МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{8}{17} \end{cases}$

Подставим $\sin(2\alpha+2\beta)$ из 1 во 2 уравнение:

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{4\sqrt{17}}{17}=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{16\cdot 17}{17^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~Пусть 1) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$~~ Разберём случаи: 1) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

Тогда из первого уравнения:

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\quad|\cdot\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\cancel{-\frac{1}{\sqrt{17}}}-1$

$8\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$2\cos^2\alpha+8\sin\alpha\cos\alpha=0$

$\cos\alpha(\cos\alpha+4\sin\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha=0 \text{ — тангенс не определен} \\ \cos\alpha=-4\sin\alpha \Rightarrow tg\alpha=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\quad|\cdot\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$

$8\sin\alpha\cos\alpha\ \cancel{-\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha=-\sin^2\alpha\ \cancel{-\cos^2\alpha}$

$2\sin^2\alpha+8\sin\alpha\cos\alpha=0$

$\sin\alpha(\sin\alpha+4\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha=0 \Rightarrow tg\alpha=0 \\ \sin\alpha=-4\cos\alpha \Rightarrow tg\alpha=-4 \end{array}\right.$

Ответ: $-4;\ -\frac{1}{4};\ 0.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\cdot\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{7\sqrt{145}}{29} =$ ~~$2\sin^2 - 1$~~ $2\sin^2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\begin{cases} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$

~~$\sin^2\beta =$~~

$8\frac{(29\cdot 4\sqrt{145})(58-\sqrt{145})}{29^2} =$ $\sin^2\beta = \frac{1-\frac{4\sqrt{17}}{17}}{2} = \frac{17-4\sqrt{17}}{34}$

$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$

$= \frac{29\cdot 58 - 29\sqrt{145} - 29 2^3\sqrt{145} + 29\cdot 5\cdot 4}{29^2} =$

~~$2\alpha+2\beta$~~ $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$= \frac{58-\sqrt{145}-8\sqrt{145}+20}{29}$

$\sin 2\alpha\,\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$= \frac{78-9\sqrt{145}-58+8\sqrt{145}-58+\sqrt{145}+...}{29}$

$2\sin^2\alpha - 8\sin\alpha\cos\alpha = 0$

~~$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$~~

$=$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \quad \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 4\cos\alpha \Rightarrow \end{array}\right.$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 4$

$\begin{cases} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1 \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha =$

$\cos 2\alpha = 1 - 4\sin 2\alpha$

$\sin^2 2\alpha + (1-4\sin 2\alpha)^2 = 1$

$\sin^2 2\alpha + \cancel{1} - 8\sin 2\alpha + 16\sin^2 2\alpha = \cancel{1}$

$17\sin^2 2\alpha - 8\sin 2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$

~~1)~~ Преобразуем (1) уравнение:

Учитывая, что $3y-2x \geq 0$:

$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$

$(3y-2x)^2 = x(3y-2)-(3y-2)$

$(3y-2x)^2 = (x-1)(3y-2)$

Преобразуем (2) ур-ие

~~Домножим его на 3.~~ Домножим его на 3

$9x^2-18x+9y^2-12y=12$

$9(x-1)^2+(3y-2)^2=12+13$

$9(x-1)^2+(3y-2)^2=25$

Пусть $x-1=a$, $3y-2=b$, тогда $(3y-2x)=b-2a$

$\begin{cases} 9a^2+b^2=25 \\ (b-2a)^2=ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2+b^2=25 \\ b^2-4ab+4a^2=ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2+b^2=25 \\ b^2-5ab+4a^2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 9a^2+b^2=25 \\ (b-a)(b-4a)=0 \end{cases}$

Из 2 ур-ия получим

$\left[\begin{array}{l} b-a=0 \\ b-4a=0 \end{array}\right.$

1) $b-a=0 \Rightarrow b=a$

$9a^2+a^2=25$

~~$a=\frac{\sqrt{5}}{2}$~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

~~$a^2=\frac{25}{10}$~~

~~$a^2=\frac{5}{2}$~~

~~$a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$~~

~~$\begin{cases} a=\frac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ b=\frac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases}$ или $\{$~~

$a^2=\frac{25}{10}$

$a^2=\frac{5}{2}$

$a=\pm\frac{\sqrt5}{\sqrt2}$

$\begin{cases} a=\frac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ b=\frac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases}$ или $\begin{cases} a=-\frac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ b=-\frac{\sqrt5}{2} \end{cases}$

