МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac45 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=-\frac45 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac45 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{1}{\sqrt5}\cos(2\beta)=-\frac25 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5} & (2) \end{cases}$

Из (2) $\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta = 1-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2 = 1-\frac45=\frac15 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5} \end{array}\right.$

~~Если 1. $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$: $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$~~

Из (1) $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\sin2\beta\cos2\alpha=$
$=-\frac{1}{\sqrt5}$.

~~1. Если $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$, тогда $\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$~~
~~$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$; $\sqrt5\left(\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha\right)=-1$~~
~~пусть $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt5}$, тогда $\sin(2\alpha+\varphi)=-\frac{1}{\sqrt5}$~~

1. Если $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$, тогда $\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha+1=0$; $4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\cancel{\sin^2\alpha}+\cancel{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha=0$

$\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=0$; $\cos\alpha(\cos\alpha+2\sin\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha=0 \\ \sin\alpha=-\frac12\cos\alpha \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin\alpha=1 \\ \underline{\operatorname{tg}\alpha=-\frac12} \end{array}\right.$ При $\sin\alpha=1$ $\operatorname{tg}\alpha$ не определен $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sin\alpha=1$ не подходит.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2. Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$, тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1 = 0$; $4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha} = 0$

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$; $\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ \sin\alpha = -2\cos\alpha\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos\alpha \neq 1\\ tg\alpha = -2\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}tg\alpha = 0\\ tg\alpha = -2\end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = -\frac{1}{2}$; $tg\alpha = 0$; $tg\alpha = -2$.

№2. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$ (1) (2)

~~(1): с учетом ограничений~~

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} & (1) \\ (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 & (2) \end{cases}$

(1): с учетом ограничений $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ (x-2)(y-1) \geq 0 \end{cases}$ запишем

$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$; $x^2 - 4x + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 + x - 5xy + 4y^2 + 2y - 2 = 0$; $(x - 4y + 2)(x - y - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x - 4y + 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = x - 1 \end{array}\right.$

~~ур-е (2) задает окружность с центром в точке (2;~~

Подставим y из (1) ур-я в ур-е (2), получим:

1. $y = x - 1$

$(x-2)^2 + (3(x-1)-3)^2 = 25$; $(x-2)^2 + (3x-6)^2 = 25$; $x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 36x + 36 = 25$; $10x^2 - 40x + 15 = 0$;

$2x^2 - 8x + 3 = 0$

$\frac{D}{4} = (-4)^2 - 2\cdot 3 = 16 - 6 = 10$ => $\left[\begin{array}{l} x = \frac{4+\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{4-\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$(x-2)^2 + \left(3\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)-3\right)^2 = 25;\quad x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4} = 25$

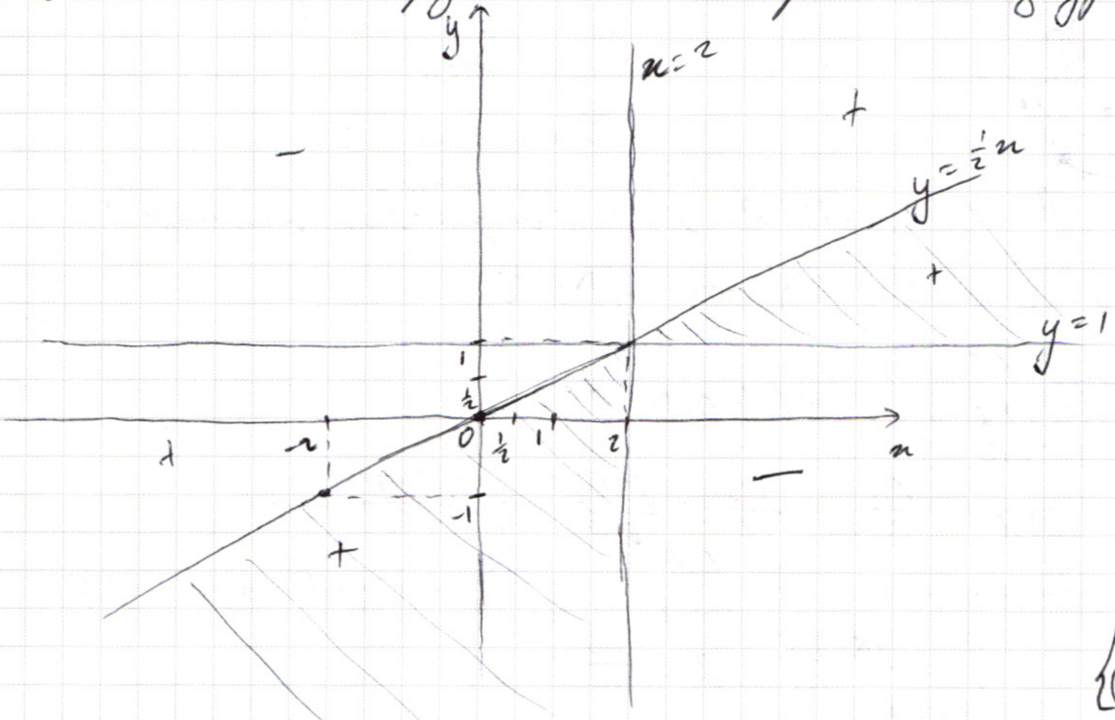
$16x^2 - 64x + 64 + 9x^2 - 36x + 36 - 400 = 0$

