



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 12$ ,  $BD = 13$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $4 \leq x \leq 28$ ,  $4 \leq y \leq 28$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

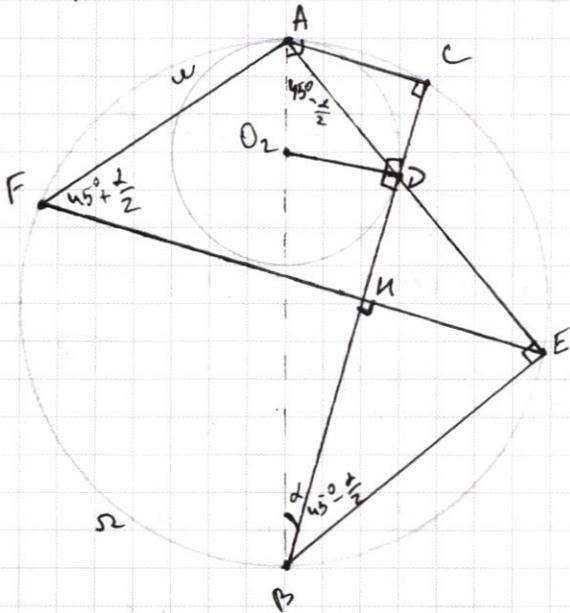
выполнено для всех  $x$  на промежутке  $(\frac{2}{3}; 2]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $TXYZ$ , вершина  $Y$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $TU$ . Известно, что  $XY = \sqrt{3}$ ,  $TX = \sqrt{2}$ ,  $TZ = 2$ . Найдите длину ребра  $XZ$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4  $CD=12$   $BD=13$   $CB \perp FE$



$\angle O_2DB = 90^\circ$ , т.к. BC - касательная к  $\omega$  окружн.

$\angle ACB = 90^\circ$ , т.к. угол опирающийся на диаметр BA

$$BA = 2R \quad BO_2 = 2R - r$$

Пусть  $\angle ABC = \alpha$

т.е.  $\triangle O_2DB$   $\cos \alpha = \frac{DB}{BO_2}$

т.е.  $\triangle ACB$   $\cos \alpha = \frac{BC}{AB}$

$$\frac{DB}{BO_2} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{13}{2R-r} = \frac{25}{2R}$$

$$26R = 50R - 25r$$

$$25r = 24R$$

$$R = \frac{25}{24}r$$

т.е.  $\triangle ACB$

$$BC = AB \cdot \cos \alpha \Rightarrow 2R = \frac{BC}{\cos \alpha}$$

т.е.  $\triangle O_2DB$

$$O_2D = r = \sin \alpha \cdot BO_2$$

$$r = \sin \alpha \cdot (2R - r) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{r}{2R - r} = \frac{r}{2 \cdot \frac{25}{24}r - r} = \frac{12}{13}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}$$

$$R = \frac{BC}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{25^5}{2 \cdot \frac{5}{13}} = \frac{5 \cdot 13}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$$

$$r = \frac{24}{25}R = \frac{24 \cdot 12}{25 \cdot 5} = \frac{65^3}{8} = \frac{12 \cdot 13}{5} = 31,2$$

$\triangle O_2DB$   $\angle BO_2D = 180^\circ - \angle O_2DB - \angle O_2BD = 90^\circ - \alpha$

$\triangle AO_2D$  р/б  $AO_2 = O_2D = r \Rightarrow$  углы при основании равны

$$\angle O_2 A D + \angle O_2 D A = \angle B O_2 D$$

$$\text{"}\downarrow\text{"} \quad \angle O_2 A D = \frac{\angle B O_2 D}{2} = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Проведем  $BE$ , т.к.  $AB$ -диаметр

$$\angle BEA = 90^\circ$$

$\triangle EBA$

$$\angle ABE = 180^\circ - \angle BEA - \angle BAE = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

$\begin{matrix} \text{"}90^\circ\text{"} & \text{"}45^\circ - \frac{\alpha}{2}\text{"} \end{matrix}$

$\angle AFE = \angle ABE$  т.к. они опираются на одну дугу окружности

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \underbrace{\cos 90^\circ}_{=0} \cdot \cos \alpha - \sin 90^\circ \cdot \sin \alpha = -\sin \alpha$$

$$\frac{1 + \cos(90^\circ + \alpha)}{2} = \frac{1 - \sin \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{12}{13}}{2} = \frac{13 - 12}{2 \cdot 13} = \frac{1}{26}$$