Подставим в $a=x-1$, $b=3y-2$

$\begin{cases} x-1=\frac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ 3y-2=\frac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1=-\frac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ 3y-2=-\frac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{\sqrt2+\sqrt5}{\sqrt2}=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{\sqrt5+2\sqrt2}{3\sqrt2}=\frac{\sqrt{10}+4}{6} \end{cases}$ ~~— не подх., т.к. $3y-2x\geq0$~~

$\begin{cases} x=\frac{\sqrt2-\sqrt5}{\sqrt2}=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2\sqrt2-\sqrt5}{3\sqrt2}=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases}$

Первая пара не подходит, т.к. $3y-2x\geq0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases}$

2) $\begin{cases} a=4b \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases}$

~~$9a^2+16a^2=25$~~

~~$25a^2=25$~~

~~$a^2=1$~~

~~$a=\pm1$~~

~~$\begin{cases} a=1 \\ b=\frac14 \end{cases}$ или $\begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac14 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} x-1=1 \\ 3y-2=\frac14 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1=-1 \\ 3y-2=-\frac14 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} x=2 \\ y=\frac34 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{7}{12} \end{cases}$~~

$16\cdot9b^2+b^2=25$

$145b^2=25$

$b^2=\frac{5}{29}$

$b=\pm\sqrt{\frac{5}{29}}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a=4\sqrt{\frac{5}{29}} \\ b=\sqrt{\frac{5}{29}} \end{cases}$ или $\begin{cases} a=-4\sqrt{\frac{5}{29}} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{29}} \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=4\sqrt{\frac{5}{29}} \\ 3y-2=\sqrt{\frac{5}{29}} \end{cases}$ $\begin{cases} x-1=-4\sqrt{\frac{5}{29}} \\ 3y-2=-\sqrt{\frac{5}{29}} \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{29}+4\sqrt5}{\sqrt{29}} \\ y=\frac{2\sqrt{29}+\sqrt5}{3\sqrt{29}} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{29}-4\sqrt5}{\sqrt{29}} \\ y=\frac{2\sqrt{29}-\sqrt5}{3\sqrt{29}} \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x = \dfrac{29+4\sqrt{145}}{29} \\ y = \dfrac{58+\sqrt{145}}{87} \end{cases}$ – неподх. т.к. ~~$3x-2y \geq 0$~~ $3y-2x \geq 0$

$\begin{cases} x = \dfrac{29-4\sqrt{145}}{29} \\ y = \dfrac{58-\sqrt{145}}{87} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{29-4\sqrt{145}}{29} \\ y = \dfrac{58-\sqrt{145}}{87} \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}; \dfrac{4-\sqrt{10}}{6}\right), \left(\dfrac{29-4\sqrt{145}}{29}; \dfrac{58-\sqrt{145}}{87}\right)$

№5. Подставим ~~а~~ $a=1$

Получим: $f(b) = f(1)+f(b)$

$f(1)=0$

Подставим $b=\frac{1}{a}$

$f(1) = f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1)-f(a) = -f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x)-f(y)$

т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, $f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(3)=0$

Тогда все числа вида ~~$3^n \, 2^m$~~ $f(3^n \cdot 2^m)$ будут равны также $\Rightarrow f(2), f(3), f(4), f(6), f(8), f(9), f(12), f(16), f(18), f(24), f(27) = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

~~f~~ $f(7)=1$

~~Все~~ Все числа вида $f(2^n \cdot 5^m)$ и $f(3^n \cdot 5^m)$, $f(2^n \cdot 7^m)$, $f(3^n \cdot 7^m)$ ~~будут~~ из уравнения $f(ab)=f(a)+f(b)$ тоже будут равны

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(5), f(15), f(10), f(20), f(7), f(14), f(21) = 1$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2.$

