МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$f(1) = f(x) + f\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$f(1\cdot b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f(x) = -f\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

~~$f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$~~ Хочу: $f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}) = f(a_1) + \ldots + f(a_{n+1})$

~~База~~ ~~$f(a_1)$~~ ~~$f(a_1)$~~ $f(a_1 a_2) = f(a_1) + f(a_2)$ ✓

$\exists$ $f(a_1 \ldots a_n) = f(a_1) + \ldots + f(a_n)$

Тогда $f(a_1 \ldots a_{n+1}) = f(a_1 \ldots a_n) + f(a_{n+1}) = f(a_1) + \ldots + f(a_{n+1})$

Отлично! $f(a^m) = \underbrace{f(a) + \ldots f(a)}_{m \text{ раз}} = m f(a)$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{\prod x_i^{\alpha_i}}{\prod y_i^{\beta_i}}\right) = \sum \alpha_i f(x_i) + \sum \beta_i f\left(\frac{1}{y_i}\right) =$$

$$= \sum \alpha_i f(x_i) - \sum \beta_i f(y_i), \text{ где}$$ x_i, y_i – простые множители x и y.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_i \alpha_i \left\lfloor \frac{x_i}{4} \right\rfloor - \sum_i \beta_i \left\lfloor \frac{y_i}{4} \right\rfloor$$

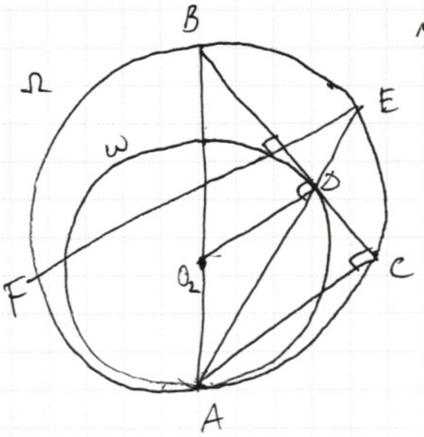
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
f(x)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

Итого: 11 „0"; 7 „1"; 2 „2"; 1 „3"; 2 „4"; 1 „5"

$$11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = \boxed{198}$$

„0" — кол-во чисел >0; „1" — кол-во чисел >1; „2" — кол-во чисел >2

№4.



ст. т. B отн. ω:

$$(2R-2r)2R = 4R(R-r) = \overset{BO^2}{\overset{\parallel}{17^2}} =$$

$$\cancel{= (2R-r)^2}$$

AB – диаметр Ω ⇒ ACB = 90°

R – рад. Ω

r – рад. ω

$$AC = \sqrt{(2R)^2 + (17+8)^2} = \frac{r}{17}\cdot(17+8)$$

из-за подобия $\triangle O_2BO \sim \triangle ABC$

$$\begin{cases} 4R^2 + 25^2 = r^2\frac{25^2}{17^2} \\ 4R^2 - 4Rr = 17^2 \end{cases}$$

$$r = \frac{17}{25}\sqrt{4R^2+25^2}$$

$$4R^2 - 17^2 = 4R\cdot\frac{17}{25}\sqrt{4R^2+25^2}$$

$$16R^4 - 8\cdot 17^2R^2 + 17^4 = \frac{17^2}{25^2}\cdot(64R^4 + 100^2R^2)$$

$$16R^4\left(\left(\frac{34}{25}\right)^2-1\right) + 12\cdot 17^2R^2 - (17^2)^2 = 0$$

$$R = \sqrt{\frac{-6\cdot 17^2 + \sqrt{6^2\cdot 17^4 + 17^4\cdot 16\left(\left(\frac{34}{25}\right)^2-1\right)}}{16\left(\left(\frac{34}{25}\right)^2-1\right)}} =$$

$$= \frac{17}{4}\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+16\left(\left(\frac{34}{25}\right)^2-1\right)}}{\left(\frac{34}{25}\right)^2-1}}$$

$$r = R - \frac{17^2}{4R} = \frac{17}{4}\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+16\left(\frac{34}{25}\right)^2-1)}}{\left(\frac{34}{25}\right)^2-1}} - 17\sqrt{\frac{\left(\frac{34}{25}\right)^2-1}{-6+\sqrt{36+16\left(\left(\frac{34}{25}\right)^2-1\right)}}}$$

