МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик

№3

ОДЗ:

$$x(x+6)>0$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2-(x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(6x+x^2)}-5^{\log_4(x^2+6x)} \geq 0$$

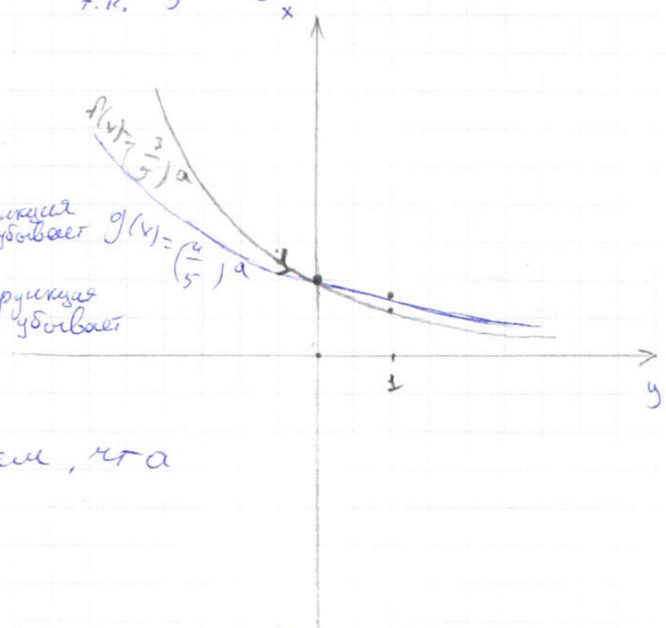
Пусть $\log_4(x^2+6x)=\alpha$, тогда

$$3^\alpha+4^\alpha-5^\alpha \geq 0 \quad \Big| : 5^\alpha \quad \text{т.к. } 5^\alpha \neq 0$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^\alpha+\left(\frac{4}{5}\right)^\alpha \geq 1$$

Рассмотрим $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^\alpha$ – функция убывает

$g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^\alpha$ – функция убывает



Тогда при $\alpha=2$, имеем, что

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$$

Тогда исходя из того, что функции убывает

$$\alpha \leq 2$$

$$\begin{cases} x(x+6)>0 \\ \log_4(6x+x^2) \leq \underset{\log_4 16}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+6)>0 \\ (4-1)(x^2+6x-16) \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+6)>0 \\ (x+8)(x-2) \leq 0 \end{cases}$$

−8 −6 0 2 x

$$x \in [-8;-6) \cup (0;2]$$

Ответ: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

№6 $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

Рассмотрим $f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$

$f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}=\frac{4x-4+1}{2x-1}=2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$

$\times\begin{array}{r}17\\34\\\hline 68\\51\\\hline 578\\-289\\\hline 289\end{array}$ $\times\begin{array}{r}17\\17\\\hline 119\\17\\\hline 289\end{array}$

Рассмотрим $g(x)=8x^2-34x+3$

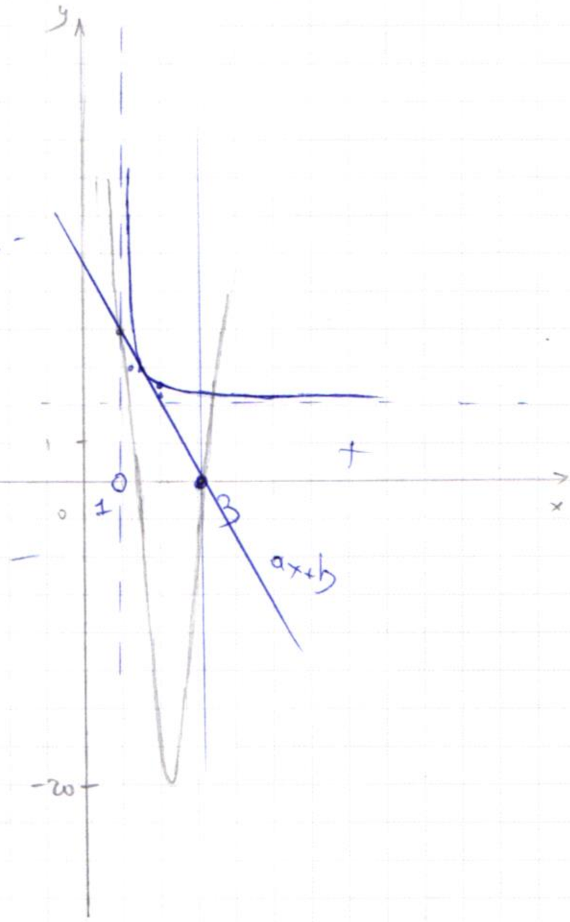
$x_в=-\frac{b}{2a}=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$