$f(26) = f(2) + f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

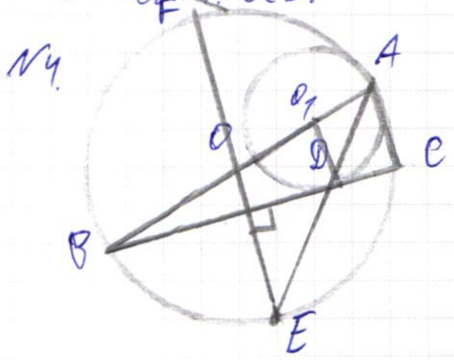
$f(23) = 5$

Тогда в пром. $[3;27]$ чисел равных 0 – 10, равных 1 – 7 чисел, равных 2 – 3 числа, равных 3 – 2 числа, равных 4 – 2 числа и равных 5 – 1 число. Для чисел равных 5 подобрать можно ~~26~~ 24 числа меньше, для чисел равных 4 – 22 числа, для ~~чисел~~ 3 – ~~17~~ 20 чисел, для 2 – 17 чисел, для 1 10 чисел. Тогда с учетом кол-ва ~~в~~ способов получения этих чисел всего пар:

$24 + 2\cdot22 + 2\cdot20 + 3\cdot17 + 7\cdot10 = 229$

Ответ: 229.

№4.



Решение: Пусть r – радиус мал. окр.

R – радиус больш. окр.

По св-ву касат. и секущ.

$BD^2 = 2R(2R - 2r)$ проведем O_1D и AC

$AC \perp BC$ (т.к. AB – диам), $O_1D \perp BC$ (касат)

$\Downarrow$

$AC \parallel O_1D \Rightarrow \triangle BO_1D \sim \triangle BAC$

$\frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{r}{AC} = \frac{13}{18}$

$AC = \frac{18r}{13}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда по т. Пифагора для $\triangle ABC$:

$$\begin{cases} 4R^2 = \frac{18^2 r^2}{13^2} + 81 \\ OD^2 = 4R^2 - 4Rr \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4R^2 = \frac{18^2 r}{13^2} + 81 \quad | \cdot 169 \\ \frac{169}{4} = 4R^2 - 4Rr \quad | \cdot 4 \cdot 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4R^2 \cdot 169 = 18^2 r^2 + 81 \cdot 169 \\ 169 \cdot 81 = \overset{16\cdot 81}{4R^2} - \overset{16\cdot 81}{4Rr} \end{cases} \quad (+)$$

$$\cancel{4R^2 \cdot 169 = 18^2 r^2 + 81 \cdot 169 + 4R^2 - 4Rr}$$

$$4R^2 \cdot 169 + \cancel{169 \cdot 81} = 18^2 r^2 + \cancel{81 \cdot 169} + 16 \cdot 81 R^2 - 16 \cdot 81 Rr \quad | : 4$$

$$\cancel{2R^2 =}$$

$$169 R^2 = 81 r^2 + \overset{4}{\cancel{16}} \cdot 81 R^2 - \overset{4}{\cancel{16}} \cdot 81 Rr$$

$$R^2 (\cancel{169}\ 4 \cdot 81 - 169) - 4 \cdot 81 Rr + 81 r^2 = 0$$

$$D = 4^2 \cdot 81^2 - 4 \cdot 81 (4 \cdot 81 - 169) =$$

$$= 4 \cdot 81 (4 \cdot 81 - 4 \cdot 81 + 169) = 169 \cdot 4 \cdot 81$$

$$\frac{R}{r} = \frac{4 \cdot 81 + \sqrt{169 \cdot 4 \cdot 81}}{2 \cdot (4 \cdot 81 - 169)} = \frac{558}{310} = \frac{9}{5}$$

$$r = \frac{5R}{9}$$

$$81 + \left(\frac{18 \cdot 5R}{9 \cdot 13}\right)^2 = 4R^2 \Rightarrow 81 + \frac{100 R^2}{169} = 4R^2$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$81 = \frac{4R^2 \cdot 169 - 100R^2}{169}$$

$$81 = \frac{576R^2}{169}$$

$$R^2 = \frac{169 \cdot \cancel{576}\ 81}{576}$$

$$\cancel{R = \frac{13 \cdot 9}{24} = \frac{117}{8}}$$

$$R = \frac{13 \cdot \cancel{9}3}{\cancel{24}8} = \frac{39}{8}$$

$$r = \frac{5R}{9} = \frac{5 \cdot \cancel{39}13}{3\cancel{9} \cdot 8} = \frac{65}{24}$$

* Проведем GD, тогда $\triangle BDG \sim \triangle BAD$ ($\angle DBG$ - общ, $\angle GDB = \angle GAD$)