из тригонометрии знаем, что

$$\cos^2\left(\frac{90^\circ + \alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(90^\circ + \alpha)}{2} = \frac{1}{26}$$

$$\cos\left(\frac{90^\circ + \alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{26}} = \cos \angle AFE$$

$$\angle AFE = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}}$$

~~$\triangle AFE$~~   $\triangle BHE$   $\angle HEB = 180^\circ - \angle BHE - \angle HBE = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$

$\begin{matrix} \text{"}90^\circ\text{"} & \text{"}45^\circ - \frac{\alpha}{2}\text{"} \end{matrix}$

$$\angle HEA = 90^\circ - \angle HEB = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$\triangle AFE$   $\angle FAE = 180^\circ - \angle AFE - \angle AEF = 90^\circ$

$$FE = 2R$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Delta AEF \quad AE = 8\sqrt{11} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot FE$$

$$FA = \cos \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot FE$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta AEF} &= \frac{1}{2} AE \cdot FA = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{11} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot R \cdot 2R \cdot \cos \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 8\sqrt{11} (90^\circ + \alpha) \cdot R^2 = \cos \alpha \cdot R^2 = \frac{5}{13} R^2 \end{aligned}$$

$$8\sqrt{11} (90^\circ + \alpha) = 8\sqrt{11} 90^\circ \cdot \cos \alpha + \cos 90^\circ \cdot 8\sqrt{11} \alpha = \cos \alpha$$

$$S_{\Delta AEF} = \frac{5}{13} \cdot \frac{65^2 \cdot 5}{2^2} = \frac{1625}{4}$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 25 \\ \hline 325 \\ + 130 \\ \hline 1625 \end{array}$$

Ответ:  $R = 32,5 \quad r = 31,2$

$$S_{\Delta AEF} = \frac{1625}{4}$$

$$\angle AFE = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}}$$

№ 2

$$xy - 6x - y + 6 = x(y-6) - (y-6) = (x-1)(y-6)$$

$$y - 6x = y - 6 - 6 \cdot (x-1)$$

$$9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 9(x-1)^2 + (y-6)^2 - 45$$

пусть  $y-6 = u$

$x-1 = v$

$$\begin{cases} u - 6v = \sqrt{4v} \\ 9v^2 + u^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u-6v)^2 = 4v \\ u-6v \geq 0 \\ 9v^2 + u^2 = 90 \end{cases}$$

$$u \geq 6v$$

$$(u-6v)^2 = uv$$

$$u^2 - 13uv + 36v^2 = 0$$

$$u = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{9v}{4v}$$

Т.к.  $u \geq 6v$

← не подходит

$$u = 9v$$

$$\begin{cases} u = 9v \\ 9v^2 + u^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 9v \\ 9v^2 + 81v^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 9v \\ v = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u = \pm 9$$

$$v = \pm 1$$

$$\begin{cases} y-6 = \pm 9 \\ x-1 = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 15 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = -3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Ответ:  $(0; -3)$   $(2; 15)$

№ 3

по ОДЗ  $26x - x^2 > 0 \Rightarrow |x^2 - 26x| = 26x - x^2$

$$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5 (26x - x^2)}$$

пусть  $y = 26x - x^2$   $y > 0$

$$y^{\log_5 12} + y^{\log_5 5} \geq 13^{\log_5 y}$$

$$| y = y^{\log_5 5}$$

$$12^{\log_5 y} + 5^{\log_5 y} \geq 13^{\log_5 y}$$

$$12^a + 5^a \geq 13^a$$

пусть  $a = \log_5 y$

(рез-т: тоже мон. возр. функции)

Т.к. слева сумма монотонно возраст-  
ающих функций;  $\Rightarrow$  пересечение только в  
А справа тоже монотонно одной точке  
возраст функции

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \leq 2$  (при  $a=2$  будет равенство)

$$\log_5 y \leq 2$$

$$\log_5 y \leq \log_5 25 \quad \Rightarrow \quad 0 < y \leq 25$$

$$0 < 26x - x^2 \leq 25$$

$$\begin{cases} 0 < 26x - x^2 \\ 26x - x^2 - 25 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(26-x) > 0 \\ -(x-25)(x-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 25}}{-2} = 1$$