$y_в=\frac{17^2}{8}-\frac{34\cdot 17}{8}+3=\frac{17^2-34\cdot 17}{8}+3=-\frac{289}{8}+3\approx-20$

при $x=1$; $y=4$

при $x=3$; $y=72+30-102=0$

Тогда для того, чтобы выполнялась для всех $x\in(1;3]$ система параметры a и b могут принимать:



$$\begin{cases}\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\\ 8x^2-34+30\leq ax+b\end{cases}$$

Рассматрим $y=ax+b$: где $x=3$, $y=0$; $x=1$, $y=4$

$$\begin{cases}0=3a+b\\ 4=a+b\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}a=-2\\ b=6\end{array}$$

$y=-2x+6$

Рассмотрим:

$\frac{4x-3}{2x-2}=-2x+6$ $x\neq 1$

$4x-3+(2x-6)(2x-2)=0$

$4x-3+4x^2-16x+12=0$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)=0 \Rightarrow$ единственное пересечени

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 Тогда т.к. при $a=-2$, $b=6$ — выполняется $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

и прямая $y=-2x+6$ — касается гиперболы

то $a=-2$, $b=6$ — единственная пара

Ответ: $a=-2$, $b=6$

№2 $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

ОДЗ: $(3y-2)(x-1)\geq 0$

$\begin{cases} 15xy-9y^2-4x^2-2x-3y+2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad /\cdot 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3xy+x^2-4x-3y=2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$ $y=\frac{2+4x-x^2}{3x-3}$

$\begin{cases} y=\frac{2+4x-x^2}{3x-3} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

2) $3x^2 + 3\left(\frac{2+4x-x^2}{3x-3}\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{2+4x-x^2}{3x-3}\right) = 4$

$3x^2 + \left(\frac{6+12x-3x^2}{3x-3}\right)^2 - \frac{8+16x-4x^2}{3x-3} = 4+6x$

$\cancel{\frac{6+12x-3x^2-8-16x+4x^2}{3x-3}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

№2 $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

1) ОДЗ: $x(x+6)>0$

2) $(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

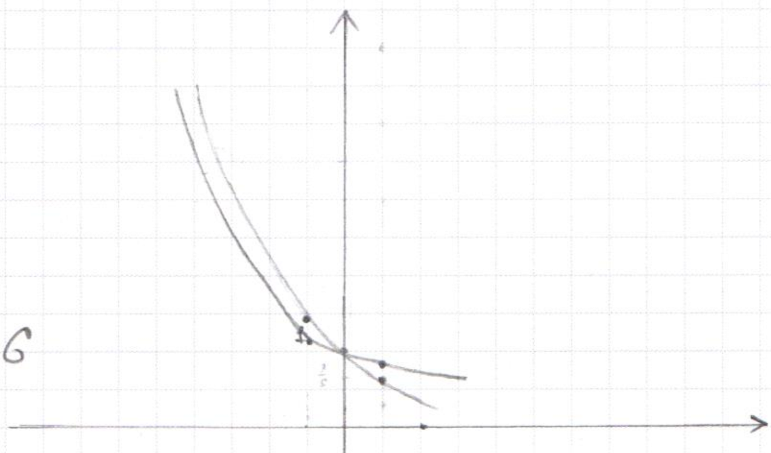
$$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x)^{\log_4 4} - |x^2+6x|^{\log_4 5} \geq 0$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} - 5^{\log_4|x^2+6x|} \geq 0$$