$\Downarrow$

$$\frac{GD}{AD} = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{39}{4}} = \frac{\cancel{13}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}2}{\cancel{39}3} = \frac{2}{3}$$

$$tg\angle BAE = \frac{GD}{AD} = \frac{2}{3}$$

$\Downarrow$

$$ctg\angle ABE = \frac{2}{3}$$

$\Downarrow$

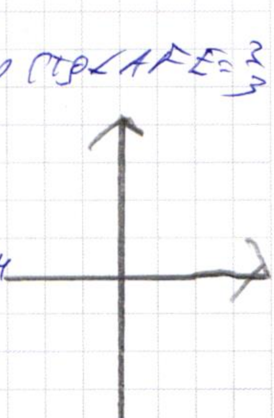
т. к. $\angle ABE$ и $\angle AFE$ опир. на 1 дугу, то $ctg\angle AFE = \frac{2}{3}$

$\Downarrow$

$$\angle AFE = arcctg\,\frac{2}{3}.$$

№6. $\begin{cases} ax+b \geq 8x^2-34x+30 \\ ax+b \leq \frac{4x-3}{2x-2} \end{cases}$

Изобразим $\frac{4x-3}{2x-2}$ и $8x^2-34x+30$ на коорд. пл-ти.



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6. $\begin{cases} ax+b \geq 8x^2-34x+30 \\ ax+b \leq \frac{4x-3}{2x-2} \end{cases}$

$k = \frac{4-\frac{3}{x}}{2x-2} = \frac{\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{2}{x}} = 0$

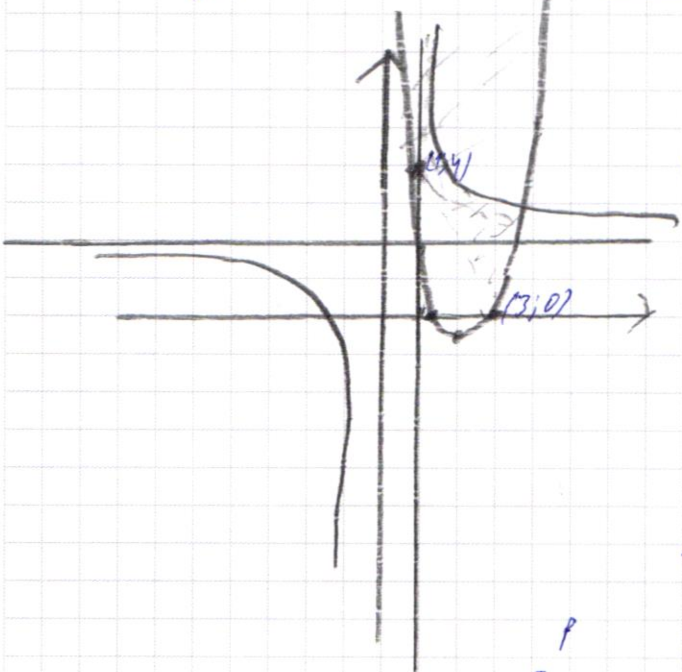
$\begin{cases} 8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0 \\ \frac{4x-3-(ax+b)(2x-2)}{2x-2} \geq 0 \end{cases}$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-kx) = 2$

$D = (34+a)^2 - 32(30-b)$

$x_{1,2} = \frac{34+a \pm \sqrt{(34+a)^2-32(30-b)}}{16}$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$