Ⓘ

пересечем

ⓗ

Ответ:  $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

N 1

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \cdot \underbrace{\sin(2\alpha + 2\beta)}_{= \frac{1}{\sqrt{17}}} \cdot \cos 2\beta$$

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\beta = \frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{\pm 4}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{\pm 4}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \pm 4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -1$$

$$1) \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 8 \sin^2 \alpha - 5 \quad \sin 2\alpha > 0$$

$$2 \sin \alpha \cdot (\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) = 8 \sin^2 \alpha - 5$$

$$4 \sin^2 \alpha - 4 \sin^4 \alpha = 64 \sin^4 \alpha + 25 - 80 \sin^2 \alpha$$

$$68 \sin^4 \alpha - 84 \sin^2 \alpha + 25 = 0$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{84 \pm \sqrt{84^2 - 68 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 68} = \frac{25}{34}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{25}{34}}; \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \sin \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{34}}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{34}}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \in \left\{ \frac{5}{3}; \frac{-5}{3}; 1; -1 \right\}$$

$$2) \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 3 - 8 \sin^2 \alpha \quad \sin 2\alpha < 0$$

↓ Аналогично

$$68 \sin^4 \alpha - 52 \sin^2 \alpha + 9 = 0$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4 \cdot 68 \cdot 9}}{2 \cdot 68} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \in \left\{ \frac{3}{5}; \frac{-3}{5}; +1; -1 \right\}$$

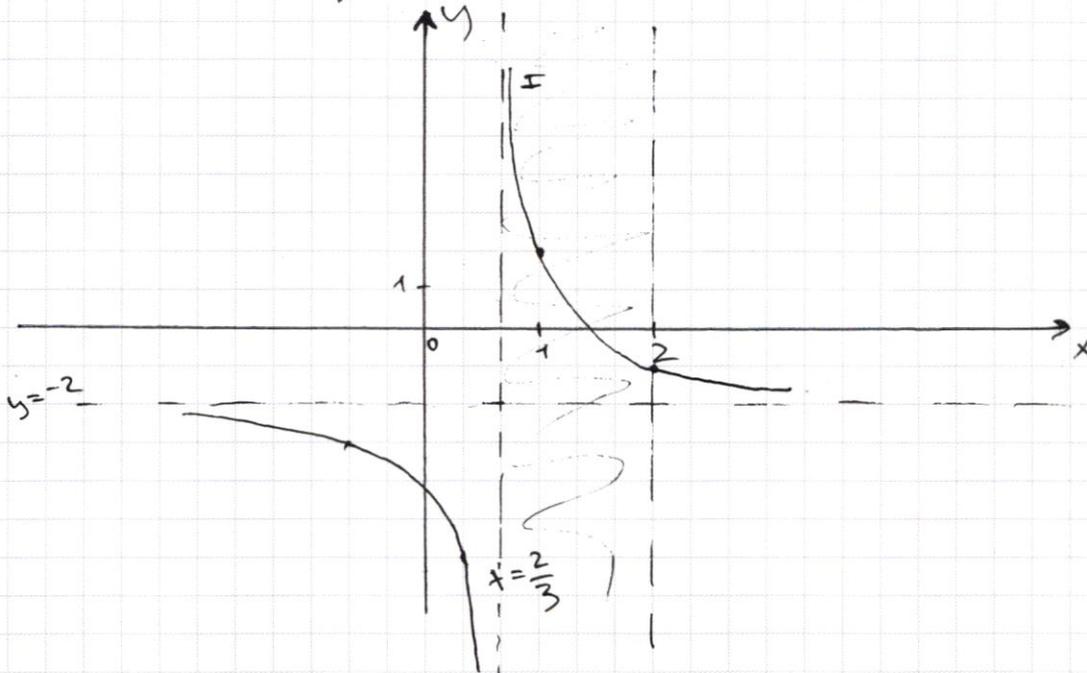
$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \alpha \in \left\{ -1; +1; \frac{3}{5}; \frac{-3}{5}; \frac{5}{3}; \frac{-5}{3} \right\}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N 6 \quad \frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$$

I  $y = -2 + \frac{4}{3x-2}$  построим на графике  
 $x_{\text{крит}} = \frac{2}{3}$   $y_{\text{крит}} = -2$