$3^a + 4^a - 5^a \geq 0 \quad :5^a$ $\searrow$ $a^{\log_4 3} + a^{\log_4 4} - a^{\log_4 5} \geq 0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a - 1 \geq 0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a \geq 1$



$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq -2x+6$$

$$\frac{4x-3+(2x-6)(2x-2)}{2x-2} \geq 0$$

Рассмотрим $\frac{4x-3}{2x-2}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a = 1$

$4x-3+(2x-6)(2x-2)=0$

$4x-3+4x^2-16x+12$

при $a=2$ $\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$ $4x^2-12x+9$

т.к. $\searrow$ $a<2$

$\log_4(x^2+6x) < 2$

16^2: $16 \times 4 = 64$, $64 + 36 = 100$

$x^2+6x-16=0$

$D=36+64=100$

$x_1 = \frac{-6+10}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-6-10}{2} = -8$

$\log_4 x^2+6x - \log_4 16 < 0$

$\begin{cases} x^2+6x-16<0 \\ x(x+6)>0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+8)(x-6)<0 \\ x(x+6)>0 \end{cases}$

-8 -6 0 6 x

Ответ: $x \in (-8;-6) \cup (0;6)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

№2 $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

ОДЗ: $3xy-2x-3y+2 \geq 0$

$x(3y-2)-(3y-2)\geq 0$

$(3y-2)(x-1)\geq 0$

$3xy-2x-3y+2 = (3y-2x)^2$

$3xy-2x-3y+2 = 9y^2+4x^2-12xy$

$\begin{cases} 15xy-9y^2-4x^2-2x-3y+2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$\begin{cases} 15xy-6y^2-x^2-8x-7y=2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$6x^2+6y^2-12x-8y=8$

$\begin{cases} 15xy+5x^2-20x-15y=10 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$3xy+x^2-4x-3y=2$

$x^2+x(3y-4)+2-3y=0$

$D = 9y^2+16-24y+8-12y =$

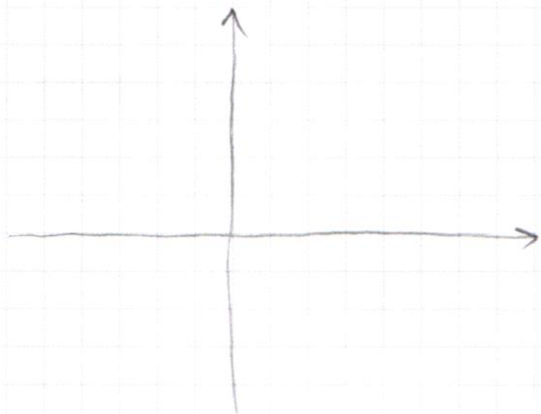
$= 9y^2-36y+24$

$x = \frac{4-3y\pm\sqrt{9y^2-36y+24}}{2}$

$2x+3y-4 = \pm\sqrt{9y^2-36+24}$

N6 $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$$\begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \\ 8x^2-34x+30 \leq ax+b \end{cases}$$