$\begin{cases} 4 = k+b \\ 0 = 3k+b \end{cases}$

$2k = -4$

$k = -2$

$b = 6$

$y = -2x+6$

$34^2 - 4\cdot 8\cdot 30 = 1156 - 960 = 196$

$x_1 = \frac{34+14}{16} = 3$

$x_2 = \frac{34-14}{16} = 1{,}25$

$-2x+6 = \frac{4x-3}{2x-2}$

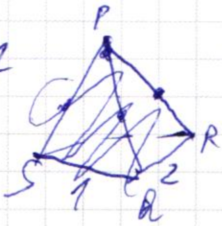
$(2x-2)(2x+6) = 3-4x$

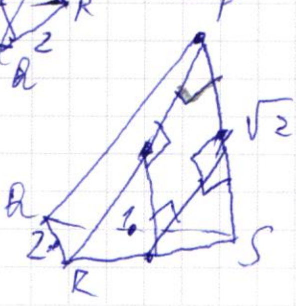
$4x^2+8x-12 = 3-4x$

$4x^2+12x-15 = 0$

$D = 384$

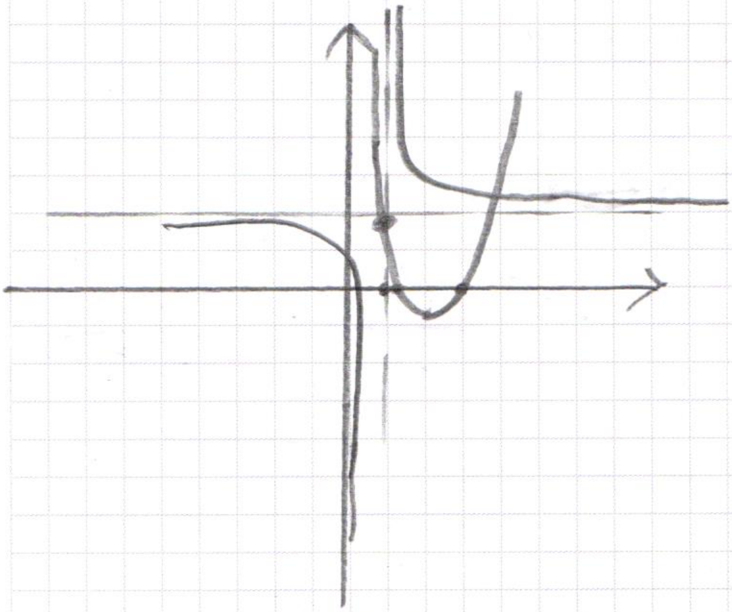
N7





☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5. $f(6), f(9), f(12), f(18), f(24), f(27)=0$

$f(8), f(4), f(16), \cancel{f} = 0$

$f(1)=0,\ f(2)=0$

~~f(3), f(15), f(~~ $f(3)=0,\ f(5)=1,\ f(7)=1,\ f(11)=3\ f(13)=3,\ f(17)=4\ f(19)=4\ f(24)=$

$= \cancel{45}, \cancel{f6}$ $\quad f(10)=0+1=1$

~~f(25)=~~ $\quad f(15)=1$

$f(20)=1$

$f(25)=2$

$f(14)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(26)=3$

$f(x)<f(4)$

для 4 26 чисел

для 3

$0 = \cancel{f(1), f(2)}, f(3), f(4), f(6), f(8), f(9), f(12), f(16), f(18), f(24), f(27)$ – 10 чисел

$1 = f(5), f(7), f(10), f(14), f(15), f(20), f(21), \cancel{f(2)}$ – 7 чисел

$2 = f(11), f(22), f(25)$ – 3 числа

$3 = f(13), f(26)$ – 2 числа

$4 = f(17), f(19)$ – 2 числа

$5 = f(23)$ – 1 число

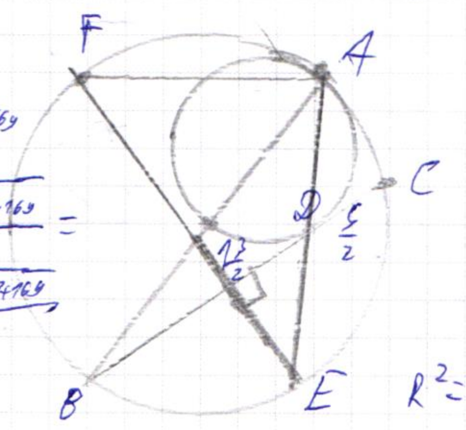
~~26 + 2 · 22 + 2 · 20 +~~

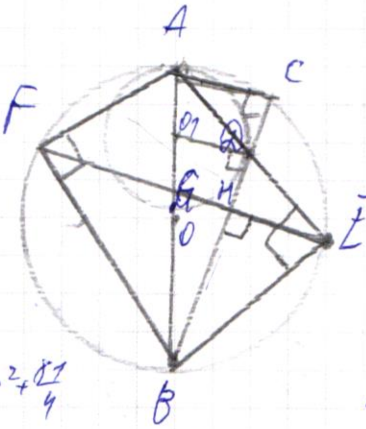
$\cancel{26}$. $24+2\cdot22+2\cdot20+3\cdot17+7\cdot10 = 24+44+40+51+70 = \underline{229}$

N4.