Ну а когда мы знаем радиус мы знаем всё.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ \frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=1 \end{cases}$$

$x-2=p$; $y-1=q$

$$\begin{cases} p-2q=\sqrt{pq} \quad (1) \\ \frac{p^2}{5^2}+\frac{q^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=1 \quad (2) \end{cases}$$

(1) : $q \leq \frac{p}{2}$

$pq \geq 0$ если $p=0$, то $q=0$, но тогда (2) не вып. $\Rightarrow p,q \neq 0$

1) $p,q>0$

$\sqrt{p}^2-\sqrt{p}\sqrt{q}-2\sqrt{q}^2=0$

$\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2-\sqrt{\frac{p}{q}}-2=0$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{p}{q}}=2 \\ \sqrt{\frac{p}{q}}=-1 \quad \times \end{array}\right.$$

$p=4q$

(2): $q^2\frac{4^2+3^2}{5^2}=1$

$\begin{cases} q=1 \\ p=4 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}}$

2) $p,q<0$

$-\sqrt{-p}^2-\sqrt{-p}\sqrt{-q}+2\sqrt{-q}^2=0$

$\sqrt{\frac{p}{q}}^2+\sqrt{\frac{p}{q}}-2=0$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{p}{q}}=-2 \quad \times \\ \frac{p}{q}=1 \end{array}\right.$$

$p=q$

$q^2\frac{1+9}{5^2}=1$

$\begin{cases} q=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ p=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}}$

$$5^{\overset{t}{\log_{12}(x^2+18x)}} + x^2+18x \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12} 13}$$

~ 3

$x^2+18x>0$

$$5^t + 12^t \geqslant 13^t$$

заметим $5^2+12^2=13^2$

$$\underset{a}{(5^2)}^{\frac{t}{2}} + \underset{b}{(12^2)}^{\frac{t}{2}} \geqslant \underset{c}{(5^2+12^2)}^{\frac{t}{2}}$$

При $t\leq 0$ нер-во очев. вып., т.к. $5^t \geqslant 13^t$

$\frac{t}{2}=x$

$\measuredangle$ $t>0$

$$a^x+b^x \geqslant c^x$$

$$a,b,c,x>0$$

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

$$a^x+b^x \geqslant \frac{(a+b)^x}{2^{x-1}}$$

$$0<x\leq 1 \Rightarrow \frac{(a+b)^x}{2^{x-1}} \geqslant (a+b)^x ; \quad a^x+b^x \geqslant (a+b)^x$$

Главный вопрос: что при $x>1$?

fact: $f(a)+f(b)=f(a+b) \Rightarrow f(x)=kx$

$\exists$ $f(y)=y^x$

~~$f(y)$~~ Тогда $f(a)+f(b)=f(a+b) \Rightarrow y^x=ky^1$

$x=1$; $k=1$

Т.к. ф-ция $g(x) = a^x+b^x-(a+b)^x$ непрерывная, то если при $x\leq 1$ $g(x)\leq 0$ и $g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$, значит при $x>1$ $g(x)>0$ или $g(x)<0$. Проверим $g(2)$: $a^2+b^2\leq a^2+2ab+b^2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит $g(x)<0$ при $x>1$ и нер-ва не вып.

