МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{2}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \dfrac{-\frac{2}{17}}{2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)} \quad (2) \end{cases}$

Рассм. (2): $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$. Пользуясь $\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1$ получаем, что $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

а.) $\cancel{\sin 2\beta} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Рассм. (1): $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big| \cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$. Добавляя условие $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ получаем систему

$\begin{cases} (\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha)^2 = (-1)^2 \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \end{cases}$. Заметим, что $\cancel{\sin^2 2\alpha} + \cos^2 2\alpha = \cancel{\sin^2 2\alpha} + 16\cos^2 2\alpha \pm 8\sin 2\alpha\cos 2\alpha \iff$

$\iff \cos 2\alpha(15\cos 2\alpha \pm 8\sin 2\alpha) = 0$.

1.) $\cos 2\alpha = 0 \iff \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \iff \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow tg^2\alpha = 1 \Rightarrow$ ($\cos\alpha \neq 0$, т.к. по усл. $tg\alpha$ определён) $\Rightarrow tg\alpha = \pm 1$ – удовлетворяет уравнению, но $4\cdot 2 < 3$ – противоречие условию $\Rightarrow \cos 2\alpha \neq 0 \Rightarrow$

2.) $\cos 2\alpha \neq 0 \Rightarrow 15\cos 2\alpha = \mp 8\sin 2\alpha$ ~~$\Rightarrow tg 2\alpha = -\frac{15}{8}$~~

а.) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow 15\cos 2\alpha = -8\sin 2\alpha \Rightarrow tg 2\alpha = -\frac{15}{8}$, По формуле $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ получаем

$-\frac{15}{8} + \frac{15}{8}tg^2\alpha = 2tg\alpha \iff tg^2\alpha - \frac{16}{15}tg\alpha - 1 = 0$, $D = \frac{256}{225} + 4 = \frac{1156}{225} = \left(\frac{34}{15}\right)^2$

$tg\alpha = \dfrac{\frac{16}{15} \pm \frac{34}{15}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{5}{3} \\ tg\alpha = -\frac{3}{5} \end{array}\right.$. Аналогично рассмотрим случай б.) $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$ получаем, что

$tg 2\alpha = \frac{15}{8}$, $tg^2\alpha + \frac{16}{15}tg\alpha - 1 = 0$, $tg\alpha = \dfrac{-\frac{16}{15} \pm \frac{34}{15}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{5}{3} \\ tg\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$, т.е. $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \pm\frac{5}{3} \\ tg\alpha = \pm\frac{3}{5} \end{array}\right. \Rightarrow$

удовлетворяют ($4>3$). Ответ: $\pm\frac{5}{3}$, $\pm\frac{3}{5}$.

2.) $(*)\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

Заметим, что $\sqrt{xy-6x-y+6}=\sqrt{(x-1)(y-6)}$; $9x^2+y^2-18x-12y=45 \Leftrightarrow$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90 \Leftrightarrow 9(x-1)^2+(y-6)^2=90$; $y-6x=(y-6)-6(x-1)$

Пусть $a=x-1$, $b=y-6$, тогда $(*)$: $\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \ (1) \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$. Учитывая $ab\geq 0$ получаем

$\begin{cases} b^2+36a^2=13ab \\ b^2+9a^2=90 \ (2) \end{cases} \Rightarrow 27a^2+90=13ab \Rightarrow 81(3a^2+10)^2=169a^2(90-9a^2) \Leftrightarrow$

$[b^2=90-9a^2, \text{ т.к. } (2)]$

$(t=a^2, t\geq 0)$

$\Leftrightarrow 81t^2+540t+900=1690t-169t^2 \Leftrightarrow 250t^2-1150t+900=0 \Leftrightarrow$

