МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

VV

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

VV

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

VV

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

VV

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\cdot\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta =$

$= 2\cdot -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta = -\frac45 \Rightarrow \cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

Если $\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta = \sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\Rightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha + \cos2\alpha = -1 \Leftrightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha(4\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$; по условию $\operatorname{tg}\alpha$ определён $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\sin\alpha = -\cos\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac12$

Если $\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta = \sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\Rightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha - \cos2\alpha = -1 \Leftrightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0\end{array}\right. \Rightarrow$ либо $\operatorname{tg}\alpha = 0$, либо $\operatorname{tg}\alpha = -2$

Заметим, что мы нашли все решения, их ровно 3 $\Rightarrow$ условие задачи полностью выполняется $\Rightarrow$ это и есть ответ.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac12$; $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = -2$

② $\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$; пусть $x-2=a$, $y-1=b$. Тогда система имеет вид:

$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+9b^2 = 25 \quad (2) \end{cases}$; запомним, что $a \geq 2b$ и возведём первое в квадрат: $a^2-4ab+4b^2 = ab \Leftrightarrow a^2-5ab+4b^2 = 0$ (3)

(2) − (3): $5b^2+5ab = 25 \Leftrightarrow b(a+b) = 5 \Rightarrow a = \frac{5-b^2}{b}$ ($b\neq0$, т.к иначе получаем $y=1$ и систему $\begin{cases}x-2=0\\(x-2)^2=25\end{cases}$ $\times$). Подставляя a во (2):

$\frac{(5-b^2)^2}{b^2}+9b^2 = 25 \Leftrightarrow (5-b^2)^2+9b^4 = 25b^2$; пусть $c=b^2$. Тогда получим:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(5-c)^2+9c^2=25c \Leftrightarrow 25-10c+c^2+9c^2=25c \Leftrightarrow 10c^2-35c+25=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2c^2-7c+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=\frac{5}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=\frac{5}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\pm 1 \\ b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\end{array}\right. \Rightarrow$ подставляя

в выражение для a получаем 4 пары решений $(a;b)$:

$(4;1)$; $(-4;-1)$; $(\sqrt{\frac{5}{2}};\sqrt{\frac{5}{2}})$; $(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\sqrt{\frac{5}{2}})$ $\Rightarrow$ им будут соответствовать пары решений $(x;y)$: $(6;2)$; $(-2;0)$; $(\sqrt{\frac{5}{2}}+2;\sqrt{\frac{5}{2}}+1)$;
(т.к. $x=a+2$; $y=b+1$)

$(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2;-\sqrt{\frac{5}{2}}+1)$. Проверим эти корни на единственное ограничение в задаче: $x-2y\geq 0$: $6-4\geq 0$ ✓; $-2-0<0$ ✗; $\sqrt{\frac{5}{2}}+2-2\sqrt{\frac{5}{2}}-2=$

$=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0$ ✗; $-\sqrt{\frac{5}{2}}+2+2\sqrt{\frac{5}{2}}-2=\sqrt{\frac{5}{2}}>0$ ✓ $\Rightarrow$ нам подходят только пары решений $(6;2)$ и $(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2;-\sqrt{\frac{5}{2}}+1)$, в чём несложно убедиться подстановкой. Ответ: $x=6, y=2$ и $x=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2, y=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1$

5. $f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow$ если $a=1$, то: $f(b)=f(1)+f(b) \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если подставим $b=\frac{1}{a}$, то получим: $f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})=0 \Rightarrow$
$a\neq 0$, т.к. f опред. на полож. рац. числах

$\Rightarrow f(a)=-f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0$, $x,y\in[1;24]$

Из условия, что $f(p)=[p/4]$ получаем: $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$ $\Rightarrow$ тогда

$f(2n)=f(2)+f(n)=f(n)$ и $f(3n)=f(3)+f(n)=f(n)$ $\Rightarrow$ посчитаем все оставшиеся $f(n)$, где $n\in[1;24]$ и $n\in\mathbb{N}$: $f(4)=f(2)=0$; $f(6)=f(3)=0$;

$f(8)=f(4)=0$; $f(9)=f(3)=0$; $f(10)=f(5)=1$; $f(12)=f(4)=0$; $f(14)=f(7)=1$;