$25x^2 - 100x - 300 = 0;\quad x^2 - 4x - 12 = 0$

$\frac{D}{4} = (-2)^2 + 12 = 4 + 12 = 16$

$\left[\begin{array}{l} x = 2+4 = 6 \\ x = 2-4 = -2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{4}\cdot 6 + \frac{1}{2} = 2 \\ y = 0 \end{array}\right.$

Отметим на координатной пл-ти ~~пра~~ ограничения из ур-я (1):



$\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ (x-2)(y-1) \geq 0 \end{cases}$

Проверим, какие решения удовлетворяют данным условиям:

1. $x=6,\ y=2:\ \begin{cases} 6-4 \geq 0 \\ (6-2)(2-1) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \geq 0 \\ 4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow (6;2)$ подходит

2. $x=-2,\ y=0:\ \begin{cases} -2-0 \geq 0 \\ (-2-2)(0-1) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \not\geq 0 \\ 4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow (-2;0)$ не подходит

3. $x=\frac{4+\sqrt{10}}{2}$, $y=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$: $\begin{cases}\frac{4+\sqrt{10}}{2}-2\cdot\frac{2+\sqrt{10}}{2}\geq 0\\ \left(\frac{4+\sqrt{10}}{2}-2\right)\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2}-1\right)\geq 0\end{cases}$

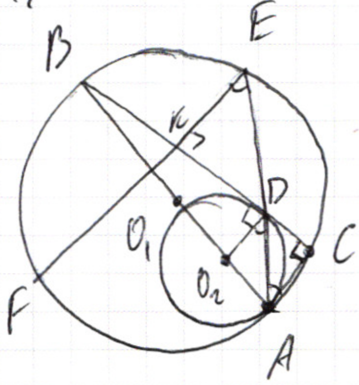
$\begin{cases}\frac{-\sqrt{10}}{2}\ngeq 0\\ \frac{10}{4}\geq 0\end{cases} \Rightarrow \left(\frac{4+\sqrt{10}}{2};\ \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$ не подходит

4. $x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$, $y=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$: $\begin{cases}\frac{4-\sqrt{10}}{2}-2\cdot\frac{2-\sqrt{10}}{2}\geq 0\\ \left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}-2\right)\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}-1\right)\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}\cancel{\sqrt{10}}\ \frac{\sqrt{10}}{2}\geq 0\\ \frac{10}{4}\geq 0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{4-\sqrt{10}}{2};\ \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$ подходит.

Ответ: $(6;2)$; $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2};\ \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

№4.



Дано: $O_2D\perp BC$; $CD=8$; $BD=17$.
BA - диаметр Ω.
Найти: R - ? (радиус Ω)
r - ? (радиус ω); $\angle AFE$ - ?
S_{AEF} - ?

Решение:

1. $\angle BCA=90^\circ$, т.к. вписанный и опирается на диаметр.

$O_2D\perp BC$ (т.к. BC - касат. к ω) $\Rightarrow O_2D\parallel AC$.