$D = 16r^2+4\cdot169$

$R = \dfrac{4r+\sqrt{16r^2+4\cdot169}}{8} = \dfrac{2r+\sqrt{4r^2+169}}{4}$





$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$BD^2 = BG\cdot AB$

$BD^2 = 2R(2R-2r)$

$BD\cdot CD = ED\cdot AD$

$r^2+BD^2 = BO_1^2$

~~$r^2+BD^2=(2R-r)^2$~~

$R^2 = \frac{81}{169}r^2+\frac{81}{4}$

~~$324r^2+117^2=(26R)^2$~~

$\begin{cases} \frac{324}{169}r^2+81=4R^2 \\ 4R^2-4Rr=\frac{169}{4} \end{cases}$

$BD^2 = 4R^2-4Rr$

$R = 9\sqrt{\frac{r^2}{169}+\frac{1}{4}}$

$AC = \frac{18r}{13}\ 4R^2$

$\frac{O_1D}{AC} = \frac{13}{2}\big/\frac{9}{\ }= \frac{13}{18}$

$\frac{169}{4} = 2R(2R-2r)$

$\begin{cases} 169 = 16R^2 - 16Rr \\ 81 + \left(\frac{18r}{13}\right)^2 = 4R^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 169 \cdot 81 = 16 \cdot 81R^2 - 16 \cdot 81Rr \\ 169 \cdot 81 + 324r^2 = 169 \cdot 4R^2 \end{cases}$

$324r^2 = 169 \cdot 4R^2 - 16 \cdot 81R^2 + 16 \cdot 81Rr$

$81r^2 = 169R^2 - 4 \cdot 81R^2 + 4 \cdot 81Rr$

$R^2(169 - 324) + 4 \cdot 81Rr - 81r^2 = 0$

$-155R^2 + 4 \cdot 81Rr - 81r^2 = 0$

$155R^2 - 4 \cdot 81Rr + 81r^2 = 0$

$D = 4^2 \cdot 81^2 - 4 \cdot 81 \cdot 155 = 4 \cdot 81(324 - 155) = 4 \cdot 81 \cdot 169$

$\sqrt{D} = 2 \cdot 9 \cdot 13$

$\frac{R}{r} = \frac{324 + 2 \cdot 9 \cdot 13}{310} = \frac{324 + 234}{310} = \frac{558}{310} = \frac{279}{155} = \frac{9}{5}$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 13 \\ \hline 54 \\ 18 \\ \hline 234 \end{array}$

$R = \frac{9}{5}r \Rightarrow r = \frac{5R}{9}$

$81 + \left(\frac{18 \cdot 5R}{9 \cdot 13}\right)^2 = 4R^2$

$81 + \frac{100R^2}{13^2} = 4R^2$

$81 = \frac{4R^2 \cdot 169 - 100R^2}{169}$

$\frac{576R^2}{169} = 81$

$\frac{24R}{13} = 81$

$R = \frac{13 \cdot 81}{24 \cdot 8} = \frac{117}{8}$

$r = \frac{5R}{9} = \frac{5 \cdot 117}{9 \cdot 8} = \frac{65}{8}$

~~$\triangle BDA \sim \triangle BAC$~~

$\triangle BGD \sim \triangle BDA$

$\cot \angle BAE = \frac{DA}{GD} = \frac{BA}{BD} = \frac{9}{\frac{13}{2}} = \frac{9}{2}$

~~$\angle AFE = \angle ABC$~~

$\operatorname{tg} \angle AFE = \frac{9}{2}$

$\angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{9}{2}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 4a^2+b^2=25 \\ b^2-4ab+4a^2=ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2+b^2=25 \\ b^2-5ab+4a^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2+b^2=25 \\ \cancel{(b+1)(\ (b+a)(b+4a))}\ (b-a)(b-4a)=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} b=a \\ b=4a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=3y-2 \\ \end{array}\right. \Rightarrow x-3y+1$

$3y-2=4x-4$

$3y-4x+2=0$

$(3y-2-x+1)(3y-2-4x+4)=0$

$(3y-x+1)\cdot(3y-4x+2)=0$

$(x-3y+1)(3y-4x+2)$ - из нуб.