$5t^2-23t+18=0$, $D=23^2-4\cdot5\cdot18=529-360=169$, $t=\frac{23\pm13}{2\cdot5} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{36}{10} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\pm1 \\ a=\pm\frac{6}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$. Выражая b из (2) и учитывая $ab\geq0$ получаем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} (1') \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-9 \end{cases} (2') \\ \begin{cases} a=\frac{6}{\sqrt{10}} \\ b=\frac{24}{\sqrt{10}} \end{cases} (3') \\ \begin{cases} a=-\frac{6}{\sqrt{10}} \\ b=-\frac{24}{\sqrt{10}} \end{cases} (4') \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ y=15 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=1+\frac{6}{\sqrt{10}} \left(=1+\frac{3\sqrt{10}}{5}\right) \\ y=6+\frac{24}{\sqrt{10}} \left(=6+\frac{12\sqrt{10}}{5}\right) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Однако из $(1) \Rightarrow b-6a\geq0 \Leftrightarrow b\geq6a$

Проверка: $(1')$: $9\geq6$ ✓

$(2')$: $-9\geq-6$ ✗

$(3')$: $\frac{24}{\sqrt{10}}\geq\frac{36}{\sqrt{10}}$ ✗

$(4')$: $\frac{-24}{\sqrt{10}}\geq\frac{-36}{\sqrt{10}}$ ✓

~~Ответ: $(2;15)$, $(0;-3)$, $\left(1+\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6+\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$, $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$.~~

Значит, осталось лишь проверить $(1')$ и $(4')$

$(1')$: $\begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15-6\cdot2=\sqrt{30-12-15+6} \\ 9\cdot4+225-36-12\cdot15=3\cdot15 \end{cases}$ ✓

$(4')$: $\begin{cases} a=\frac{-6}{\sqrt{10}} \\ b=\frac{-24}{\sqrt{10}} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1-\frac{6}{\sqrt{10}} \left(=1-\frac{3\sqrt{10}}{5}\right) \\ y=6-\frac{24}{\sqrt{10}} \left(=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right) \end{array} \Rightarrow$ ~~$6-\frac{24}{\sqrt{10}}-6+\frac{36}{\sqrt{10}}=\sqrt{}$~~

НО достаточно проверить систему $\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-24}{\sqrt{10}}+\frac{36}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{144}{10}} \\ \frac{9\cdot36}{10}+\frac{576}{10}=\frac{900}{10} \end{cases}$ ✓

Ответ: $(2;15)$, $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

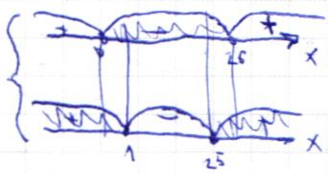
3.) $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$. ОДЗ: $26-x^2>0 \Rightarrow$ можно раскрыть модуль со знаком "–": $(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Пусть $t=26x-x^2$ $(t>0)$, тогда $t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$. Пусть теперь $t=5^l$, тогда

$12^l+5^l \geq 13^l$, заметим, что при $l=2$ достигается равенство $(144+25=169)$. Но слева у нас стоит сумма ~~показательных функций~~ степенных ф-й, а справа тоже степенная ф-я с основанием большим, чем основания двух степенных ф-й слева $\Rightarrow$ max 1 т. пересеч., но т.к. при $l=1$ $12+5 \geq 13$ – ✓,

то $l \leq 2$, т.е. $0<t \leq 5^2=25$, т.е. $0<\cancel{x^2-26}^{\,26x-x^2} \leq 25$. $\begin{cases} 26x-x^2>0 \\ 26x-x^2 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-26x<0 \\ x^2-26x+25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

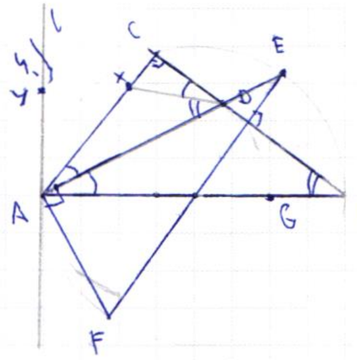
$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-26)<0 \\ (x-1)(x-25) \geq 0 \end{cases}$ т.е.