$f(15)=f(5)=1$; $f(16)=f(8)=0$; $f(18)=f(9)=0$; $f(20)=f(10)=1$; $f(21)=$

$=f(7)=1$; $f(22)=f(11)=2$; $f(24)=f(12)=0$ $\Rightarrow$ из всех n от 1 до 24 $f(n)=0$

для 11 значений n, $f(n)=1$ для 7 значений, $f(n)=2$ для 2-х значений,

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

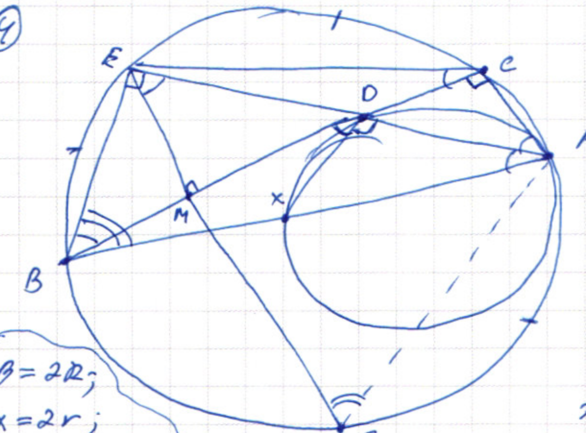
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(n) = 3$ для 1 значения, $f(n)=4$ для 2-х значений $f(n)=5$ для 1 значения $f(n) > 5$ нет ни для какого n от 1 до 24 и $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ из этих значений нам нужно выбрать такие, чтобы $f(x) < f(y)$. Если $f(x)=0$ (11 вар.), то $1 \leq f(y) \leq 5$ (т.е. $7+2+1+2+1 = 13$ вар.); если $f(x)=1$ (7 вар.), то $2 \leq f(y) \leq 5$ (т.е. $2+1+2+1 = 6$ вар.); если $f(x)=2$ (2 вар.), то $3 \leq f(y) \leq 5$ (т.е. $1+2+1 = 4$ вар.); если $f(x)=3$ (1 вар.), то $4 \leq f(y) \leq 5$ (т.е. $2+1 = 3$ вар.); если $f(x)=4$ (2 вар.), то $f(y)=5$ (1 вар.); для $f(x)=5$ нельзя подобрать y, что $f(y) > f(x)$, при $x, y \in \mathbb{N}$ и $x, y \in [1;24]$ $\Rightarrow$ всего вариантов будет $11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$ $= 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 198$ вариантов, т.е. 198 пар.

Ответ: 198 пар.

(4)



$AB = 2R$;
$AX = 2r$;
$R = R_\Omega$; $r = R_w$

Заметим, что т.к. AB – диаметр Ω, а A – общая точка касания окружн. $\Rightarrow$ AX – диаметр w $\Rightarrow \angle AEB = 90°$ и $\angle ADX = 90°$; $\angle BDX = \angle DAX = \alpha$ – впис. угол, опир. на хорду, равен углу между касат. и этой хордой $\Rightarrow \angle BDE = 90 - \alpha \Rightarrow \angle BEF = \alpha \Rightarrow \angle BBF = 90 - \alpha \Rightarrow \angle EBC = \alpha$, тогда т.к. $\angle ECB = \angle BAE$ – опир. на $\smile BE$ окр Ω, получаем, что $\angle EBC = \angle ECB \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta BEC$ – р/б $\Rightarrow BE = EC$ и EF – высота, медиана и бисс-а $\Rightarrow \angle EAC \overset{\text{одна дуга}}{=} \angle EBC = \angle BAE \Rightarrow AD$ – бисс-а в ΔBAC $\Rightarrow$ по св-ву биссектрисы

$\frac{8}{17} = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \overset{\angle ACA = 90° \text{ – опир на } AB}{=} \cos 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}$ – т.к. $\angle 2\alpha < 90°$ но $\angle 2\alpha > 0°$

$\Rightarrow$ для ΔACA: $\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin 2\alpha} = (8+17) : 2 \cdot \frac{15}{17} = \frac{25 \cdot 17}{2 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{85}{6}$

$\Rightarrow$ из степени точки отн. w: $BD^2 = BX \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R \Rightarrow r = 2R - \frac{BD^2}{2R} =$