II  $y = ax + b$  прямая на графике



Мы рассматриваем промежутки  $(\frac{2}{3}; 2]$   
 если  $b \leq -1$ , то пересечение прямой  
 в промежутке  $(\frac{2}{3}; 2)$  не МБ, только  
 касание в точке 2

$$-1 = a \cdot 2 + b$$

$$b \leq -1$$

$$a = \frac{-1-b}{2}$$

⇓

$$\begin{aligned} -b &\geq 1 \\ -1-b &\geq b \end{aligned}$$



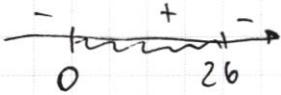
черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$26x - x^2 > 0$$

$$x(26 - x) > 0$$



$$x \in (0; 26)$$

$$x \in [ -1; 25 ]$$

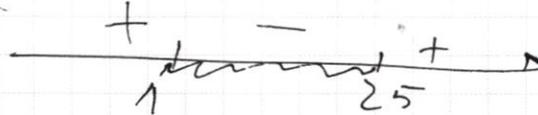
$$-x^2 + 26x - 25 \leq 0$$

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 25}}{-2}$$

$$-x^2 + 25x + x - 25 \leq 0$$

$$-x(x - 25) + (x - 25) \leq 0$$

$$(x - 25)(1 - x) \leq 0$$



$$\begin{array}{r} 26 \\ \wedge 26 \\ +156 \\ \hline 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$576$$

N6

$$-6x+4$$

$$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-6x+8}{3x-2} = \frac{-2 \cdot (3x-2) + 4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$$

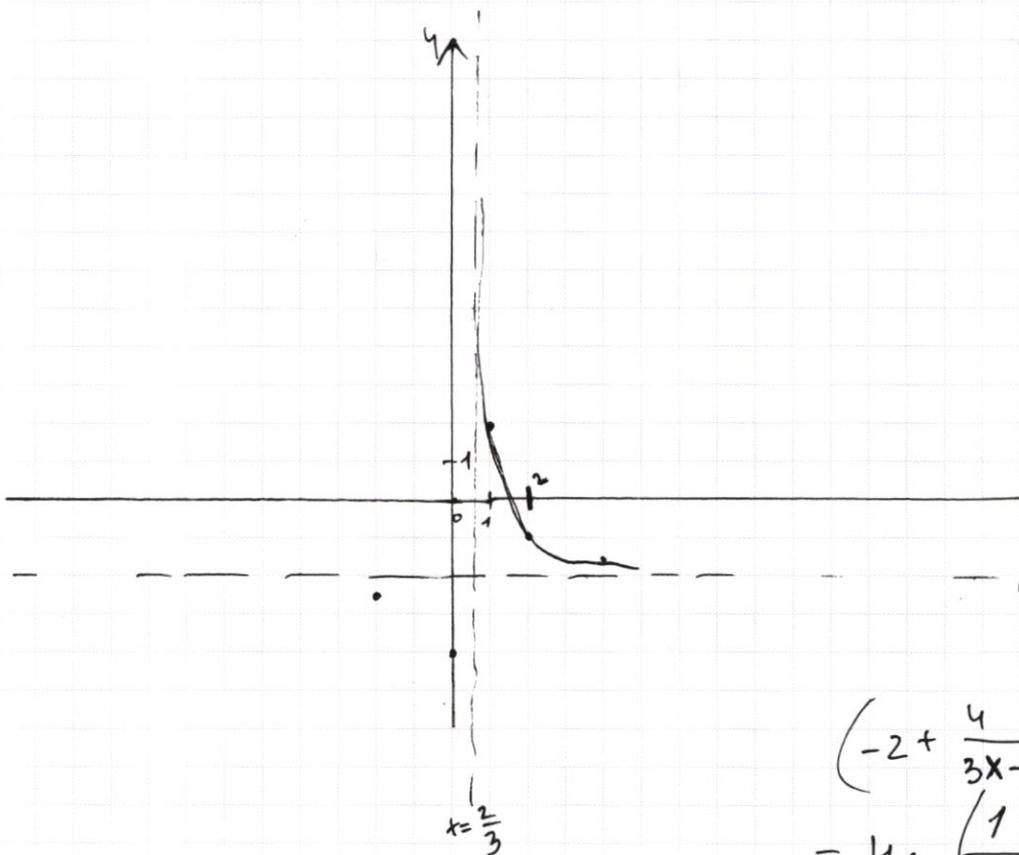
$$-2 + \frac{4}{3x-2} \geq ax+6 \geq 18x^2-51x+28$$

