МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$x = 2\alpha \quad y = 2\beta$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(x+2y) + \sin x = -\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(x+y)\cos y = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\cos y = \frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

(из ОТТ)

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin x \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin x + \cos x = -1 \\ 4\sin x - \cos x = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1 \\ 8\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \\ 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8\,tg\,\alpha + 2 = 0 \\ 8\,tg\,\alpha + 2tg^2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -\frac{1}{4} \\ tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -4 \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\,\alpha \in \{-\frac{1}{4}; 0; -4\}$

Задача №5.

$f(p \cdot 1) = f(p) + f(1) = [\frac{p}{4}] + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$, т.к. $p \cdot 1 = p$.

(все $\alpha_i > 0$)

(1) $f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i [\frac{p_i}{4}]$ (очевидно, т.к. от числа будем „отщеплять" простой множитель и подставл в формулу $f(\frac{a}{p_i} \cdot p_i) = f(\frac{a}{p_i}) + f(p_i) = f(\frac{a}{p_i}) + [\frac{p_i}{4}]$

Также заметим, что $f(y) = -f(\frac{1}{y})$, т.к.

$f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(1) = 0 = f(y) + f(\frac{1}{y})$

Тогда из предыдущей формулы (1), поймём, что она работает и уже отр. степеней.

Теперь поймём, что $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0.$

$f(3) = 0 \quad f(4) = 0 \quad f(5) = 1 \quad f(6) = 0$

$f(7) = 1 \quad f(8) = 0 \quad f(9) = 0 \quad f(10) = 1$

$f(11) = 2 \quad f(12) = 0 \quad f(13) = 3 \quad f(14) = 1$

$f(15) = 1 \quad f(16) = 0 \quad f(17) = 4 \quad f(18) = 0$

$f(19) = 4 \quad f(20) = 1 \quad f(21) = 1 \quad f(22) = 2$

$f(23) = 5 \quad f(24) = 0 \quad f(25) = 2$

Посчитаем кол-во разн. чисел:

$0 - 9 \quad 2 - 3 \quad 4 - 2$

$1 - 7 \quad 3 - 1 \quad 5 - 1$

1) $f(x) = 0, \quad f(y) \neq 0$

$N = 9 \cdot 14 = 126$

2) $f(x) = 1 \quad f(y) > 1$

$N_2 = 7 \cdot 7 = 49$

3) $f(x) = 2 \quad f(y) > 2$

$N_3 = 3 \cdot 4 = 12$

4) $f(x) = 3 \quad f(y) > 3$

$N_4 = 1 \cdot 3 = 3$

5) $f(x) = 4 \quad f(y) > 4$

$N_5 = 2 \cdot 1 = 2$

$\sum N = 192$

Ответ: 192

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

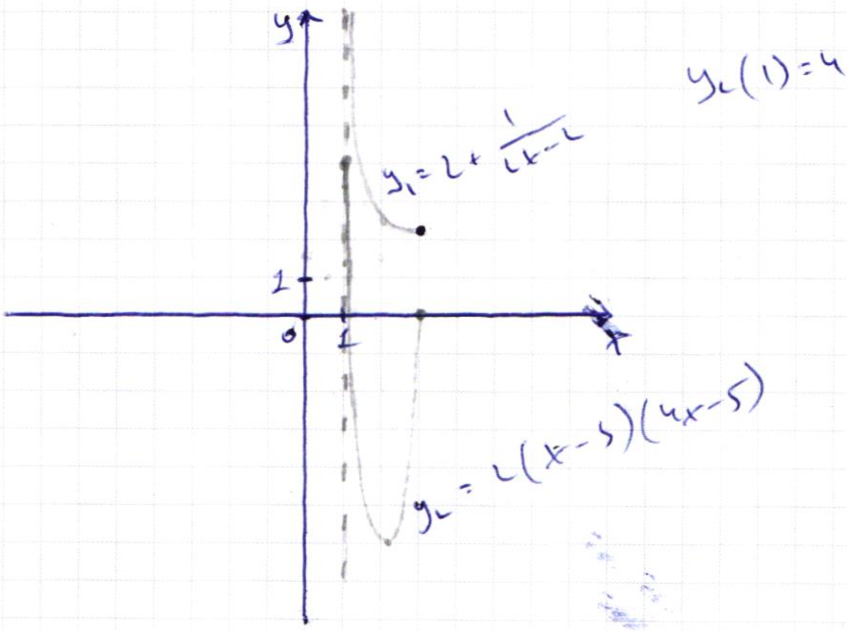
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6.