нер-во вып. только при $x \le 1$

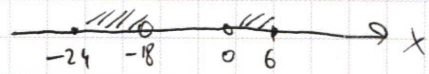
$\frac{t}{2} \le 1$, $t \le 2$

$\log_{12}(x^2+18x) \le 2$

$0 < x^2+18x \le 144$

$x^2+18x-144 \le 0$

$$\begin{cases} (x-6)(x+24) \le 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases}$$



Отв.: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

№6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta +$

$+ \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta)$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

~~$\sqrt5$ (... $\sin(2\alpha+4\beta)$)~~

$\sin 2\alpha = \overbrace{\underbrace{\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta}_{a}}^{a} - \frac{4}{5} = A$

~~$2\sin\alpha\cos\alpha = A$~~ $[-1;1]$

но $\sin 2\alpha \in [-1;1]$

~~$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\frac{A}{\cos^2\alpha} =$~~ $a \in [-\frac{1}{5};1]$

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin 2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha + \sin 2\alpha = 0$

1.1) $\alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \sin(2\beta) = \pm\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(4\beta) = \pm\frac{1}{5} \end{cases}$

при $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ это правда

$\operatorname{tg}\alpha = 0$ (т.к. по усл. он определён)

2) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = \underbrace{\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta}_{b} - \frac{4}{5} = B$

$b \in [-\frac{1}{5};1]$

1.2) $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$

$$tg\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{1 \pm \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin(4\alpha+4\beta)$

$\sin\alpha = \sin(4\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha+4\beta)$

$\sin x - \sin y = \cancel{\frac{1}{2}\cos x} = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) =$

$= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\sin(4\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha+4\beta) = 2\sin\alpha\cos(3\alpha+4\beta)$

$\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos(3\alpha+4\beta)$

$2\sin\alpha\left(\cos(3\alpha+4\beta) - \frac12\right) = 0$

1) $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{tg\alpha = 0}$

2) $\sin\alpha \neq 0$

$$\begin{cases} \cos(3\alpha+4\beta) = \frac12 \\ \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5} \end{cases}$$

$\cos(4\alpha+4\beta-\alpha) = \frac12$

$\sin^{-1}\frac45 \vee \frac{\sqrt3}{2}$

$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1}\frac45\right) = \frac45\cdot\frac12 - \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac35 = \frac{4-3\sqrt3}{10}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{100-16-27+24\sqrt3}{100}} = \sqrt{\frac{57+24\sqrt3}{100}} =$

$= \frac{1}{10}\sqrt3\sqrt{19+8\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{10}(4+\sqrt3) = \frac{3+4\sqrt3}{10}$

$tg\alpha = \frac{4-3\sqrt3}{3+4\sqrt3} = \frac{12+36-25\sqrt3}{9-48} = \frac{48-25\sqrt3}{-39} = \boxed{\frac{-16}{13} + \frac{25\sqrt3}{39}}$ (#)

(#) А теперь заметим, что при замене $\alpha \to \alpha+\pi$, $\beta \to \beta+\pi$ равенства не меняются.
Меняется только знак для $tg\alpha$

$$tg\alpha = \boxed{\frac{16}{13} - \frac{25\sqrt3}{39}}$$

2) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$

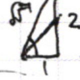
$\sin 2\alpha = -(\ldots + \ldots)$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin\alpha = -2\sin(3\alpha+4\beta)\cos\alpha$

$\cos\alpha \neq 0$, т.к. $tg\alpha \neq 0$

$tg\alpha = -2\sin(3\alpha+4\beta)$

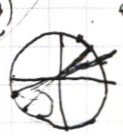


$-\frac{2}{\sqrt5} \le \sin\alpha \le \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$

381

$(4+\sqrt3)^2$



$\sin\alpha$

$tg\alpha = -2\sin\left(\sin^{-1}\frac45 - \alpha\right)$
$= 2\sin\left(\alpha - \sin^{-1}\frac45\right)$

$tg\alpha$ Но тут к сожалению нет реш.

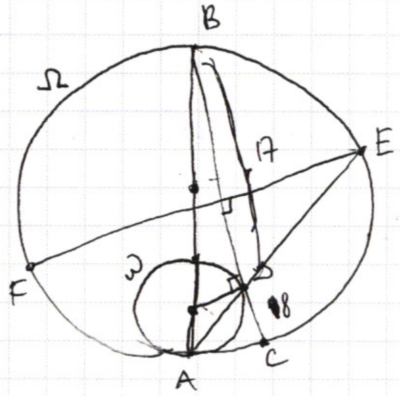
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



r, R -?