т.е. $x \in (0;1] \cup [25;26)$.

Ответ: ~~$x \in$~~ $(0;1] \cup [25;26)$.

4.)



Покажем, что AD — биссектр. $\angle CAB$. Пусть $AC \cap \omega = X$, пров. XD, пров l — общая кас. в т. A, $Y \in l$, так что Y и C в одной полуплоскости относ. AB. Т.к. l — общ. кас, то $\angle YAC = \angle ABC$ и $\angle YAX = \angle ADX$, т.к. CB — кас. к ω, то $\angle CDX = \angle XAD$, тогда $\Delta AXD \sim \Delta ADB$ по углу и соответствующему элементу ($\angle CXD = \angle XAD + \angle XDA = \angle XDA + \angle CDX = \angle CDA$) $\Rightarrow \angle XAD = \angle DAB$, т.е. AD — биссектр., тогда по её св-ву для ΔCAB получим $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{12}{13}$. Пусть $AC = 12x$, $AB = 13x$, тогда по т. Пиф в ΔCAB (прямоуг., т.к. AB — диам.): $144x^2 + (12+13)^2 = 169x^2 \Leftrightarrow 25x^2 = 25 \cdot 25 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ (при $x=-5$ $AC<0$), т.е. $AC = 60$, $AB = 65$, т.е. $R_{\Omega} = \frac{AB}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5$. Пусть AB повторно $\cap\ \omega = G$, тогда $BD^2 = BG \cdot AB$, т.е. $BG = \frac{13^2}{65} = \frac{169}{65}$, $AG = AB - BG = 65 - \frac{169}{65}$, $R_{\omega} = \frac{AG}{2}$ (AB — диам $\Rightarrow AB \perp l$, $G \in AB \Rightarrow AG \perp l \Rightarrow$ $\Rightarrow AG$ — диам) $= \frac{65^2 - 13^2}{65 \cdot 2} = \frac{52 \cdot 78}{65 \cdot 2} = \frac{156}{5} = 31{,}2$

Т.к. AD — биссектр. $\angle CAB$ и $E \in AD$, то E — сер. CB, но $EF \perp CB \Rightarrow EF$ — диам, т.е. ΔAFE — прямоуг ($\angle FAE = 90^\circ$) и $EF = AB = 65$. $\angle AFE = \frac{1}{2} \smile ACE = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile CE) = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile EB) =$
($\angle AFE < 90^\circ$, т.к. в ΔAFE $\angle FAE \geq 90^\circ (=90^\circ)$)
$= \angle CDA$, причём $\operatorname{tg}\angle CDA = \frac{AC}{CD} = \frac{60}{12} = 5 = \operatorname{tg}\angle AFE$, т.е. $\angle AFE = \operatorname{arctg} 5$, и $\sin\angle CDA =$ $= \frac{60}{12\sqrt{1+5^2}} = \frac{5}{\sqrt{26}} = \sin\angle AFE$, и $\cos\angle CDA = \frac{12}{12\sqrt{1+5^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \cos\angle AFE$, т.е. $S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE =$

$= \frac{1}{2} EF^2 \sin\angle AFE \cdot \cos\angle AFE = \frac{65^2 \cdot 5}{2 \cdot 26} = \frac{25 \cdot 65}{4} = \frac{1625}{4} = 406{,}25$

Ответ: $R_{\Omega} = 32{,}5$, $R_{\omega} = 31{,}2$, $\angle AFE = \operatorname{arctg} 5$, $S_{\Delta AEF} = 406{,}25$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.) Определим $f(x)$ $\forall x \in [1;28], x \in \mathbb{N}$ пользуясь тем, что $f(ab) = f(a)+f(b)$ и $f(p) = [p/4]$:

