

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Задача 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x| \log_{12} 13 - 18x;$$

ОДЗ: $x^2+18x > 0$

$$\begin{cases} x < -18 \\ x > 0 \end{cases}$$
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq 13^{\log_{12}|x^2+18x|} - 18x;$$

Замена $t = \log_{12}(x^2+18x)$;

$$5^t + 12^t \geq 13^t;$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^t + \left(\frac{12}{13}\right)^t \geq 1;$$

Слева монотонно убывающая функция, $t=2$ (корень),
значит неравенство выполняется при $t \leq 2$;

$$\log_{12}(x^2+18x) \leq 2 \log_{12} 12$$

$$x^2+18x \leq 144$$

$$-6 \leq x \leq 24 \quad \text{Ответ: с учетом ОДЗ } x \in (0; 24]$$

Задача 4

BD - касательная $\Rightarrow \angle DB = 90^\circ$

O_2K - перпендикуляр к хорде $CB \Rightarrow KC = CB$

$AB \perp d$ (диаметр) $\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$

$\triangle ACB \sim \triangle O_1DB$ и $\triangle O_2KD$ по двум углам

$$AB = 2R$$

$BO_1 = 2R$ - радиус описанной

$BO_2 = R$; Рассмотрим $\triangle ACB$ и $\triangle O_1DB$

$$\frac{AB}{O_1B} = \frac{CB}{DB}$$

$$\frac{2R}{2R-r} = \frac{r+14}{14}$$

$$34R = 50R - 25r$$

$$16R = 25r \quad \Rightarrow \quad R = \frac{25}{16} \cdot r$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1)

$$\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ x^2-4yx+4y^2 = xy-x-2y+2 \end{cases}$$

$$x^2+4y^2-5yx+x+2y-2=0$$

$$(x-4y+2)(x-y-1)=0$$

$$1) \begin{cases} x-4y+2=0 \\ x-y-1=0 \\ x-2y \geq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x=4y-2 \\ x=y+1 \\ x-2y \geq 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x=4y-2 \\ 4y-2-2y \geq 0 \\ x=y+1 \\ y+x-2y \geq 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x=4y-2 \\ y \geq 1 \\ x=y+1 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

Подставим решение в уравнение (2):

$$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y=12$$

$$25y^2-50y=0$$

$$25y(y-2)=0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases}$$

но по условию $y \geq 1 \Rightarrow$
 $\begin{cases} y=2 \\ x=8-2=6 \end{cases}$

Ответ: $(6; 2)$; $(2-\sqrt{2,5}; 1-\sqrt{2,5})$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4
по Т. Пифагора для $\triangle OAB$: $OB^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$$14^2 = \left(\frac{14}{8}\right)^2 \cdot r^2 - r^2$$

$$289 = r^2 \cdot \frac{225}{64}$$

$$r^2 = \left(\frac{14 \cdot 8}{15}\right)^2$$

$$r = \frac{136}{15}$$

$$R = \frac{85}{6}$$

$$\operatorname{tg} AFE = \frac{5}{3}$$

Ответ: $r = \frac{136}{15}$

$$R = \frac{85}{6}$$

$$\operatorname{tg} AFE = \frac{5}{3}$$

Задача 5

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, когда $f(x) < f\left(\frac{y}{x}\right)$ т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$
 $f\left(\frac{y}{x}\right)$

$f > 0$ только когда в разложении на простые числа, есть число больше 3

Таблица:

x 10 14 15 20 21 22

$f(x)$ 1 1 1 1 1 2

$$f(ab) = f(a) + f(b) \quad (1)$$

$$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] - p \text{ - простое} \quad (2)$$

кол-во $(x; y) \in \mathbb{N} - ?$

$$24 \geq x \geq 1$$

$$1 \leq y \leq 24$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

По (2) $f(3) = 0$ и $f(2) = 0$; по (1) $f(1) = 0$

Выписали \mathbb{N} для всех простых от 1 до 24

x	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(x)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) - f(y) \quad f(1) = 0$$

$f(x) \geq 0$ всегда

$f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$ только когда $f(y) > 0$

$f=0$ у 11 месяцев

$f=1$ у 4 машин

$f=2$ у 2 машин

$f=3$ у 1 машин

$f=4$ у 2 машин

$f=5$ у 1 машин

Всего вариантов: $11 \cdot 13 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 198$

Ответ: 198 вариантов.

$w_3 - \text{замени } + = \log_{12}(x^2 + 18x)$ 17:34 3.28
 $\log_{12}(x^2 + 18x)$ 18:18 $x^2 + 18x > 0$ 9/33
 $-x^2 \geq 1x^2 + 18x$ $\log_{12} 0.5$ $x(x+18) > 0$
 $x > 0 \quad x < -18$ 13:04



улабачаючы
 $x^2 + 18x - 144 \leq 0$
 $x_1 + x_2 = -18$
 $x_1 \cdot x_2 = -144$

$\log_{12}(x^2 + 18x)$
 $\log_{12} 0.5$
 $\log_{12} 3$
 $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{5}$
 $2\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5}$
 $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{5}$
 $\sin(2\alpha + 4\beta) + (\sin(2\alpha + 2\beta)) = -\frac{1}{5}$
 $\sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\beta = -\frac{1}{5}$
 $2\sin 2\beta \cos 2\alpha + 2\sin 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\beta = -\frac{1}{5}$
 $4\sin 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\beta = -\frac{1}{5}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)