$\cancel{O_2D\parallel AC}$ $\cancel{AC}$ $\left.\begin{matrix}O_2D\parallel AC\\ O_2D\perp BC\\ KE\perp BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow KE\parallel O_2D\parallel AC$

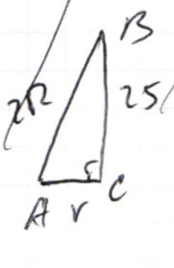
Тогда $\triangle BO_2D\sim\triangle ABC$ $\frac{BC}{BD}=\frac{25}{17}\ominus\cancel{\frac{BO_2}{BA}}, \cancel{\frac{2R-r}{2R}}\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{34R-17r=50R}$; $\ominus\frac{BA}{BO_2}=\frac{2R}{2R-r}\Rightarrow 50R-25r=34R$

$16R=25r$; $\frac{R}{r}=\frac{25}{16}$, $R=\frac{25}{16}r$

2. $\angle DAC=\angle O_2DA$ ($=\angle FEA$) как накрест лежащие $\Rightarrow \triangle O_2DA=\triangle CAD\Rightarrow$

$\Rightarrow AC=O_2D=r$



$BA=2R=2\cdot\frac{25}{16}r=\frac{25}{8}r$

$25^2=r^2+\left(\frac{25}{8}r\right)^2$; $625=r^2+\frac{625}{64}r^2$; $r^2=\frac{625\cdot 64}{}$

□ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

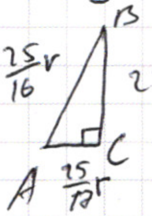
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Из того же подобия $\frac{AC}{O_2D} = \frac{25}{17} \Rightarrow AC = \frac{25}{17}r$

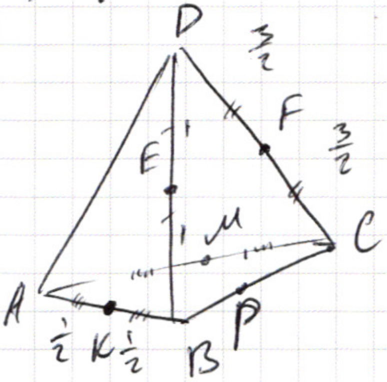


$625 = \frac{625}{256}r^2 + \frac{625}{289}r^2$; $r^2\left(\frac{256+289}{16^2\cdot17^2}\right) = 1$

$r = \frac{16\cdot17}{\sqrt{545}}$

$R = \frac{25}{\cancel{16}}\cdot\frac{\cancel{16}\cdot17}{\sqrt{545}} = \frac{25\cdot17}{\sqrt{545}}$

№7. Решение:



1. Пусть K, E, F, M, P – середины сторон AB, DB, DC, AC и BC соответс.

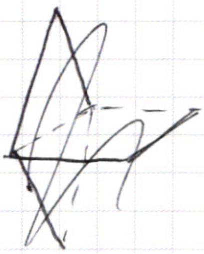
Т.к. AKEFMP вписан в сферу, то около KEFM можно описать окр-ть. $KE = MF = \frac{1}{2}AD$ (ср. линия)

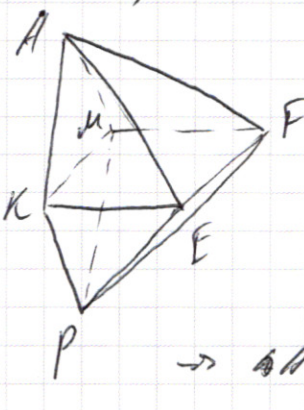
$KM = EF = \frac{1}{2}BC$ (аналогично). и $KE \parallel MF$, $KM \parallel EF \Rightarrow$

$\Rightarrow$ KEMF параллелограмм.

2. Также можно описать около AKPM окр-ть. Как ср. линия $MP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot1 = \frac{1}{2} = AK$, $MP \parallel AK$ и аналогично

$KP = \frac{1}{2}AC = AM$, $KP \parallel AM \Rightarrow$ AKPM – параллелограмм.





~~AP т.A и т.P равноудалены от KMPH~~ Т.к. это вписанные параллелограммы, то сумма их противоположных углов равна 180° $\Rightarrow$

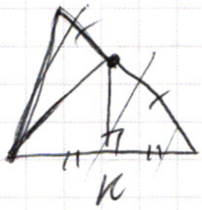
$\Rightarrow$ AKPM и KEMF – квадраты.