$f(1)=0$ (в $f(ab)=f(a)+f(b)$ положим $a=1$)

$f(2)=0$ (простое $\Rightarrow = [\frac{2}{4}]$)

$f(3)=0$ (простое $\Rightarrow = [\frac{3}{4}]$)

$f(4)=0$ ($f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$)

$f(5)=1$

$f(6)=0$ ($f(6)=f(2)+f(3)=0$)

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$ ($f(10)=f(5)+f(2)=1+0=1$)

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$ ($f(20)=$ ~~$f(2)\cdot f(2)$~~ $= f(4)+f(5)=0+1=1$)

$f(21)=1$

$f(\frac{1}{4})=0$

$f(\frac{1}{5})=-1$

$f(\frac{1}{6})=0$

$f(\frac{1}{7})=-1$

$f(\frac{1}{8})=0$

$f(\frac{1}{9})=0$

$f(\frac{1}{10})=-1$

$f(\frac{1}{11})=-2$

$f(\frac{1}{12})=0$

$f(\frac{1}{13})=-3$

$f(\frac{1}{14})=-1$

$f(\frac{1}{15})=-1$

$f(\frac{1}{16})=0$

$f(\frac{1}{17})=-4$

$f(\frac{1}{18})=0$

$f(\frac{1}{19})=-4$

$f(\frac{1}{20})=-1$

$f(\frac{1}{21})=-1$

$f(22)=2$	$f(\frac{1}{22})=-2$
$f(23)=5$	$f(\frac{1}{23})=-5$
$f(24)=0$	$f(\frac{1}{24})=0$
$f(25)=2$	$f(\frac{1}{25})=-2$
$f(26)=3$	$f(\frac{1}{26})=-3$
$f(27)=0$	$f(\frac{1}{27})=0$
$f(28)=1.$	$f(\frac{1}{28})=1.$

Заметим, что при $a:=x$, $b:=\frac{1}{x}$, где $x\in\mathbb{N}$ мы имеем $f(1)=0=f(x)+f(\frac{1}{x})$, т.е. $f(\frac{1}{x})=-f(x)$, поэтому справа от вертикальной черты функции $f(\frac{1}{x})$ $\forall x\in[4;28]$, $x\in\mathbb{N}$. ($\frac{1}{x}$ всегда $\in\mathbb{Q}_{>0}$, т.е. $\in D[f(x)]$, при $x\in\mathbb{N}$)

Чтобы $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$ (x,y по усл. $\in\mathbb{N}$ и $4\le y\le 28$, $4\le x\le 28$ — область M) <0, т.е. т.к. $\forall x,y$ из области M $f(\frac{x}{y})$ — сумма целых чисел, т.е. само целое, ≤ -1, нужно чтобы $f(\frac{1}{y})\le -1-f(x)$, т.е. т.к. $\forall x$ из M $f(x)\ge 0$, чтобы $f(\frac{1}{y})\le -1$. Запишем сколько раз $f(\frac{1}{y})$ (из области M) принимает значения $=-1,-2,-3,-4,-5$ (больше значений, кроме 0, она не принимает на M):

$f(\frac{1}{y})=$

-1 : 8 раз

-2 : 3 раза

-3 : 2 раза

-4 : 2 раза

-5 : 1 раз

Если $f(\frac{1}{y_0})=-5$ при каком-то y_0, то $f(y_0)=5$. Это значит, что ф-я $f(x)$ принимает те же по модулю, но отличные по знаку значения на M причем столько же раз. При $f(\frac{1}{y})=-5$, нам подойдут все x из M, такие, что $f(x)\le -1-(-5)=4$: их $25-1=24$ (25, т.к. это кол-во значений x из M, а 1 — т.к. $f(\frac{1}{y})=-5$ принимается 1 раз). Аналогично при $f(\frac{1}{y})=-4$ нам подходят все x из M такие, что $f(x)\le -1-(-4)=3$: их $25-1-2=22$, при $f(\frac{1}{y})=-3$ —//— $f(x)\le 2$: их $25-1-2-2=20$, при $f(\frac{1}{y})=-2$: $25-1-2-2-3=17$ и при $f(\frac{1}{y})=-1$: $25-1-2-2-3-8=9$. Искомое кол-во пар $(x;y)$: ~~24+22+20+17+9=92~~ $24\cdot 1+22\cdot 2+20\cdot 2+17\cdot 3+9\cdot 8=231$