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30$$

$$y_1 = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$$

$$y_2 = 8x^2 - 34x + 30 = 2(x-3)(4x-5)$$



Поймем, что график $y_3 = ax+b$ — прямая.

тогда $y_3(1) \geq 4$, $y_3(3) \geq 0$ (1)

возьмем прямую ~~...~~ как можно максимально низко (т.е. нельзя сделать ординату какой-то точки ниже, чтобы при этом $y_3(1) \geq 4$ и $y_3(3) \geq 0$.

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=6 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Заметим, что
$-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2}$

$-4x^2+12x-9=0$
$-(2x-3)^2=0$

есть 1 реш => прямая касается гиперболы y_1.
Если сделать прямую ~~выше~~ сколь-либо выше
(не паралл перен вверх, а поменяв ~~...~~ какой-то точки и через другую ее пр ~~пр~~ орд пров пр, как, чтобы выполн усл. (1), то ~~...~~
y_3 будет лежать выше ~~...~~ гипербола y_1, тк сущ пр ниже нее, котор ее касается)
Ответ: $(-2;6)$
Задача №3.
$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$ ОДЗ $x^2+6x>0$
$4^{\log_4 3\cdot\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)$
$(x^2+6x)^{\log_4 3} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)$
ЗЛ $t=x^2+6x$
$t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5}-t$
$t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t \geq 0$
$y=t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t$
$y'=\log_4 3\, t^{\log_4 3-1}-\log_4 5\, t^{\log_4 5-1}+1$
Заметим, что при $t \geq 16$, $\log_4 3\cdot t^{\log_4 3-1}<1$,
тк $\log_4 3<1$, а $\log_4 5\cdot t^{\log_4 5-1}>2$, тк
$t^{\log_4 5-1} \geq \frac{25}{16}$, $\frac{25}{16}\log_4 5-2 \geq 0$, тк $\log_4 5 \geq \frac{32}{25}$, тк

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4^{4/3} = \sqrt[3]{256} \geq \sqrt[3]{216} = 6 \geq 5 \Rightarrow \log_4 5 \geq \frac{4}{3} \geq \frac{32}{25} = 1,28$

$(\frac{4}{3} = 1,(3) > 1,28)$

Таким образом, при $t \geq 16$, знач

y уменьш $\leq y(16) = 0 \Rightarrow$

при $t > 16$ $y(t) < 0$.

$\forall t \leq 16$ $y(t) \geq 0$

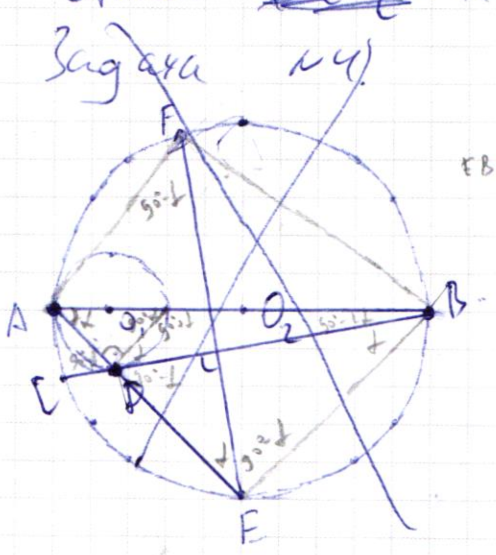
$$\begin{cases} x^2+6x \leq 16 \\ x^2+6x > 0 \end{cases}$$