☐ черновик ☑ чистовик

Страница № 3

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= \frac{85}{3} - \frac{17^2\cdot 3}{85} = \frac{85}{3} - \frac{17\cdot 3}{5} = \frac{85\cdot 5 - 17\cdot 3^2}{15} = \frac{17}{15}(5^2-3^2) = \frac{17\cdot 16}{15} = \frac{272}{15}$

$\angle AFE = \angle EBA$ - опир на дугу AE; $\angle EBA = 90-\alpha \Rightarrow$ найдём $\angle\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{15}{17} \underset{0<\alpha<90^\circ}{\Rightarrow} \sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{15}{34} \Rightarrow \sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = \frac{15^2}{34^2}$

пусть $a = \sin^2\alpha \Rightarrow a(1-a) = \frac{15^2}{34^2} \Rightarrow a^2 - a + \frac{15^2}{34^2} = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-\frac{30^2}{34^2}}}{2} =$

$= \frac{1}{2} \pm \frac{16}{34\cdot 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{4}{17} = \frac{17}{34} \pm \frac{8}{34} = \frac{9}{34}; \frac{25}{34}$, ~~$2\alpha<90 \Rightarrow \alpha<45^\circ \Rightarrow$~~

$\Rightarrow$ ~~$\sin$~~ $\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{34}$; $\sin^2\alpha = \frac{25}{34} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}\\ \sin\alpha = \sqrt{\frac{25}{34}}\end{array}\right.$; $2\alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha < 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha < \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{25}{34}}$ не подходит (т.к. $\sqrt{\frac{25}{34}} > \frac{1}{\sqrt2}$, т.к. $\frac{25}{34} > \frac12$)

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle AFE = 90-\alpha = 90 - \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

~~$S\triangle AEF$~~ в $\triangle AEF$ $\angle AEF = \alpha$, т.к. $\angle AEF = \angle BAE \Rightarrow \angle EAF = 180^\circ -$

$- \angle AFE - \angle AEF = 180^\circ - (90^\circ-\alpha) - \alpha = 90^\circ \Rightarrow S\triangle AEF = \frac{AE\cdot AF}{2}$, при

этом $\triangle AEB = \triangle EAF$ по стороне и 2-м прилегающим к ней

углам (AE-общ, $\angle ABF = \angle BAE = \alpha$ и $\angle BEA = \angle FAE = 90^\circ$) $\Rightarrow S\triangle AEF =$

$= S\triangle ABE = \frac{AE\cdot EB}{2} = \frac{AB\cdot\cos\alpha\cdot AB\cdot\sin\alpha}{2} = \frac{AB^2\cdot\sin 2\alpha}{4} = \frac{85^2}{3^2}\cdot\frac{15}{17\cdot 4} =$

$= \frac{5^2\cdot 17^2\cdot 15}{9\cdot 17\cdot 4} = \frac{25\cdot 15\cdot 17}{36} = \frac{6375}{36}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{272}{15}$; $\angle AFE = 90 - \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$; $S\triangle EAF = \frac{6375}{36}$

(3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$; ОДЗ: $x^2+18x > 0 \Rightarrow$

$\log_{12}(x^2+18x) = \frac{\log_5 x^2+18x}{\log_5 12} \Rightarrow$ $\quad\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x>0\\ x<-18\end{array}\right.$

$\Rightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)} = \left(5^{\log_5(x^2+18x)}\right)^{\frac{1}{\log_5 12}} = (x^2+18x)^{\log_{12}5}$; получаем:

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geq \frac{|x^2+18x|^{\log_{12}13}}{x^2+18x} = (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$1 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}} - (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}} = (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}}\left((x^2+18x)\ \ldots\right)$