Ответ: ~~92~~ 231.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(\frac{1}{n}) = -f(2n)$

$f(\frac{1}{n}) + f(n) = 0$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1 \quad -1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1 \quad -1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1 \quad -1$

$f(11) = 2 \quad -2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3 \quad -3$

$f(14) = 1 \quad -1$

$f(15) = 1 \quad -1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4 \quad -4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4 \quad -4$

$f(20) = 1 \quad -1$

$f(21) = 1 \quad -1$

$f(22) = 2 \quad -2$

$f(23) = 5 \quad -5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2 \quad -2$

$f(26) = 3 \quad -3$

$f(27) = 0$

$f(28) = 1 \quad -1$

$f(\frac{1}{4}) = -f(8) + f(\frac{8}{4}) = -0 + 0 = 0$

$f(\frac{1}{5}) = -f(10) + f(2) = -1 + 0 = -1$

$f(\frac{1}{6}) = -f(12) + f(2) = 0$

$f(\frac{1}{7}) = -1$

$f(\frac{1}{8}) = 0$

$f(\frac{1}{9}) = 0$

$f(\frac{1}{10}) = -1$

$f(\frac{1}{11}) = -2$

$f(\frac{1}{12}) = 0$

1 2 3 4 ... 25

4, 5, 6, 7 ... , 28

4, ..., 28

22

$\frac{22}{23}$ $\frac{4}{17}$

$\frac{4}{18}$

16: $-1 \quad -2 \quad -3 \quad -4 \quad -5$

$8 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1$

1.) −5: 24 92

2.) −4: 22 + 68

3.) −3: 20 48

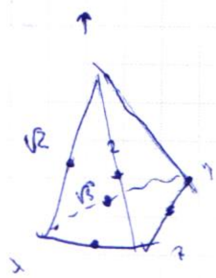
4.) −2: 14 26

5.) −1: 9

$f(x) + f(\frac{1}{y}) \le -1$

25 · 1

125 − 1 − (3 − 5 − 8 − (16



68

24 + 44 +

+ 40 + 51 +

72

123

163

68

231

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|t|^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5 t}$

$26x - x^2 > 0$

$t > 0$

$|-t|^{\log_5 12}$

$\log_a b = 2$

$a^2 = b$

$a^2 < 0$

$|-t|$

$|t|^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$f(1) = 0$

$f(3) = 0$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$t = 5^l$

$5^{\log_{13} 5 \cdot \log_5 1}$

$f(4) = 1$

$13^l = 5$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$l = \log_{13} 5$

$26x - x^2 \leq 25$

$x^2 - 26x \geq -25$

$\left(5^{\log_5 12}\right)$

$f(N) \geq 0$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$f(b) = f(1) + f(b)$