$x \in [-8; 2]$

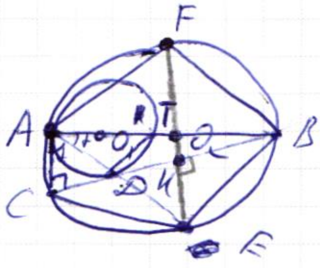
$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Задача №4)



FB=FA



O_1, O_2 и A – на 1 пр.
(изв факт)

Реш-е: Проведем EO_2

При гомотетии с $k = \frac{AO_2}{AO_1}$ окр ω переходит в Ω. Точка D перейдет в точку E, O_1 в O_2.
$O_1D \perp CB$. $\Rightarrow$ $O_2E \perp CB$. (т.к. CB перейдет в пр $a \parallel CB$ и тогда $O_2E \perp a \Leftrightarrow O_2E \perp CB$).

$BC \cap EF = K$, $BK = KC$ (т.к. EF – диам.)
$\angle BAE = \alpha$, $\angle AEB = 90°$, $\angle ABE = 90° - \alpha$

$AO_1 \cap \omega = T$

$\angle TDA = 90°$

$\angle ATD = 90° - \alpha$

$\angle TDB = \angle TAD = \alpha$

$\angle ADC = 90° - \alpha$

$\angle EDB = 90° - \alpha$

$\angle DBE = \alpha$, т.к. $\angle DEB = 90°$ как опир на диам.

$\angle DBE = \angle DAC$ (как опир на 1 хорду EF)

$\angle ADC = 90° - \alpha$, $\angle DAC = \alpha$ $\Rightarrow$ $\angle ACD = 90°$

AD – бис $\triangle ABC$.

$AC = 5x$, $BA = 18x$ (по св-ву бис)

~~$25x^2 + 324x^2 = 81$ (т Пифаг $\triangle ABC$)~~

~~$349x^2 = 81$~~

~~$x^2 = \frac{81}{349}$ $x = \frac{9\sqrt{349}}{349}$~~

$324x^2 = 25x^2 + 81$
(т Пиф $\triangle ABC$)

$x^2 = \frac{81}{299}$

$x = \frac{9}{\sqrt{299}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle O_1DB \sim \triangle ACB$ (по 3 углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_1B}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BD+DC} = \frac{13}{18}$

$AB = 2R$, $O_1B = 2R - r$

$\frac{2R}{2R - \cancel{2}r} = \frac{13}{18}$ $\quad 36R = 26R - 13r$

$r = \frac{10}{13}R$

$18x = 2R$

$R = 9x = \frac{81}{\sqrt{299}}$

$r = \frac{10}{13} \cdot \frac{81}{\sqrt{299}} = \frac{810}{13\sqrt{299}}$

$\angle AFE = 90° - \alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{9\sqrt{299}}{2 \cdot 81} = \frac{\sqrt{299}}{18}$

$\cos 2\alpha = \frac{5}{18}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\begin{cases} \cancel{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{299}}{36} \\ \cancel{2}\cos^2\alpha = \frac{23}{36} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sin\alpha = \frac{\sqrt{13}}{6} \\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{6} \end{cases}$

$\angle EFA = \arccos(\sin\alpha) = \arccos\frac{\sqrt{13}}{6}$

$FA = \cos\angle EFA \cdot 2R$, $\quad EA = \sin\angle EFA \cdot 2R$

$S_{\triangle EFA} = \frac{FA \cdot EA}{2} = 2R^2 \cos\angle EFA \cdot \sin\angle EFA = R^2\cos 2\alpha =$

$= \frac{3502.845}{598}$

Ответ: $r = \frac{810}{13\sqrt{299}}$

$R = \frac{87}{\sqrt{299}}$

$\angle EFA = \arccos\frac{\sqrt{13}}{6}$

$S = \frac{3502845}{598}$.

Задача №2.