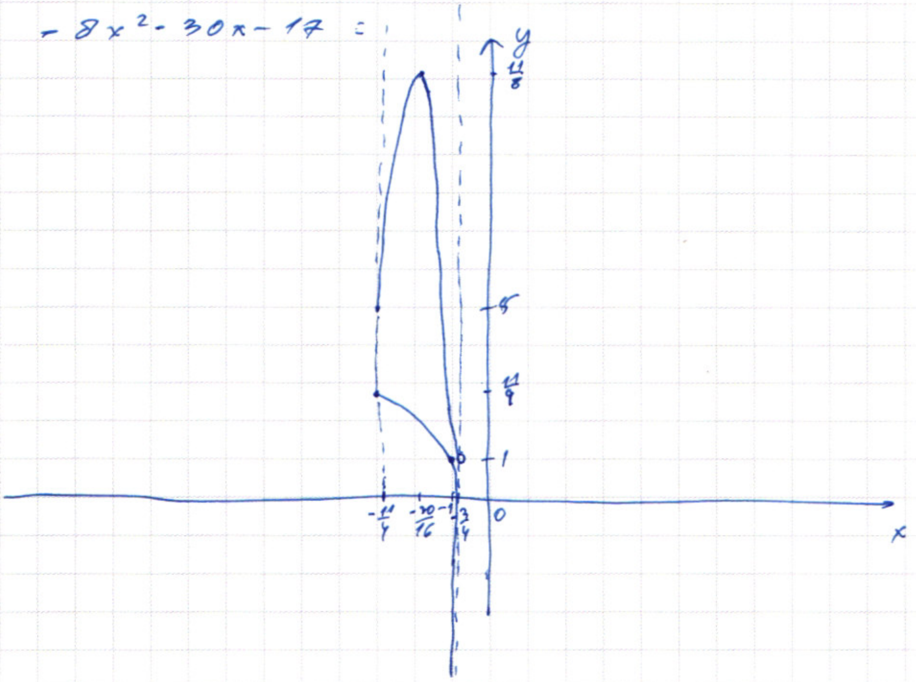
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 Давайте нарисуем графики функции $\frac{12x+11}{4x+3}$ и $-8x^2-30x-17$:



$\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$

$-8x^2-30x-17=0$

вершина $-\frac{30}{16}$, в ней

$f(x)=\frac{89}{8}=11\frac{1}{8}$

Заметим, что чтобы прямая $ax+b$ удовлетворяла условию, она должна проходить через область между графиками. Найдём крайние значения этой прямой. при $x=-\frac{3}{4}$ $f(x)\le 1$, а при $x=-\frac{11}{4}$ $f(x)\le 5$ — для условие о том, что ниже параболы. Т.е.: $-\frac{3}{4}a+b\le 1$ и $-\frac{11}{4}a+b\le 5$,

~~$-\frac{11}{4}a+\frac{11}{3}b\le\frac{11}{3}$ и $-\frac{11}{4}a+b\le 5$~~ т.е. $b\le 5+\frac{11}{4}a$ и $b\le 1+\frac{3}{4}a$ ⇒

⇒ $b\le \min\left(5+\frac{11}{4}a;\ 1+\frac{3}{4}a\right)$

~~Для гиперболы: $4ax^2+x(4b+3a-12)-11+3b\le 0$, т.е.~~

~~$x_{1,2}=\frac{-(4b+3a-12)\pm\sqrt{(4b+3a-12)^2-16a(-11+3b)}}{8a}$~~

при этом заметим, что a нам будут ~~подходит~~ между a_1 и a_2, где a_1 — тангенс угла наклона касательной к гиперболе из точки $(-\frac{3}{4};-1)$, а a_2 — тангенс угла наклона касательной к гиперболе из точки $(-\frac{11}{4};5)$, и для каждого из них будем находить соотв. значения b.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b}$ $\quad \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$ $\cancel{\le ax+b}$