$\dfrac{2\sqrt{29}+\sqrt5-2\sqrt{29}-8\sqrt5}{\sqrt{29}}=-\dfrac{7\sqrt5}{\sqrt{29}}$

$3\cdot\dfrac{\sqrt{29}+4\sqrt5}{\sqrt{29}}\cdot\dfrac{2\sqrt{29}+\sqrt5}{3\sqrt{29}}-$

$-\dfrac{2\sqrt{29}+4\sqrt5}{\sqrt{29}}-3\cdot\dfrac{2\sqrt{29}+\sqrt5}{3\sqrt{29}}=$

$=\dfrac{(29\cdot2+4\cdot5+8\sqrt{..}+t)-}{3\sqrt{29}}$

N 5. $f(ab)=f(a)+f(b) \Leftrightarrow$ по ф-ному ур-ию Коши ~~f(a)=log a~~

$f(x)=\log_a x$

$\log_a p=\left[\dfrac{p}{4}\right]$

$f(\frac{1}{b})=f(1)+f(\frac{1}{b})$

$\Downarrow$

$f(1)=0 \quad f(2)=f(2)+f(1)$ ~~$\Rightarrow f$~~

$f(7)=1$

$\log_a 7=1$

$a=7$

$f(5)=1$

$f(11)=2,$

~~f(n)=f~~ $\quad f(1)=f(2)+f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2})=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(\frac{3}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$3=3\cdot1$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$\Downarrow$

~~ff~~ ~~все~~ если число: 2

то $f(n)=f(\frac{n}{2})$

$f(13)=1$

$f(16)=0$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=$ ~~f(x)+~~ $f(x)-f(y)$

$\Downarrow$

$f(x) < f(y)$

$f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x})=-f(x)$

Мак. число, кот. может получиться

$f(3)=0,\quad f(5), f(7)=1,\ f(11)=2,\ f(13)=1\ 3,\ f(17)=4, f(19)=4, f(23)=5$

~~f(6)=~~ Все числа вида $3^n\cdot2^n$ 0 $\Rightarrow f(6,9,13,\ 18,\ 24,\ 27)=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$3y-2x=\frac{\sqrt{10}+4}{2}\cancel{x}-2-\sqrt{10}=$

$=\frac{-\sqrt{10}}{2}$

Учитывая, что $3y-2x\geq 0$ возведем обе части 1 урав

$\begin{cases} 9y^2-\cancel{6}12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$\frac{18+6\sqrt{10}}{4}-2-\sqrt{10}-\frac{\sqrt{10}+4}{2}+2$

$=\frac{18+6\sqrt{10}-8-4\sqrt{10}-2\sqrt{10}-8+8}{4}=$

$=$

$\begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$\cancel{18y^2\ \ y}\ 18y^2-30xy+8x^2+4x+6y=3x^2+3y^2-6x-4y$

$\cancel{15y^2-30xy+5x^2+2x-2y=0}$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}=$

$\cancel{*}\ 15y^2-30xy+5x^2+10x+10y=0$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\sqrt{10}\ \frac{4-\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}=$

$=$

$3(x^2-2x+1)+3y^2$

$(3(x-1)+3y-2)^2=\cancel{9y^2-12xy+4x^2=x(3y-2)-(3y-2)}$

$=25+12(3y-2x)^2\ \cancel{3y\ 9y^2-12xy+4x^2}=(3y-2x)^2=x(3y-2)-(3y-2)$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)\Leftrightarrow\begin{cases} y\geq\frac{2}{3} \\ x\geq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y\leq\frac{2}{3} \\ x\leq 1 \end{cases}$

$\cancel{x^2}\ \cancel{(x-3)^2+2x^2+2y^2+}$

$3(x^2-2x+1)+\frac{1}{3}(9y^2-12y+4)=8\frac{1}{3}$

$\begin{cases} 9a^2+b^2=25\ \cancel{3(x-1)^2+} \\ (b-2a)^2=ab \end{cases}$

$\begin{cases} 9(x-1)^2+(3y-2)^2=25 \\ (3y-2x)^2=(3y-2)(x-1) \end{cases}$

$\cancel{3y-2=a},\ 2x-2=b\ \Rightarrow\ \cancel{x-1=}\frac{b}{2}\ x-1=a,\ 3y-2=b$