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 = 10 - 2y \end{cases}$$

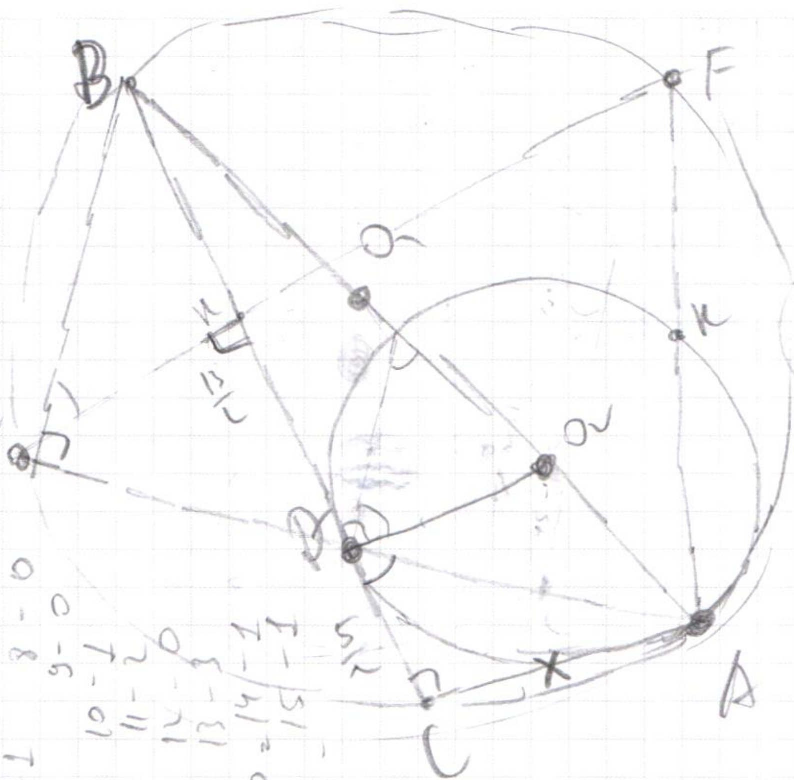
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{2R-r}{R} = \frac{13}{5}$

$\frac{AC}{BF} = \frac{DC}{DE} = \frac{AD}{BD}$

$3y - 2t = \sqrt{3xy - 2t - 3y + 2}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{5}\right) > 0$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} + a \geq 0$

$9 \cdot 25 - 16$

16

$e^{x'} = e^x \ln e$

$a^{\log_4 3 - 1} - a^{\log_4 5 - 1} + 1 \geq 0$

$a^{x'} = e^x \ln a$

$4^{\frac{4}{3}} =$

$\frac{4}{3}$ $2^{8/3} =$ $\sqrt[3]{2^2 16}$

$a^{\log_4 3}$

$\log_4 3 \cdot a^{\log_4 3 - 1} - \log_4 5 \cdot a^{\log_4 5 - 1} + 1$

$\frac{25}{16} \cdot \log_4 5 - 2 =$

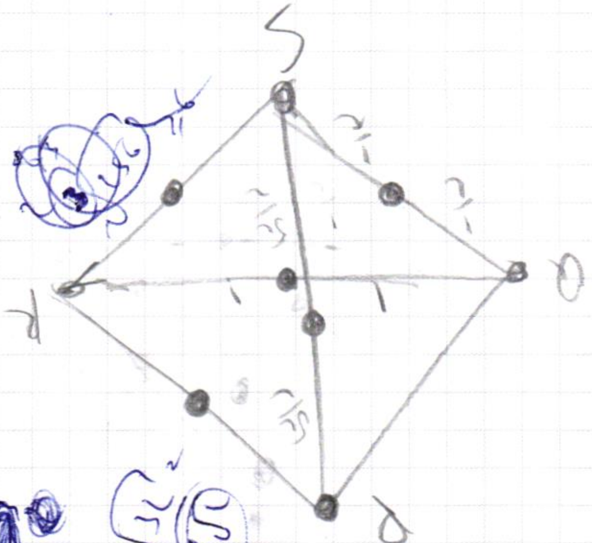
$4^{5/4} =$

$= 25 \log_4 5 - 32$

$\log_4 5 > \frac{32}{25}$ $1{,}28$

$4^{5/4}$

$\sqrt{5}\,\sqrt{2}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

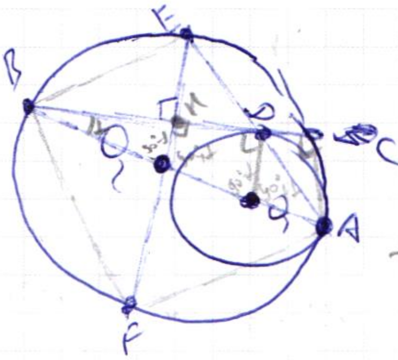
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