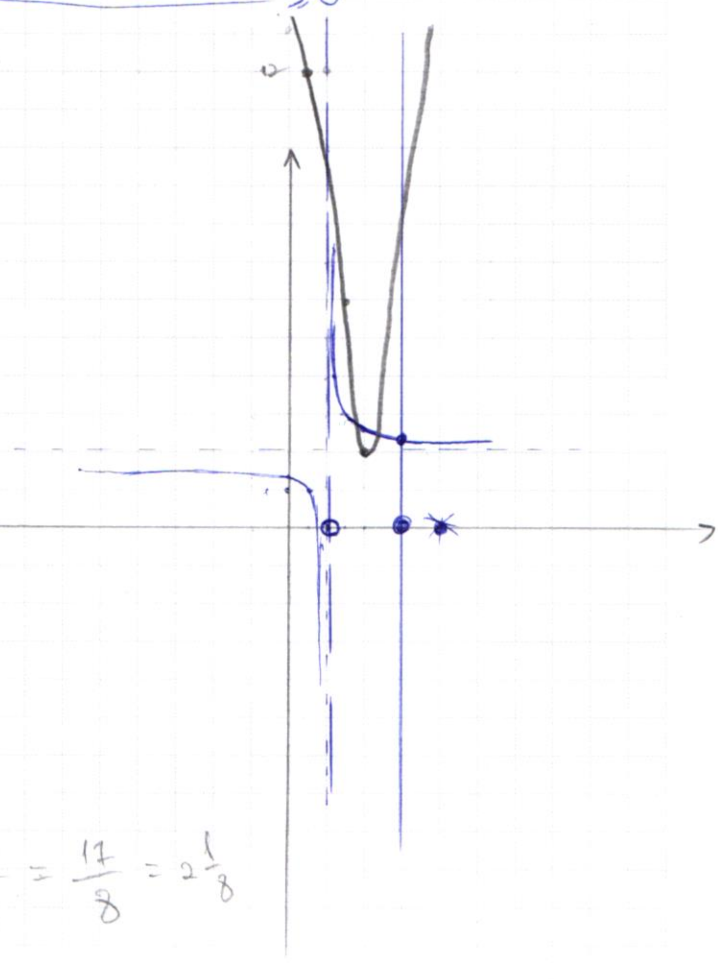
$\frac{4x-3}{2x-2} - 8x^2-34x+30 \geq 0$

таких пар нет

$\frac{4x-3-(16x^3-64x^2+60x-16x^2+64x-60)}{2x-2} \geq 0$

$\frac{4x-3-16x^3+64x^2-60x+16x^2-64x+60}{2x-2} \geq 0$

$\frac{-16x^3+80x^2-120x+57}{2x-2} \geq 0$



$2x-2+2x-1$

$\frac{4x-3}{2x-2}$ - как построить?

$\cancel{\frac{4x}{2x-2} - \frac{3}{2x-2}}$

$1+\cancel{\frac{2x-1}{2x-2}}$

$2+\frac{1}{2x-2}$

$2+\frac{1}{2x-2} = 2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$

$x \neq 1$

$x=\frac{1}{2}$

$8-34+30=12$

$\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq -2x+\cancel{1}$

$2x+1$

4,47 -5

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

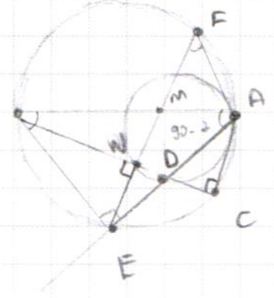
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$AD \cdot ED = DC \cdot BD$

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$AD \cdot ED = 65$

$EN = \frac{ED \cdot EB}{BD}$

r - ?

R - ?

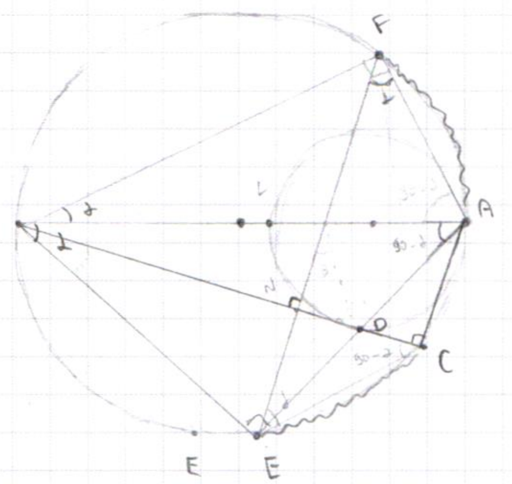
$\angle AFE$ - ?