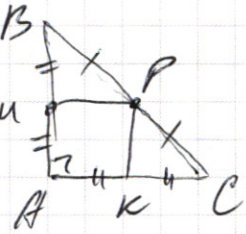
тогда в $KEMF$ $KM = EF = \frac{1}{2}BC = KE = \frac{1}{2}AD \Rightarrow BC = AD$

в $AKPM$ $AM = KP = \frac{1}{2}$ и $\angle MAK = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ - прямоуг. и равнобедр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = AC\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$BC = \sqrt{2}$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

Учтём, что $x^2+18x>0$, тогда $|x^2+18x|=x^2+18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-(x^2+18x)$

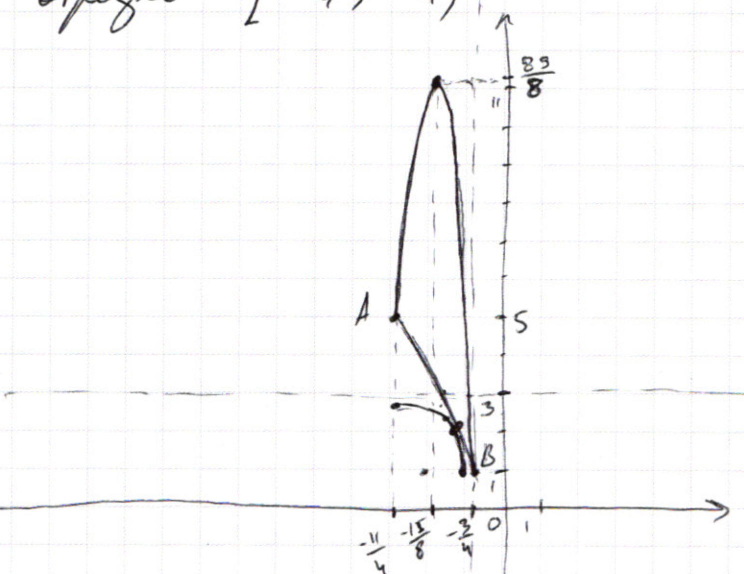
№6. $\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$y(x)=\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$ - гипербола, асимптоты $x=-\frac{3}{4}$ и $y=3$

$y(x)=-8x^2-30x-17$ - парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{15}{8};\frac{89}{8}\right)$

$y(x)=ax+b$ - ~~линейная функ~~ прямая

Изобразим ~~ф~~ графики данных ф-й на координ-й плоскости на отрезке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$



$y\left(-\frac{3}{4}\right)=-8\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2+30\cdot\frac{3}{4}-17=1$

$y\left(-\frac{11}{4}\right)=-8\left(-\frac{11}{4}\right)^2+30\cdot\frac{11}{4}-17=5$

$y(-1)=3+\frac{2}{-4+3}=3-2=1$

~~$y\left(-\frac{11}{4}\right)=3+\frac{2}{4x+3}$~~

$y\left(-\frac{11}{4}\right)=3+\frac{2}{-4\cdot\frac{11}{4}+3}=\frac{11}{4}$

$y\left(-\frac{7}{4}\right)=3+\frac{2}{-4\cdot\frac{7}{4}+3}=\frac{5}{2}$

~~Прямая $y=ax+b$~~

График $y=ax+b$ должен лежать между этими двумя графиками.

$A(-\frac{11}{4};5)$, $B(-\frac{3}{4};1)$, составим ур-е прямой, проход. через эти точки:

$$\begin{cases} 5 = -\frac{11}{4}k + b \\ 1 = -\frac{3}{4}k + b \end{cases} \quad \begin{cases} 20 = -11k + 4b \\ 4b = 4 + 3k \end{cases} \quad 20 = -11k + 4 + 3k$$

$-8k = 16$; $k = -2$

$b = -\frac{1}{2}$

$$y = -2x - \frac{1}{2}$$

Проверим имеют ли $y = -2x - \frac{1}{2}$ и $y = 3 + \frac{2}{4x+3}$ общие точки.

$3 + \frac{2}{4x+3} + 2x + \frac{1}{2} = 0$; $2(12x + 9 + 2 + 8x^2 + 6x) + 4x + 3 = 0$

$16x^2 + 36x + 22 + 4x + 3 = 0$; $16x^2 + 40x + 25 = 0$

$\frac{D}{4} = 400 - 400 = 0 \Rightarrow x = \frac{-20}{16} = -\frac{5}{4} \Rightarrow$ ~~если~~

~~⇒ это~~ ⇒ прямая $y = -2x - \frac{1}{2}$ касается уж части гиперболы ~~вет~~ при $x = -\frac{5}{4}$. Значит, если прямая касается ~~гипер~~ ~~гипер~~ части гиперболы на отрезке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ в другой точке, то она будет пересекать параболу $y = -8x^2 - 30x - 17$ и ~~ра~~ исходное неравенство не будет выполняться ~~для~~ для всех x на этом отрезке, тогда $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$.