$$\frac{51 \pm \sqrt{51^2 - 4 \cdot 28 \cdot 18}}{2 \cdot 18}$$

$$\begin{aligned} 18 \left( x^2 - \frac{51}{18}x \right) + 28 &= \\ = 18 \cdot \left( x^2 - \frac{51}{18}x + \left( \frac{51}{36} \right)^2 - \left( \frac{51}{36} \right)^2 \right) + 28 &= \\ = 18 \cdot \left( x - \frac{51}{36} \right)^2 + 28 - \frac{51}{72} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 51 \\ \hline + 151 \\ 255 \\ \hline 2601 \\ 3 \\ \times 28 \\ \times 4 \\ \hline 112 \\ \times 112 \\ \times 18 \\ \hline 8196 \\ + 112 \\ \hline 9016 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \frac{51}{18 \cdot 2} &= \frac{51}{36} \\ \frac{51^2}{36^2} \cdot 18 &= \frac{51}{36 \cdot 2} \\ &= \frac{51}{72} \end{aligned}$$



$$\frac{4}{3x-2}$$

крит. точка

$$\begin{aligned} \left( -2 + \frac{4}{3x-2} \right)' &= \\ = 4 \cdot \frac{1}{(3x-2)^2} &= \\ \text{при } x=2 & \quad b-2=4 \\ \frac{-12^3}{4^2 \cdot 4} &= -0,75 \end{aligned}$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot \frac{3}{(3x-2)^2} = \frac{-12}{(3x-2)^2}$$

$$\begin{aligned} a \geq -0,75 & \quad \text{или касание в точке 2} \\ a \cdot 2 + b = -1 & \\ b = -1 - 2a & \\ a \geq -0,75 & \quad b \leq 0,5 \\ -2a \leq 1,5 & \\ -1 - 2a \leq 0,5 & \end{aligned}$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x^2 - 26x| \log_5^{12} + 26x \geq x^2 + 13 \log_5(26x - x^2)$$

~~$x^2 \geq 2$~~  но отсюда  $26x - x^2 > 0$

~~$x^2 \geq 2$~~   $-(x^2 - 26x)$

$$(26x - x^2) \log_5^{12} + 26x \geq x^2 + 13 \log_5(26x - x^2)$$

$$26x - x^2 = y$$

$$y > 0$$

$$y \log_5^{12} + y \geq 13 \log_5 y$$

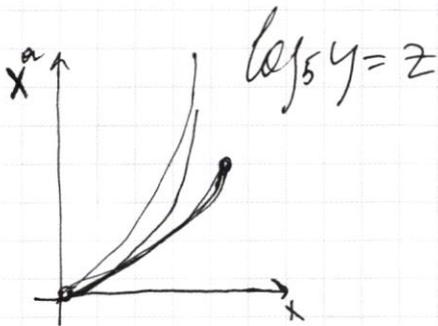
$$a \log_b c = c \log_b a$$

$$y \log_5^{12} + y \geq \log_5 y \log_5^{13}$$

$$y \log_5 5$$

$$y \log_5^{12} + y \log_5 5 \geq y \log_5^{13}$$

$$12 \log_5 y + 5 \log_5 y \geq 13 \log_5 y$$



$$12^z + 5^z \geq 13^z$$

$$12^a + 5^a \geq 13^a$$

$$a \leq 2$$

$$\sqrt{12} + \sqrt{5} \leq \sqrt{13}$$

$$17 + 2\sqrt{12 \cdot 5} > 13$$

$$z \leq 2$$

$$\log_5 y \leq 2$$

$$\log_5 y \leq \log_5 25$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 12 \\ \hline 24 \\ 144 \\ \hline \times 12 \\ 144 \\ \hline 1853 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^2 \\ 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1288 \\ 124 \\ \hline 1728 \\ 125 \\ \hline 1853 \end{array}$$

$$0 < y \leq 25$$

$$0 < 26x - x^2 \leq 25$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{13}$$

$$\frac{17}{60} \leq \frac{1}{13}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$576$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ 288 \\ 144 \\ \hline 676 \end{array}$$

