \cos 2\beta) \sin 2\beta \cos(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha$$

$$16 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \cos 2\beta + 2 \sin 2\beta$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha (1 - 2 \sin 2\beta) + 2 \sin 2\beta \cos 2\alpha$$

$$\frac{2 \operatorname{tg}(2\alpha + \beta)}{1 + \operatorname{tg}^2(2\alpha + \beta)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2} \operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = -1 - \operatorname{tg}^2(2\alpha + \beta)$$

$$\sin 2\alpha (2 \cos 2\beta) +$$

$$\sin 2\alpha + 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha + 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 2\beta}{2}$$

$$2 \sin(\alpha + 2\beta) \cos \alpha + 2\beta$$

$$2 (\sin \alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos \alpha) (\cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta$$

$$\sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) + \sin(\alpha + 2\beta) \cos \alpha$$

$$\sin \alpha + 2\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha + 2\beta}$$

$$\sin(4a+4b-2\alpha) = \sin(4a+4b)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos(4a+4b)$$

$$\sin 4a+4b = 2\sin 2\alpha + 2\beta + \cos 2\alpha + 2\beta$$

$$-\frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 4a+4b = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{17} \cdot \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha$$

$$-\frac{8}{17}\cos 2\alpha + \frac{2}{17}\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$-8\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = -8$$

$$-4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -4$$

$$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -4$$

$$2\alpha = 0 \quad \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$3 \log_4 t + t \geq t \log_4 5$$

$$\sqrt{3} \log_2 t + t \geq \sqrt{t} \log_2 5$$

$$\Rightarrow \log_4 t \geq t \log_4 5 - t$$

$$\log_4 3 \cdot \log_4 t - \log_4 (t \log_4 5 - t) \geq 0$$

$$y' = \log_4 3$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

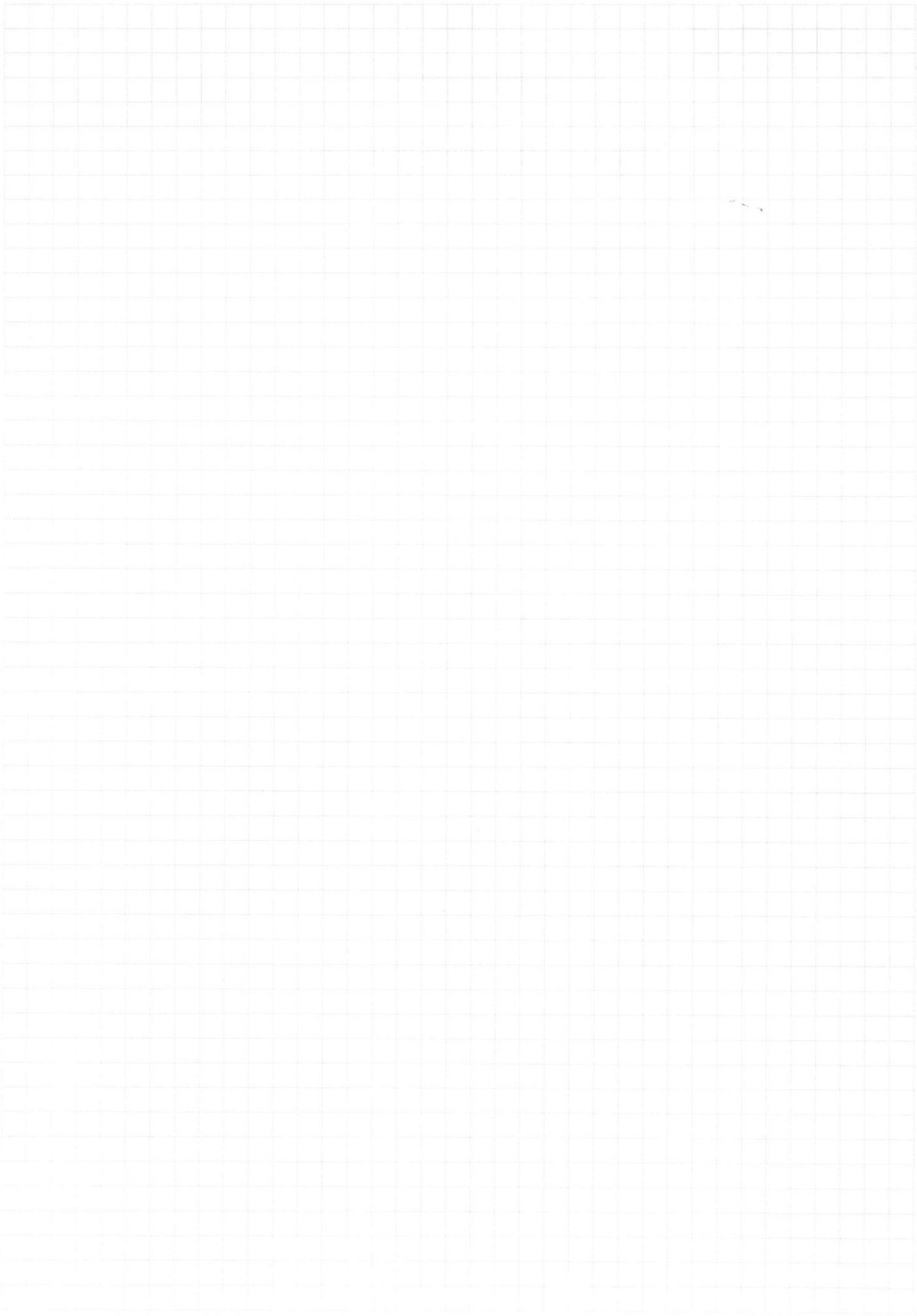
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)