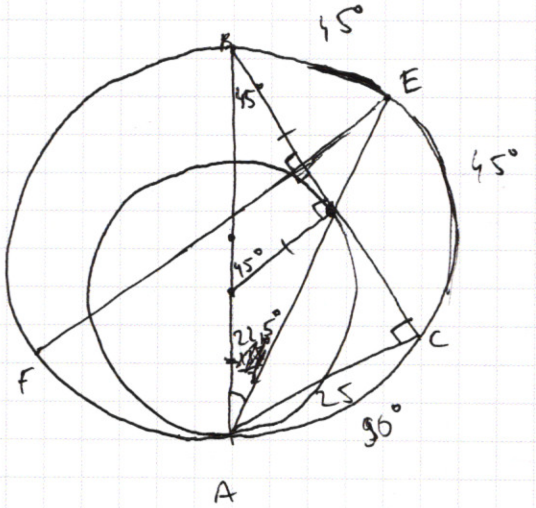
$A\hat{F}E$ -? S_{AEF} -?

$2(R-r)\cdot 2R = 4R(R-r) = 17^2 =$

$= (2R-r)^2 - 17^2$

$4R^2 - 4Rr = 4R^2 - 4Rr + r^2 - 17^2$

$r = 17$



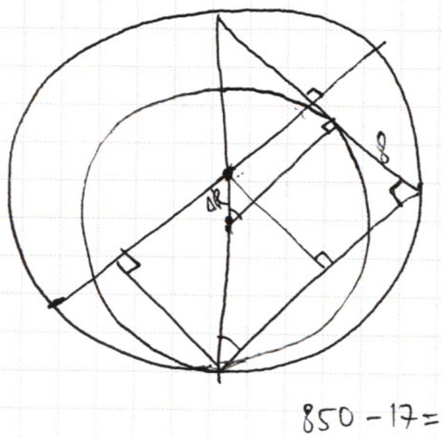
$2R - r = 17\sqrt{2}$

$R = 17\,\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$R - r = 17\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2} = \Delta r$

$A\hat{F}E = \frac{\overset{\frown}{AE}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ$

$\Delta h = \Delta R \sin 45 = 17\,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 17\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{4}$



$h = 8 + \Delta h = \frac{32+34-17\sqrt{2}}{4} = \frac{66-17\sqrt{2}}{4}$

$S = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{66-17\sqrt{2}}{4}\cdot\cancel{2}\cdot 17\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{2} =$

$= \frac{17}{8}\left(66 - 34 + 66\sqrt{2} - 17\sqrt{2}\right) =$

$= \frac{17}{8}\left(32 + 49\sqrt{2}\right) = 17\cdot\overset{68}{4} + \frac{17\cdot 49\sqrt{2}}{8}$

$850 - 17 = 833$

$\boxed{68 + \frac{833\sqrt{2}}{8}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 5.

$f(a_1 a_2 \dots a_{n+1}) = f(a_1) + \dots$

$f(a_1 \dots) = f(a_1 \dots a_n) + f(a_{n+1}) = f(a_1) + \dots$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = \sum f(a_i) + \sum f\left(\frac{1}{b_i}\right)$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow$ ~~сил отн~~ обр. чис

$f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$\cancel{f\left(\frac{a}{b}\right) = \sum}$

$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = \sum f(a_i) - \sum f(b_i) = \sum \left[\frac{a_i}{4}\right] - \sum \left[\frac{b_i}{4}\right]$

$\exists\, x \in \mathbb{P}$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
f(x)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

кол-во подх. 0

$f(1) = 0$

2
3
4
6
8
9

13 не „0"   11 „0"