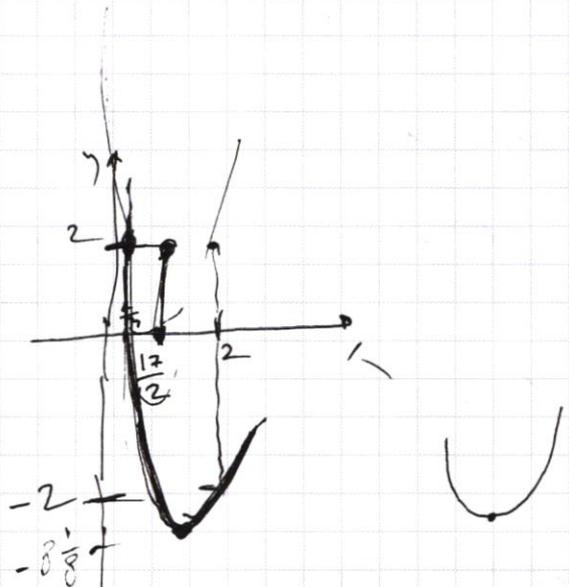
$$\begin{array}{r} 576 \mid 2 \\ 288 \mid 2 \quad 24 \\ 144 \mid 12^2 \end{array}$$

или нет касания в точке 2  
любое касание это шлох

$$18 \cdot \frac{4}{8} - 51 \cdot \frac{2}{7} + 28 = 8 + 28 - 34 = 2$$

$$18 \cdot \frac{72}{4} - 51 \cdot 2 + 28 = -2$$

$$\frac{51 \cdot 17}{2 \cdot 186} = \frac{17}{12}$$



$$y = ax + b$$

$$b \leq -1$$

$$a \leq \frac{-(b-1)}{2}$$

$$a \leq \frac{-b+1}{2}$$

$$0,1 \leq b \leq +0,5$$

$$a \leq \frac{b+1}{-2}$$

$$b = -1$$

$$a = 1$$

$$18 \cdot \frac{17^2}{12^2} - 51 \cdot \frac{17}{12} + 28 =$$

$$= \frac{18 \cdot 17^2}{12^2 \cdot 12^0} - 51 \cdot \frac{17}{12} + 28 = \frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 28$$

$$b = -9$$

$$a = -4$$

$$= \frac{-17^2 + 28 \cdot 8}{8} = \frac{-65}{8} = -8 \frac{1}{8}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 28 \\ \times 8 \\ \hline 224 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 17 \\ \hline 119 \\ + 179 \\ \hline 289 \end{array}$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5  $x > 0 \quad x \in \mathbb{R}$   
 $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[ \frac{p}{u} \right]$  где проценты

$x \in \mathbb{N} \quad y \in \mathbb{N}$   
 $\sin(90 + \alpha) = -\cos \alpha$   
 $\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$

$u \leq x \leq 28$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$u \leq y \leq 28$

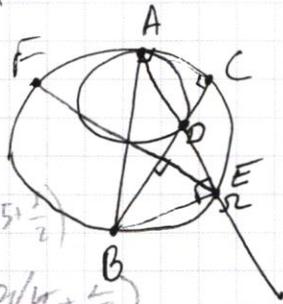
$f(x \cdot y^{-1}) = f(x) + f(y^{-1})$

$2R \cos(45 - \frac{\alpha}{2}) \cdot R = AE$

$CD = AD \cdot \cos(45 + \frac{\alpha}{2})$

$DE = 13 \cdot \sin(45 + \frac{\alpha}{2})$

N4



$CD = 12 \quad BD = 13$

$AD = \frac{12 \cdot 13}{AE}$

$CD \cdot BD = AD \cdot AE$

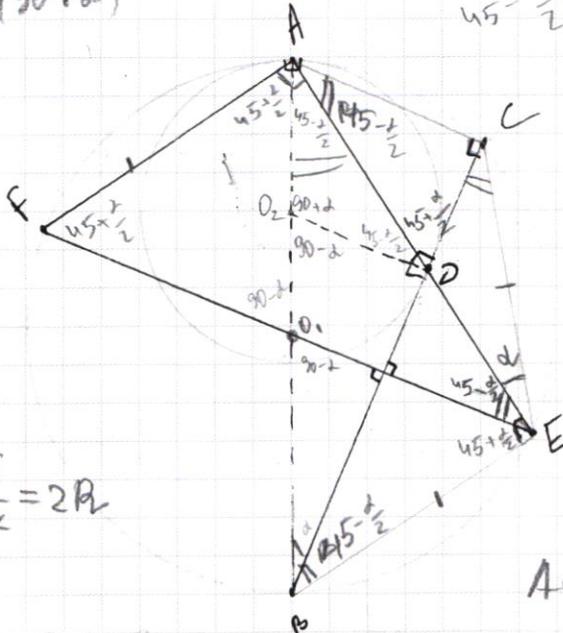
$12 \cdot 13 = AD \cdot AE \quad 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$