$x=-1 \quad y=1$

$\cancel{x=-2 \quad y=2+\frac{3}{5}}$

$x=-\frac{11}{4} \quad y=\frac{11}{4}$

$12x+11 \ge (ax+b)(4x+3)$

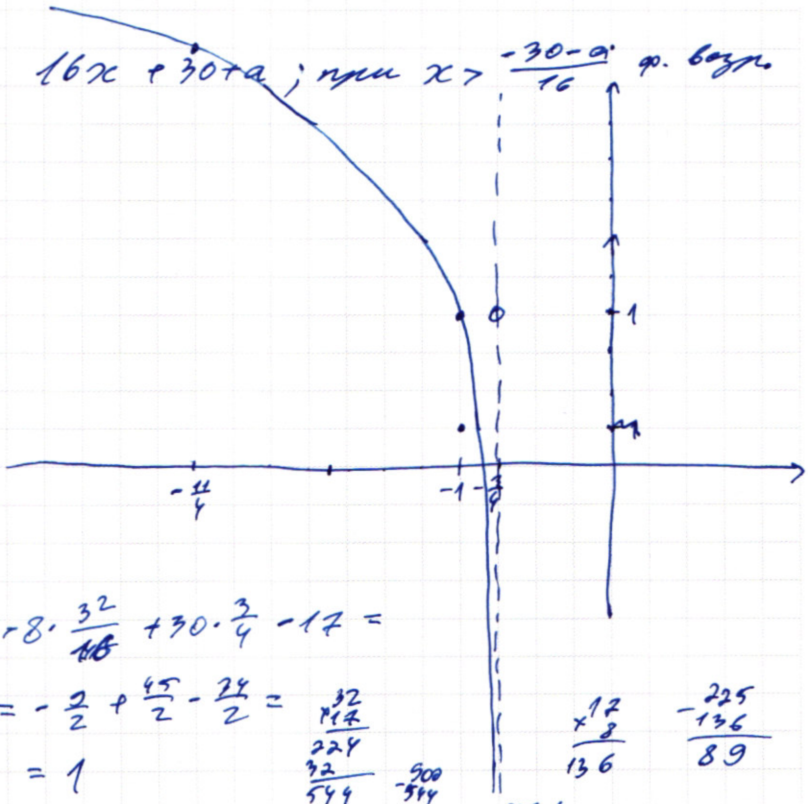
$4ax^2 + x(4b+3a-12) - 11 + 3b \le 0$

$-8x^2 - (30+a)x - 17 - b \ge 0$

$8x^2 + (30+a)x + 17 + b \le 0 \sim 16x + 30 + a$; при $x > \frac{-30-a}{16}$ ф. возр.

$\cancel{24x^2 + (90+3a)x + 51 + 3b \le 0}$

$\cancel{(24+4a)x^2 + (102+4b)x + 62}$



$-8 \cdot \frac{3^2}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 =$

$-16x + 30 = 0$

$= -\frac{2}{2} + \frac{45}{2} - \frac{24}{2} =$ $\quad 32 \cdot 17 = 224 + 320 = 544$ $\quad 17 \cdot 8 = 136$ $\quad 225 - 136 = 89$

$x = -\frac{30}{16} = \frac{-7{,}5}{4}$ $\quad x >$

$= 1$ $\quad 900 - 544 = 356$ $\quad 356 : 4 = 89$

$-8 \cdot \frac{30^2}{16^2} + \frac{30^2}{16} - 17$

$\frac{30^2}{16} - \frac{30^2}{16 \cdot 2} - 17 = \frac{30^2 \cdot 2 - 30^2 - 17 \cdot 16 \cdot 2}{16 \cdot 2} = \frac{30^2 - 17 \cdot 16 \cdot 2}{16 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 5^2 \cdot 2^2}{2^5} - 17 = \frac{9 \cdot 5^2}{8} - 17$

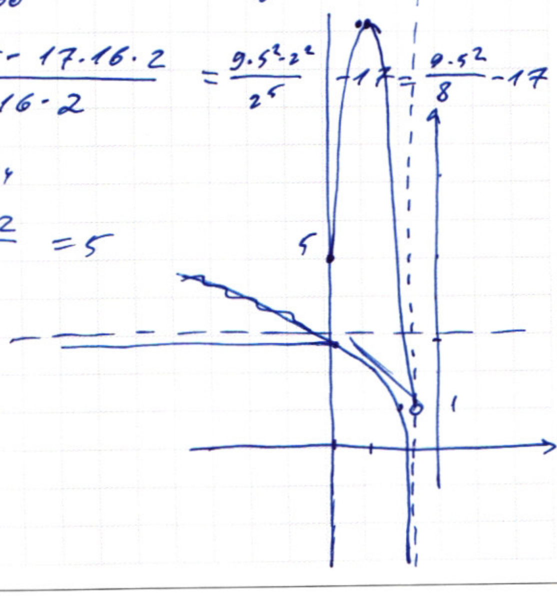
$= \frac{89}{8} = 11\frac{1}{8} = \frac{44{,}5}{4}$

$-8 \cdot \frac{11^2}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 = \frac{-11^2 + 15 \cdot 11 - 17 \cdot 2}{2} = 5$