Ответ: одно решение

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$ $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac45$

$\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac45$; $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac45$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$; $2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$\frac25 \cdot \frac{\sqrt5}{1} = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\cos 2$

$xy - x - 2y + 2 = (x-2)(y-1)$

$(x-2)(y-1) = xy - 2y - x + 2$

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x - 2y > 0$
$-2y > -x$
$y < \frac{x}{2}$

$x^2 - 4x + 4 - 4 + 9y^2 - 18y + 9 - 9 = 12$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos$

$-1 < 0$

$xy - x - 2y + 2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

$x^2 + x - 5xy + 4y^2 + 2y - 2 = 0$

$(x+y-1)(x-5y-2)$

$(x+ay+b)(x+cy+d) = x^2 + axy + bx + cxy + acy^2 + bcy + dx + ady + bd = x^2 + (a+c)xy + (b+d)x + (ac)y^2 + (bc+ad)y + bd$

$\begin{cases} a+c = -5 \\ b+d = 1 \\ ac = 4 \\ bc+ad = 2 \\ bd = -2 \end{cases}$ $a = -5 - c$; $(-5-c)c = 4$; $-c^2 - 5c - 4 = 0$; $c^2 + 5c + 4 = 0$

$\left[\begin{array}{l} c = -1 \\ c = -4 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = -4 \\ a = -1 \end{array}\right.$

$b = -\frac{2}{d}$; $\begin{cases} -b - 4d = 2 \\ \frac{2}{d} - 4d = 2 \end{cases}$; $\frac1d - 2d = 1$

$1 - 2d^2 - d = 0$, $2d^2 + d - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$\left[\begin{array}{l} d = \frac{-1+3}{4} = \frac12 \\ d = -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} b = -4 \\ b = 2 \end{array}\right.$

$D = 9$
$c = \frac{-5+3}{2} = -\frac22$

$a = -4$
$c = -1$
$b = 2$
$d = -1$

$(x - 4y + 2)(x - y - 1)$

$3y - 3 = 0$, $y =$

$4y = x + 2$,
$y = \frac14 x + \frac12$

$-3 \cdot 3$
$40 - 25 = 15$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$(x-4y+2)(x-y-1) = x^2 - 4xy + 2x - xy + 4y^2 - 2y - x + 4y - 2 = x^2 - 5xy + x +$
$+ 4y^2 + 2y - 2$

$\frac{4+\sqrt{10}}{2} - \frac{4-2\sqrt{10}}{2}$

$\frac{4+\sqrt{10}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$\frac{4+\sqrt{10}}{2} - \frac{4}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{2+\sqrt{10}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{4-\sqrt{10}-4+2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

$\frac{4-\sqrt{10}-4}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{2-\sqrt{10}-2}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x^2+18x-1=0$

$\log_5 x = t$

$5^t = x$

$\log_5(\log_{12} p)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \quad 2(x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x>0; \quad x(x+18)>0$

$-18 \quad 0 \quad x$

$x^2+18x = p$

$>0 \qquad >0$

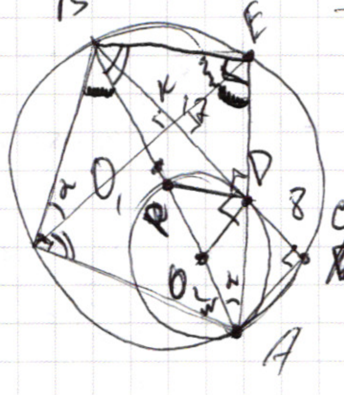
$5^{\log_{12} p} + p \leq 5^{\log_{12} p} \geq p^{\log_{12} 13} - p$

$\log_{12} 13 = \frac{1}{\log_{13} 12}$

$\frac{25}{16}$ $\frac{9}{4}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{625}{400}$

$x > 2y$

$y < \frac{1}{2}x$

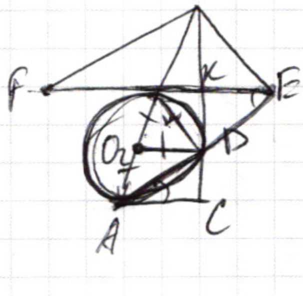


$O_2D \parallel FE \parallel AC$

$\frac{BD}{DC} = \frac{17}{8} = \frac{BO_2}{O_2A}$

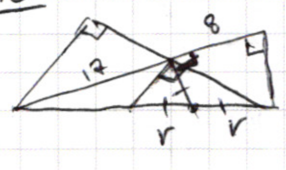
$O_2A = r, \quad BO_2 = R +$
$+(R-r) = 2R - r$