$0 < t \leq 25$

$f(\frac{10}{5}) =$

$(x-1)(x-25) \geq 0$

$12^l + 5^l \geq 13^l$

$x = 1$

$x = 25$

$0 < 26x - x^2 \leq 25$

$= f(10) + f(\frac{1}{5}) =$

$l \leq 2$

$26x - x^2 > 0$

$900 = 36 \cdot 9 + 24^2$

$f(2) = 0$

$x^2 - 26x < 0$

$576 + 324$

$f(10) = 0 + 1$

$x(x-26) < 0$

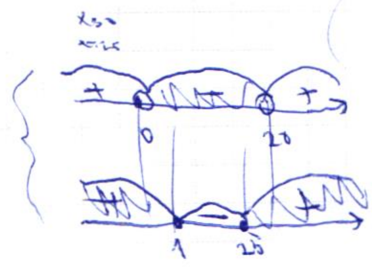
$f(\frac{2}{5}) = -1$

$x = 0$

$x = 26$

$x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

$f(\frac{2}{5})$



$\frac{b^2}{9} = 10 - \frac{36}{10}$

$\frac{8 \cdot 3}{\sqrt{10}}$

$b = \frac{64 \cdot 9}{10}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x-1 = -\sqrt{\frac{90}{17}} \\ y-6 = -4\sqrt{\frac{90}{17}} \end{cases}$

$\begin{cases} x-1 = \sqrt{\frac{90}{17}} \\ y-6 = 4\sqrt{\frac{90}{17}} \end{cases}$

$\begin{cases} x-1 = -\sqrt{\frac{45}{41}} \\ y-6 = -9\sqrt{\frac{45}{41}} \end{cases}$

$\begin{cases} x-1 = \sqrt{\frac{45}{41}} \\ y-6 = 9\sqrt{\frac{45}{41}} \end{cases}$

$2\alpha+2$

$\sin\alpha + \sin\beta$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$

$x+y=\alpha$

$x-y=\beta$

$x=\frac{\alpha-\beta}{2}$

$y=\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$y - 6a$

$b-6a \geq 0$

$b \geq 6a$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta - \cancel{\sin 2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \sin\alpha$

$\sin$

$tg^2\alpha = 1$

$tg\alpha = \pm 1$

$\cancel{\cos 2\beta = \frac{-\frac{2}{17}}{-\frac{1}{\sqrt{17}}} = \frac{2}{\sqrt{17}}}$

$\cos^2 2\beta = \frac{4}{17}$

$\sin^2 2\beta = \frac{13}{17}$

$\frac{2}{17} : \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{2}{17}\cdot\sqrt{17}$

1.) $\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha =$

$= \frac{2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{17}$

$\sin 2\alpha = -1 + \frac{32}{17} =$

$= \frac{15}{17}$

$\sin 2\alpha = -1 + \frac{32}{17}$

$\frac{-2\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$2\sin$

$\cos 2\alpha = \frac{-8}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$\cos 2\alpha = \frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$= \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$a \pm 4b = -1 \Rightarrow a^2 + 16b^2 \pm 8ab = a^2 + b^2$

$a^2+b^2 = 1$

$15b^2 = \mp 8ab$

$15b = \mp 8a$

$\cos 2\alpha = \frac{\pm 8}{17}$

$\frac{-2}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{-2}{\sqrt{17}^2}$

$tg 2\alpha = \mp\frac{15}{8}$

$\cos 2\alpha \neq 0$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \neq 0$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{24\sqrt{10}}{10}$

$\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$b = \frac{-8}{17}$

$\cos 2\alpha$

$1 +$

$\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$8a \pm 32b = -8$

$-15b + 32b = -8$

$15b = 8a$

$8a - 32b = -8$

$b = \frac{8}{17}$

$\cos\alpha =$

$\frac{6\sqrt{10}}{10}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$tg2\alpha = \pm\frac{15}{8}$

$tg\alpha - ?$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\frac{2tg\alpha}{1}$