$\left(3 + \frac{2}{4x+3}\right)' = \frac{1}{2}$

$\frac{-2 \cdot 4}{(4x+3)^2} =$ $\quad ax+b \ge \frac{12x+11}{4x+3}$

$(4x+3)(ax+b) \le 12x+11$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

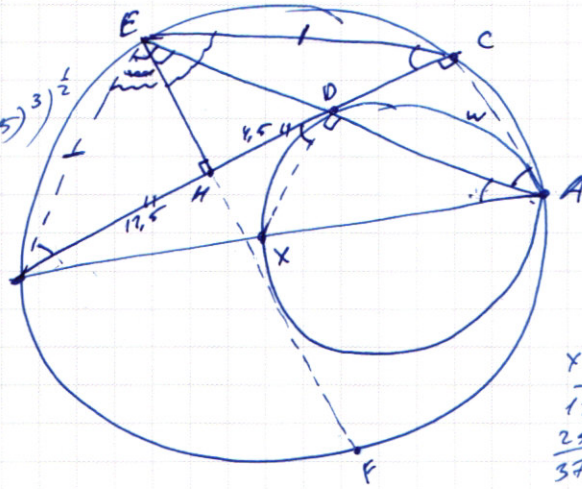
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\frac{a}{8}} =$

$25^{\frac{3}{2}} = ((25)^3)^{\frac{1}{2}} = 5^3$



$CD = 8 \quad BD = 17$

$AD^2 = BX \cdot BA = D \cdot (D - d) = 17^2$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE = 17 \cdot 8$

$\frac{AD}{AE} = \frac{d}{D} \quad AD = \frac{AE \cdot d}{D}$

$AE \cdot DE \cdot d = 17 \cdot 8 \cdot D$

$BX \cdot BA = 17^2$

$AD \cdot AE = 17 \cdot 8$

$\frac{17^2 - 8^2}{AD^2} + ED^2 = AE^2 + EB^2 = AB^2 = \frac{17^4}{BX^2}$

$\smile BF = \smile FC$

$\frac{DX}{BD} = 1$

$\frac{DX}{\sin\alpha} = 2r = d; \ \frac{EB}{\sin\alpha} = 2R = D$

$\frac{EB - DX}{\sin\alpha} \cdot \frac{EB}{\sin\alpha} = 17^2$

$(EB - DX)\ EB = 17^2 \cdot \frac{DX^2}{XA^2}$

$25 \times 15 = 125 + 25 = 375$

$17 \times 16 = 102 + 17 = 272$

$375 \times 17 = 2625 + 375 = 6375$

$BC = 25$

$2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{BC}{\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}}$

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} = \cos\angle BAC = \frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle BAC = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17} \rightarrow 2R = 25 : \frac{15}{17} = \frac{25 \cdot 17}{15} = \frac{5 \cdot 17}{3}$

$\boxed{R = \frac{5 \cdot 17}{6}}$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289 - 64 = 225$

$34 \times 34 = 136 + 102 = 1156$

$BD^2 = BX \cdot BA = (D - d)\, D \Rightarrow D^2 - dD = BD^2 \Rightarrow d = \frac{D^2 - BD^2}{D} =$

$= D - \frac{BD^2}{D} = \frac{5 \cdot 17}{3} - \frac{17^2 \cdot 3}{5 \cdot 17} = \frac{25 \cdot 17 - 17 \cdot 9}{15} =$

$= \frac{17 \cdot 16}{15}$

$= \frac{AX}{AB} = \frac{AD}{AE}$

$\frac{25}{34} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}\, 25 < 34$

$2 \cdot 25^2 < 34^2$

$1250 <$

$\alpha < 45°$

$\sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{15}{17} \quad \sin\alpha\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{15}{34}$

$(\sin^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = \frac{15^2}{34^2}$

$\frac{34^2 - 30^2}{34^2} = \frac{4 \cdot 64}{34^2} = \frac{2^8}{34^2} = \left(\frac{16}{34}\right)^2$

$\frac{EC}{\sin\alpha} = 2R$

$\sin^2\alpha = \cancel{\ } x$

$\sin\alpha = \frac{DX}{XA} = \frac{EB}{AB} = \frac{EC}{AB} =$

$= \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CD}{AD}$

$1 - \left(\frac{30}{34}\right)^2$

$x(1 - x) = a$

$-x^2 + x - a = 0 \quad x^2 - x + a = 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4a}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\ }$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$; ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$\cancel{5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq (x^2+18x)\left((x^2+18x)^{\log_{12}13-1}-1\right)}$