$AE = FE$   
 $FA = FE \cdot \cos(45 + \frac{\alpha}{2})$

$\sin(90 + \alpha)$

$CD = 12 \quad BD = 13$

радиусы  
 $\angle AFE$   
 $\triangle AEF$



$BO_2 = \frac{BD}{\cos \alpha}$

$BA = \frac{BC}{\cos \alpha}$

$\frac{BD}{BC} = \frac{13}{25} = \frac{BO_2}{BA} = \frac{2R - r}{2R}$

$\frac{1}{\frac{12}{25} - 1} = \frac{12}{13}$

$\frac{25}{\cos \alpha} = 2R$

$AF = CE$

$AC \parallel FE$

$13r = 50R - 25r$

$38r = 50R$

$26R = 50R - 25r$

$25r = 24R$

$R = \frac{25}{24} r$

$r = \frac{AD}{2 \cos \alpha}$

$45 + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \beta$

$\beta = 45 - \frac{\alpha}{2}$

$$R = \frac{25}{2 \cdot \cos \alpha}$$

$$R = \frac{25}{24} r \cdot \frac{25}{2 \cdot \cos \alpha}$$

$$\frac{25}{24} r = \frac{25}{2 \cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{r}$$

$$\sin \alpha \cdot 13 = r$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{13}$$

$$\cancel{8 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{12}{13}$$

$$\cancel{r} = \frac{24}{13}$$

$$\frac{25}{\cos \alpha} = 2R$$

$$R = \frac{25}{24} r$$

$$2R - r = \frac{25}{24} r$$

$$(2R - r) \cdot \sin \alpha = r$$

$$r = \frac{25}{24} r$$

$$\frac{25 - 12}{12} = \frac{13}{12}$$

$$\begin{array}{r} 156 \\ \times 2 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\frac{13}{12} r \cdot \sin \alpha = r$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 12 \\ \hline 156 \end{array}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = \frac{5}{13}$$

$$R = \frac{25}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{25 \cdot 13}{2 \cdot 5} = \frac{65}{2}$$

$$r = \frac{24}{25} \cdot \frac{65}{2} = \frac{24 \cdot 13}{10}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 13 \\ \hline 272 \\ + 240 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\sin \alpha = \frac{24 \cdot 13}{10 \cdot 13} = \frac{24}{10}$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{2R - r} = \frac{\frac{24 \cdot 13}{10}}{65 - \frac{24 \cdot 13}{10}} = \frac{24 \cdot 13}{650 - 24 \cdot 13}$$

$$= \frac{312}{348} = \frac{26}{29}$$

$$\sin \left( 45 + \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \left( 45 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\cos(90 + \alpha) = \cos 90 \cdot \cos \alpha - \sin 90 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{1 + \cos(90 + \alpha)}{2} = \cos^2 \left( 45 + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\frac{r}{2 \cdot \frac{25}{24} r - r} = \frac{12}{25 - 12} = \frac{1 - \frac{12}{13}}{2} = \frac{13 - 12}{2 \cdot 13} = \frac{1}{26}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = \\ & = \sin 2\alpha \cdot (\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \\ & \sin 2\alpha \cdot \left( \frac{1}{17} - \frac{16}{17} \right) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \frac{\pm 4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{-2}{17} \end{aligned}$$

$$-15 \cdot \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot (\pm 4) = -2$$

$$\sin 2\alpha \pm 4 \cos 2\alpha = -1$$

$$\begin{cases} -15 \sin 2\alpha + 8 \cos 2\alpha = -2 \\ \sin 2\alpha + 4 \cos 2\alpha = -1 \quad | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$-17 \sin 2\alpha = 0$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-15 \sin 2\alpha - 8 \cos 2\alpha = -2$$

$$\sin 2\alpha - 4 \cos 2\alpha = -1$$

$\text{tg } \alpha$  не существует

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{-15}{17} + \cos 2\alpha \cdot (\pm 8) \cdot \frac{1}{17} + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{17} + \frac{\pm 8}{17} \cdot \cos 2\alpha = \frac{-2}{17}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4 \cos 2\alpha = 0$$