„0" → не „0"   11 · 13

7 „1" | 2 „2" | 1 „3" | 2 „4" | 1 „5"

x

$11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 =$

$= 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = \boxed{198}$

$\frac{1,1}{2 \cdot 1}$ ... $\frac{12,12}{2 \cdot 12}$

$\frac{1}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

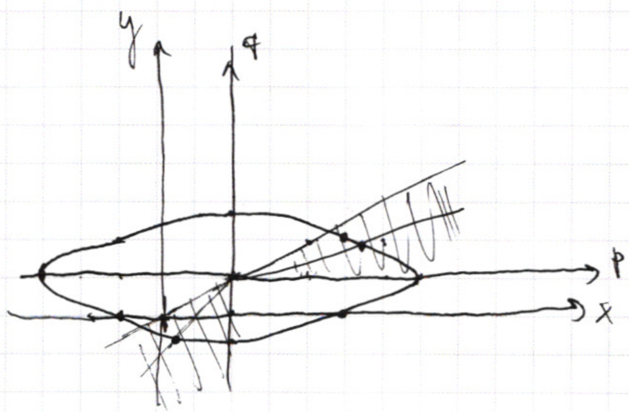
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$\frac{x}{2}\geq y$

$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=1$$

$(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$p \qquad q$



$p-2q=\sqrt{pq}$

$\frac{p^2}{5^2}+\frac{q^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=1$

$q\leq\frac{p}{2}$

1) $\sqrt{p}=p_1 \qquad \sqrt{q}=q_1$

$p_1^2-p_1q_1-2q_1^2=0$

$\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2-\frac{p_1}{q_1}-2=0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{p_1}{q_1}=2 \\ \frac{p_1}{q_1}=-1 \end{array}\right.$$

$p_1=2q_1$

$p_1^2=4q_1^2 \qquad p=4q \qquad q\leq 2q$

$q>0$

2) $\sqrt{-p}=p_1$

$-p_1^2+2q_1^2-p_1q_1=0$

$\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2+(\ )-2=0$

-2

$p_1=q_1 \qquad p=q$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}}$$

$\frac{q^2}{5^2}(4^2+3^2)=1 \Rightarrow q=1$

$p=4 \Rightarrow \begin{array}{l} x=6 \\ y=2 \end{array}$

$q=-\frac{5}{\sqrt{10}}=-\sqrt{\frac{5}{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

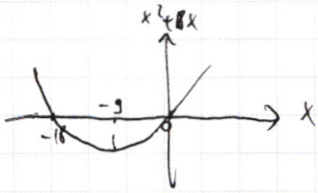
(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{15} + \cancel{144}\ 12^3 < 13^3$

$125 < (144 + \dots)$

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$



$\cancel{x>0}$ $\cancel{x \geq}$ $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$

$(a+b)^x \geq a^x + b^x + x a b$

$\cancel{x>0}$

$5^{\overbrace{\log_{12}(x^2+18x)}^{t}} + (x^2+18x) \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13}$

$12^t = x^2+18x$

$(5^2)^{\frac{t}{2}} + (12^2)^{\frac{t}{2}} \geq 13^t = (5^2+12^2)^{\frac{t}{2}}$

$t = 2$ ✓

$t \leq 0$

$\underbrace{5^t \ln 5 + 12^t \ln 12}_{\ln 60} - 13^t \ln 13 = 0$

$a^x + b^x \geq (a+b)^x$

$f(a) + f(b) = f(a+b)$

$f(y) = y^x$ $\quad f(y) = k y^1$

$x=1$ $\quad k=1$

$\cancel{\frac{f(a)+f(b)}{2}}$ $\quad a^x \ln a + b^x \ln b - (a+b)^x \ln(a+b) = 0$

$x \leq 1$ $\quad \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{a+b}{2}$

$t \leq 2$

$a^x + b^x \geq \frac{(a+b)^x}{2^{x-1}}$

$\log_{12}(x^2+18x) \leq 2$

$0 < x^2+18x \leq 144$ $\quad x^2+18x-144=0$ $\quad (x+24)(x-6) \leq 0$