$\log_{12}(x^2+18x)=\frac{\log_5(x^2+18x)}{\log_5(12)}$ $\quad 5^{\log_{12}(x^2+18x)}=(x^2+18x)^{\frac{1}{\log_5 12}}=(x^2+18x)^{\log_{12}5}$

$(x^2+18x)^{\frac{1}{\log_5 12}} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} \geq (x^2+18x)\left((x^2+18x)^{\log_{12}13-1}-1\right)$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} \geq (x^2+18x)\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)$

$a^{\log_{12}5} \geq a^{\log_{12}13}-a \qquad a\neq 0$

$a^{\log_{12}5-1} \geq a^{\log_{12}13-1}-1 \qquad a^{\log_{12}5}+a \geq a^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}\frac{5}{12}} \geq a^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1$

$12^{a^{\log_{12}\frac{5}{12}}} \geq 12^{a^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1}=\frac{12^{a^{\log_{12}\frac{13}{12}}}}{12}$ $\qquad a^{x^y}=a^{x\cdot x\cdot x}$

$\log_{12}\frac{5}{12} \geq \log_a\left(a^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=$
$=f(x)-f(y)<0$
$f(x)<f(y)$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\qquad f(p)=[p/4]$

$f(x^2)=2f(x)$ $\qquad f(3x)=f(3)+f(x)=f(x)$ $\qquad$ ~~f(5x)~~ = Ответ: $13+11+7\cdot 6+2\cdot 4+1\cdot 3+2\cdot 1$

$f(2x)=f(2)+f(x)=f(x)$

$f(x)=f(1)+f(x)$

$f(1)=0$ $\qquad f(2)=0;\ f(3)=0;\ f(5)=1;\ f(7)=1;\ f(11)=2;$

$f\left(\frac{1}{p}\cdot p\right)=f\left(\frac{1}{p}\right)+f(p)=0$ $\qquad f(13)=3;\ f(17)=4;\ f(19)=4;\ f(23)=5$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ $\qquad f(2\cdot p)=2\cdot f(p)$

0 – 11 $\quad$ 5 – 1
1 – 7
2 – 2
3 – 1
4 – 2

$f(4)=0;\ f(6)=2\cdot f(3)=0;\ f(8)=2\cdot f(4)=0;\ f(9)=0;$

$f(5)=f(10)=1;\ f(12)=f(6)=0;\ f(14)=f(7)=1;\ f(15)=f(5)=1;$

$f(16)=f(8)=0;\ f(18)=f(9)=0;\ f(20)=f(10)=1;$

$f(21)=f(7)=1;\ f(22)=f(11)=2;\ f(24)=f(12)=0;$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

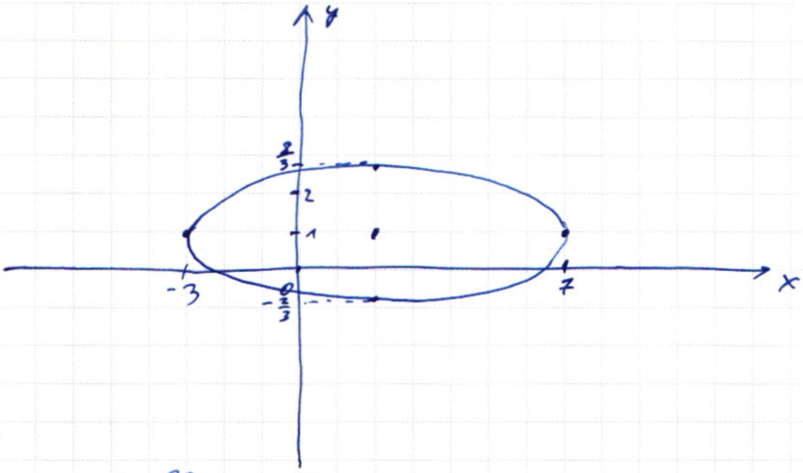
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x^2-5xy+4y^2-x-2y+2=0 \end{cases}$$

$(x-2y+a)^2=x^2+4y^2+a^2-4xy-4ay+ax$

$x^2+4y^2+1-4xy-4y+x=$

$\cancel{-xy}=xy-1+2x-2y=$

$=y(x-2)+2x-1$

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x-2y=x-2+2-2y=\underset{a}{(x-2)}-\underset{b}{2(y-1)}$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ (a-2b)^2=ab \end{cases}$$