$\frac{2R-r}{r} = \frac{17}{8}$



DK

$PD \parallel BE$



$\begin{array}{r} 256 \\ +289 \\ \hline 545 \end{array}$

$\begin{array}{r} 625 \\ +64 \\ \hline 689 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

$-8x^2-30x-17=0$; $\frac{D}{4} = 225 - 8\cdot17 = 89$

$x_0 = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$$y(x_0) = -8\cdot\frac{15\cdot15}{8\cdot8} + 30\cdot\frac{15}{8} - 17 = \frac{-225+450}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17 = \frac{89}{8} > 11$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-(-30)}{-8\cdot2} = \frac{-30}{8\cdot2} = \frac{-15}{8} \quad x_0^2 = \frac{225}{8}$$

$y' = -16x-30$

$16x \vee 30$; $8x \vee 15$

$f(x) = 3 + \frac{2}{4x+3}$; $x \neq -\frac{3}{4}$

$\frac{2}{-28+3}+3$

$\left[\ldots; -\frac{3}{4}\right]$

$x = -\frac{11}{4}$; $3 + \frac{2}{-11+3} = 3 + \frac{2}{-8} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

$$-8\cdot\frac{11\cdot11}{4\cdot4} + 30\cdot\frac{11}{4} - 17 = \frac{-242+330-68}{4} = \frac{330-310}{4} = 5 > \frac{11}{4}$$

$$-8\cdot\frac{3\cdot3}{4\cdot4} + 30\cdot\frac{3}{4} - 17 = \frac{-18+90-68}{4} = \frac{90-86}{4} = 1$$

$4x+3=-1 \Rightarrow x=-1$

$y = \frac{1}{x}$

$3 = -\frac{3}{4}k+b$

$$\begin{cases} 1 = -\frac{3}{4}k+b \\ 5 = -\frac{11}{4}k+b \end{cases}$$

$1+\frac{3}{4}k$

$x+2\cdot\frac{7}{4\cdot2}-\frac{1}{2}=3$

$$3+\frac{2}{-4\cdot\frac{11}{4}+3} = 3-\frac{1}{4} = \frac{12-1}{4} = \frac{11}{4}$$

$-11+3=-8$

$\frac{11}{4}-1=\frac{7}{4}$

$$3+\frac{2}{-4\cdot\frac{7}{4}+3} = 3-\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

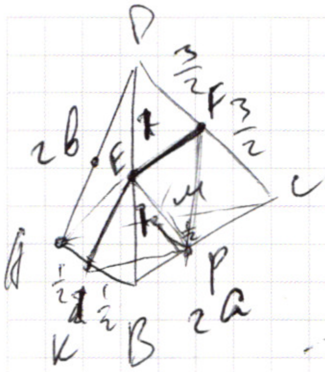
$-7+3=-4$

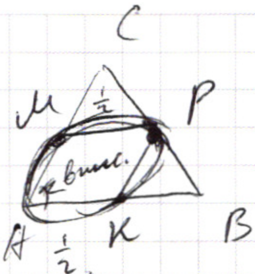
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

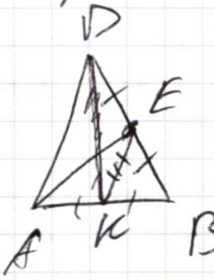
Страница №__

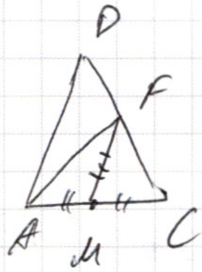
(Нумеровать только чистовики)

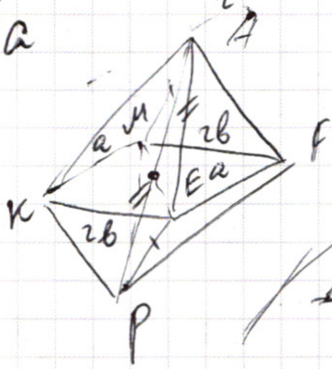




AMPK – параллелограмм







$\log_a b = c$

$a^c = b$

$\log_b a = \log_{a^c} ba = c$

$y(x) = x^2 + 18x$ $x_0 = \frac{-18}{-9}$

-81

$(-9; -81)$

log