$-16-34$

$16-34$

$\frac{-50}{30}$

$34-16$

$\frac{18}{30}$

$36\frac{1-x}{(3x-2)^2}$

$-18x+12+24=18$

$-36x+36$

$\frac{-6(3x-2)+3(8-6x)}{(3x-2)^2}$

$\frac{15}{8} - \frac{15}{8}tg^2\alpha = 2tg\alpha$

$\frac{15}{8}t^2 + 2t - \frac{15}{8} = 0$

$t^2 + \frac{16}{15}t - 1 = 0$

$t = \quad D = \frac{256}{225} + 4$

$t = \frac{-\frac{16}{15} \pm \frac{34}{15}}{2} =$

$\boxed{\begin{aligned} t &= -\frac{5}{3} \\ t &= \frac{3}{5} \end{aligned}}$

$-\frac{15}{8} + \frac{15}{8}tg^2\alpha = 2tg\alpha$

$\frac{15}{8}t^2 - 2t - \frac{15}{8} = 0$

$D = \frac{34}{}$

$t^2 - \frac{16}{5}t - 1 = 0$

$\frac{\frac{16}{15} \pm \frac{34}{15}}{2}$

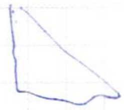
900 -

$\frac{1156}{225} = \left(\frac{34}{15}\right)^2$

250 + 39

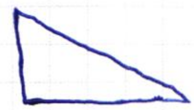
289

$14 \cdot 17$



$\frac{51}{36} \quad \frac{17}{12}$

$\left\{\begin{array}{l} \cancel{tg\alpha = \pm 1} \\ tg\alpha = \pm\frac{5}{3} \\ tg\alpha = \pm\frac{3}{5} \end{array}\right.$



$5^{t} + 12^{t} \geq 13^{t+x}$

$5^t \geq$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

x^4

$4x^4$

$-\frac{3}{5}$

$t = \frac{5}{3}$

$3 \cdot 3^t + 4 \cdot 4^t \quad 5 \cdot 5^t$

$25 \cdot 5^x + 144 \cdot 12^x \geq 169 \cdot 13^x$

$5^{t+x} - 5^t$

$5^t(5^x - 1)$

$x \to 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(100-1)^2$

$xy-6x-y+6$

$10000-200+1$

$x(y-6)-(y-6)$

$\frac{9801}{4}t^2$

$(x-1)(y-6)$

$a \quad b$

$2450-\frac{1}{4}t^2$

$a=x-1$

$b=y-6$

$\left(\frac{99}{2}\right)^2 t^2$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$\left(\frac{99}{2}t-90\right)^2=\left(\frac{65}{2}t\right)^2$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$$\begin{cases} \frac{99}{2}t-90=\frac{65}{2}t \\ \frac{99}{2}t-90=-\frac{65}{2}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17t=90 \\ 82t=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=\frac{90}{17} \\ t=\frac{45}{41} \end{cases}$$

$(5\cdot18)^2$

90^2

8100

$1394t^2-90\cdot99t+90^2=0$

$6x-6 \quad y-6$

$90+170$

$25\cdot49$, $25\cdot50$, $1250-25$, $1225+169=1394$

$y-6x$

$2450-1394=1056$

$1056\cdot4=4224$

$1056-\frac{1}{4}$

$\frac{4225}{4}$

$65\cdot65=4225$

$ab\geq0$

$169-54=115$

$\frac{65}{2}$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\pm\sqrt{\frac{90}{17}} \quad (1) \\ a=\pm\sqrt{\frac{90}{82}} \end{cases}$$

$b^2\leq90$

$$\begin{cases} b^2+36a^2=13ab \\ b^2+a^2=90 \end{cases}$$

(1): $$\begin{cases} b=\pm4\sqrt{\frac{90}{17}} \\ b=\pm9\sqrt{\frac{90}{82}} \end{cases}$$