$$\sin 2\alpha + (\pm 4) \cdot \cos 2\alpha = -1$$

$$\sin 2\alpha + (\pm 4) \cdot \cos 2\alpha = -1$$

$$\downarrow \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + 4 \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -1$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha = 0$$

$$1) \quad 2 \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \sin^2 \alpha - 5$$

$$4 \sin^2 \alpha - 4 \sin^4 \alpha = 64 \sin^4 \alpha + 25 - 80 \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} & 3 \sin^2 \alpha - 5 \cos^2 \alpha \\ & \frac{3 \sin^2 \alpha - 5 \cos^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha - 5(1 - \sin^2 \alpha)} \end{aligned}$$

$$N^2 \quad 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 + y^2 - 12y + 36 - 36 = 45$$

$$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$$

$$x(y-6) - (y-6) = (y-6)(x-1)$$

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

$$\underbrace{(y-6)}_u - 6 \cdot \underbrace{(x-1)}_v$$

$$169 \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$y-6=u$$

$$x-1=v$$

$$\begin{cases} u-6v = \sqrt{uv} \\ 9v^2 + u^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u-6v = \sqrt{uv} \\ 9v^2 + u^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} uv = (u-6v)^2 \\ 9v^2 + u^2 = 90 \end{cases}$$

$$(u-6v \geq 0)$$

$$\begin{cases} u^2 - 13uv + 36v^2 = 0 \\ 9v^2 + u^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} uv = u^2 + 36v^2 - 12uv \\ 9v^2 + u^2 = 90 \end{cases}$$

$$\frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} u = 9v \\ u = 4v \text{ не } \end{cases}$$

$$9v^2 + 81v^2 = 90$$

$$v^2 = 1$$

$$v = \pm 1$$

$$u \geq 6v$$

$$9v^2 + 16v^2 = 90$$

$$v^2 = \frac{90-18}{25} = \frac{72}{25}$$

$$v = \pm \frac{18}{5}$$

$$y-6 = \pm 9$$

$$x-1 = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} 2; 15 \\ 0; -3 \end{pmatrix} \text{ гра}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{1} \quad \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{17}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\beta = +\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\beta = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{\pm 4}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4 \cos 2\alpha = -1$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \pm 4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -1$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha = -1 \quad \bigcirc$$

$$5 - 8 \sin^2 \alpha = -2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$25 - 80 \sin^2 \alpha + 64 \sin^4 \alpha = 4 \sin^2 \alpha - 4 \sin^4 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$68 \sin^4 \alpha - 84 \sin^2 \alpha + 25 = 0$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{84 \pm \sqrt{84^2 - 68 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 68}$$

$$= \frac{100 \pm 25}{2 \cdot 68} = \frac{25}{34}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{34}}$$

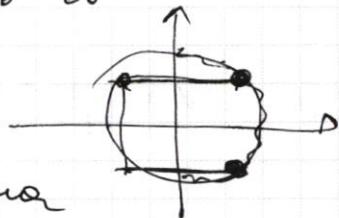
$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$84 - 16 = 68$$

2 ответа



$$2) -2 \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 8 \sin^2 \alpha - 5$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{34}}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

2 ответа

II

$$\sin 2\alpha - 4 \cos 2\alpha = -1$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -1$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 3 - 8 \sin^2 \alpha$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 3 - 8 \sin^2 \alpha$$

$$4 \sin^2 \alpha - 4 \sin^4 \alpha = 9 + 64 \sin^4 \alpha - 48 \sin^2 \alpha$$

$$68 \sin^4 \alpha - 52 \sin^2 \alpha + 9 = 0$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4 \cdot 68 \cdot 9}}{2 \cdot 68}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{\sqrt{34}}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{34}}$$

(+)

$$\begin{array}{r} 1 \ 84 \\ \times 84 \\ \hline + 336 \\ 672 \\ \hline 7056 \\ - 6800 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 16 \\ \times 16 \\ \hline + 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 1$$

$$4 \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha) - 1$$

$$3 - 8 \sin^2 \alpha$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 52 \\ \hline + 104 \\ 260 \\ \hline 2704 \\ - 2448 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 68 \\ \times 36 \\ \hline + 408 \\ 204 \\ \hline 2448 \end{array}$$

68