18 299 79

126 + 49 = 175, 175 + 12 = 187

$\sin \angle A =$



$\frac{2R}{2R-r} = \frac{18}{13}$

$26R = 36R - 18r$

$18r = 10R$, $r = \frac{5}{9}R$

2)

$\begin{cases} 3y - 2x + 1 = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

$3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 + 4x^2 - 15xy + 3y + 2x - 2 = 0$

$\frac{\sqrt{349}}{18}$

$y = \left(\frac{18 \cos \alpha}{\sqrt{349}}\right)$

349 · 13 = 4537

$\frac{\sin t}{4} = \cos 4t$

$\frac{t\pi}{8} = \sin x + \sin(7x + 4)$

$\frac{t\pi}{1} = (4+x)\sin$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

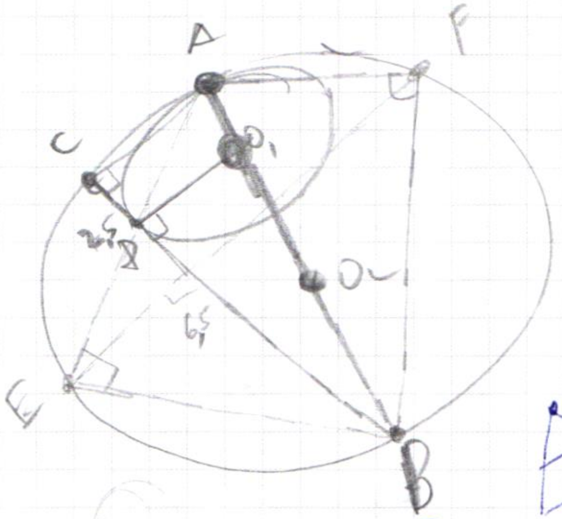
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

∠AFE, S△AFF

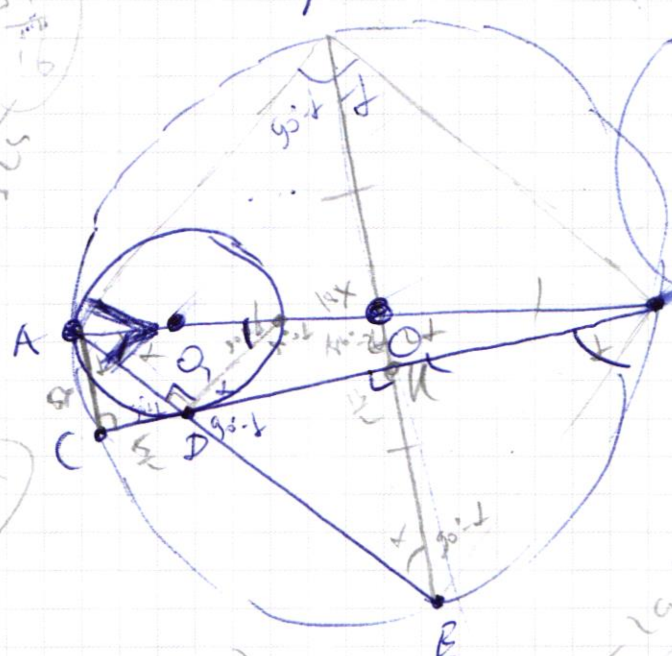
R, r

$\frac{2R}{2R-r}=\frac{18}{13}$



$x\in(1;3]$

$\frac{81}{\sqrt{199}}$



$ax+b$

$a+b=4$

$3a+b=0$

$a=-2$

$b=6$

$-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2}$

$(-2x+6)(2x-2)=4x-3$

$-4x^2+12x-9=0$

$(2x-3)^2=0$