$S_{\triangle AFE}$ - ?

1) $D^2 - Dd = 81$

$D^2 - AC^2 = 81$

$AC^2 = D \cdot d$



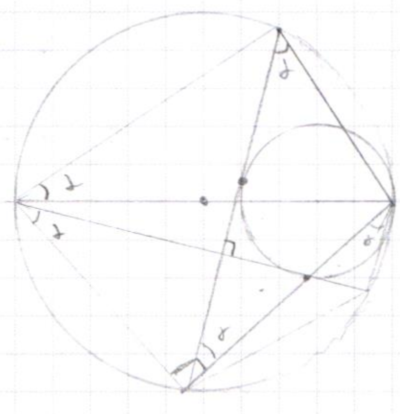
$BL \cdot BA = BC^2$

$D(D-d) = BC^2$

$AC^2 + BC^2 = D^2$

$\frac{AC}{NM} = \frac{BC}{BN}$

$R = \frac{1}{2}\sqrt{2(AE^2 + BE^2) - 4R^2}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$$

$$3x^2+3y^2-6x-4y=4$$

$$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$$

$$\begin{cases}9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0\\3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}3xy+x^2-4x-3y-2=0\\3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}$$

$$y(3x-3)=2+4x-x^2$$

$$y=\frac{2+4x-x^2}{3x-3}$$

$$3x^2+3y^2-6x-4y=4$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

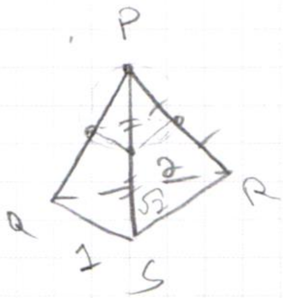
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$RS - ?$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos < 0$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

4 $\sqrt{17}$ 1

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta$

$\sin(\underbrace{2\alpha+2\beta}+\underbrace{2\beta}) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta +$

$+ \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{1}{4}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin$

$-\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)$

$68 + 17 = 85$

$\cos(2(\alpha+\beta)) = +\frac{1}{4}$

$-\sqrt{17}(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + \frac{17}{2}\sin\beta\cdot\cos\alpha + 34\sin\beta\cdot\cos\beta = -8$

$-\sqrt{17}(\cos^2\beta-\sin^2\beta) + \frac{85}{2}\sin\beta\cdot\cos\alpha = -8$

$-2\sqrt{17}\cos^2\beta + \sqrt{17} + \frac{85}{2}\sin\beta\cdot\cos\alpha = -8$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) =$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) \pm \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(2(\alpha+2\beta)) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$$\begin{cases} 15xy-9y^2-4x^2-2x-3y+2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad /\cdot 3 \end{cases}$$

$15xy-\cancel{9y^2}-4x^2-\cancel{2x}-3y+2+9x^2+\cancel{9y^2}-\cancel{18x}-12y=12$

$15xy+5x^2-20x-15y-10=0$

$x^2+x(3y-4)+(-3y-2)=0$

$D = 9y^2+16-24y+12y+8 =$

$x^2+3xy-4x-3y-2=0$ $\quad = 9y^2-12y+24=0$

$9y^2-12y-24=$

$y(3x-3)=4x+2-x^2$

$x_{1,2} = \frac{4-3y\pm\sqrt{9y^2-12y-24}}{2}$ $\quad = 3y^2-4y-6$

$16+72$

$$y=\frac{4x+2-x^2}{3x-3}$$

$\sqrt{9y^2-12y-24} = 2x_1+3y-4$

$\sqrt{9y^2-12y-24} = 4-3y-2x_2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)