$x-2=y-1$

$x=y+1$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$5b^2+5ab=25$

$b^2+ab=5 \Rightarrow a=\frac{5-b^2}{b}$

$b(a+b)=5$

$(y-1)(x+y-3)=5$

$\frac{(5-b^2)^2}{b^2}+9b^2=25$

$(5-b^2)^2+9b^4=25b^2;\ b^2=c$

$25-10c+c^2+9c^2=25c$

$10c^2-35c+25=0$

$2c^2-7c+5=0$

$(c-1)(2c-5)=0$

$\left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=\frac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=\frac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\pm1 \\ b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$

$\cancel{y-1=-1}\ y=0;\ y=+2$

$y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1;\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a=\frac{5-b^2}{b}=\frac{4}{\pm1}=\pm4=x-2$

$a=\frac{5-b^2}{b}=\frac{\frac{5}{2}}{\pm\sqrt{\frac{5}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=x-2$

$\cancel{x=2\ x=}$

$(y=0;x=-2);\ (y=2;x=6);$

$(y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1;\ x=\sqrt{\frac{5}{2}}+2);\ (y=1-\sqrt{\frac{5}{2}};x=2-\sqrt{\frac{5}{2}})$

зч 4 ас: $x=y+1>3$; ~~...~~

$\cancel{(y-1)^2+9(y-1)^2=25}$

$\cancel{(y-1)^2=\frac{5}{2}}$

$1-y=\sqrt{(x-2)(y-1)}=\sqrt{(y-1)^2}=|y-1|$

$1-y\geq0$

$1\geq y$

$2=\sqrt{\cancel{...}\,4\cdot1}=2$ ✓

$4^2+9\cdot1^2=5^2$ ✓

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; ~~sin 2(2α+2β)~~ $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac45$

$+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta = +\frac45$ $\quad \cos2\beta = \frac45\cdot\frac{\sqrt5}{2} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta$
$= \frac15$
$\sin2\beta=\pm\frac1{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac1{\sqrt5}$

1сл: $\sin2\beta=\frac1{\sqrt5}$

$\frac{\sin2\alpha\cdot2}{\sqrt5}+\frac1{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha = -\frac1{\sqrt5}$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
~~$1-2\sin^2\alpha$~~ $1-2\sin^2\alpha$
$2\cos^2\alpha-1$
~~cos2~~

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cancel{2}\cos\alpha)=0$ $\quad \cos\alpha\ne0$, т.к. $tg\alpha$ определён

$2\sin\alpha=-\cos\alpha$

$2\,tg\alpha=-1$

$tg\alpha=-\frac12$

$9y^2-18y+9=9(y^2-2y+1)$
$(y-1)^2=\left(\frac53\right)^2$
$y-1=\pm\frac53 \quad y_1=\frac83$
$y_2=-\frac23$

2сл: $\sin2\beta=-\frac1{\sqrt5}$

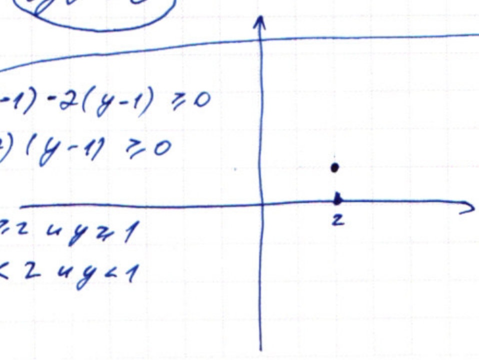
$\frac{2\sin2\alpha}{\sqrt5}-\frac1{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac1{\sqrt5} \Rightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha-\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha-(1-2\sin^2\alpha)=-1 \Rightarrow 2\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0$
$4\sin\alpha\cos\alpha-1+2\sin^2\alpha=-1$
$\sin\alpha=0 \Rightarrow tg\alpha=0$

иначе $2\cos\alpha=-\sin\alpha \Rightarrow tg\alpha=-2$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$; $x\geq2y$;

$x(y-1)-2(y-1)\geq0$
$(x-2)(y-1)\geq0$



$x\geq2$ и $y\geq1$
$x<2$ и $y<1$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+4+9$
$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)