$\frac{16\cdot90}{17}+\frac{90}{17}=90$

b^2

$35a^2=13ab-90$

$35a^2-13ba+90=0$

$\frac{b^2}{90}+\frac{1}{82}=1$

$\frac{b^2}{90}=\frac{81}{82}$

$b^2=\frac{81\cdot90}{82}$

$b=\pm9\sqrt{\frac{90}{82}}$

$169-70=99$

$14\cdot18=252$

$252(4t+18)^2$

$$\frac{13b\pm\sqrt{169b^2-90\cdot140}}{70}$$

$(35a^2+90)^2=169a^2(90-a^2)$

$b=\sqrt{90-a^2} \quad t=a^2$

$25(49t^2+252t+324)=169\cdot90t-169t^2$

$25\cdot18\cdot14$

$90\cdot70$

$23\cdot23=529$

$5\cdot36^2-230\cdot36+1800=0$

180

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

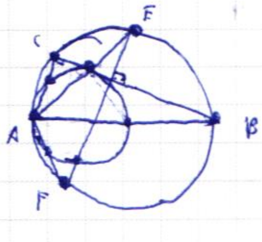
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

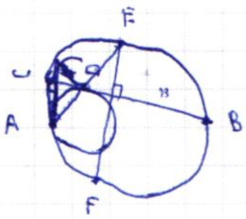
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

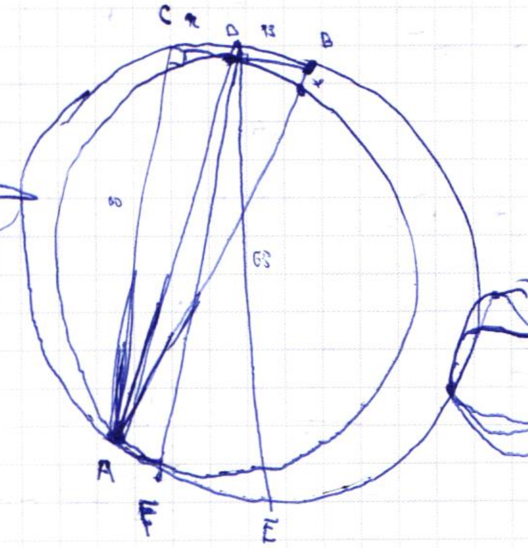
ШИФР

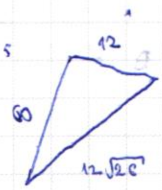
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА









$\sin\alpha = \frac{60}{12\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$tg\,\alpha = 5$

$\alpha = arctg\,5$

65

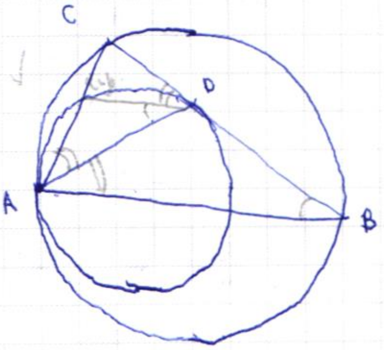
$\frac{1}{\sqrt{26}}$

$144x^2 + 625 = 169x^2$

$25x^2 = 625$

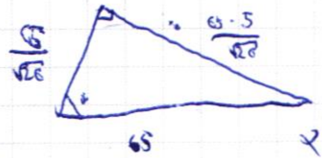
$x^2 = 25$

$x = 5$



$169 = x\,65$

$x = \frac{169}{65}$



$\times\begin{array}{r}65\\25\\\hline 325\\130\\\hline\end{array}$

$\frac{65\cdot5}{\sqrt{26}}$

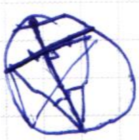
$65 - \frac{169}{65}$

$\frac{65^2 - 13^2}{65}$

$\frac{312}{5}$

$\frac{4\cdot78}{5}$

$\frac{\cancel{52}\cdot 78}{\cancel{65}}$

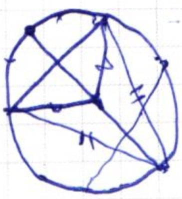


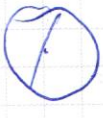
$\frac{65^2\cdot5}{2\cdot26}$

$1250 + 375$

$\begin{array}{r}1250\\+375\\\hline 1625\end{array}$

$\frac{65\cdot125}{4}$





$\sqrt{1625}$

$arctg\,5$

$\frac{312}{5}$

65

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)