МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}, & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}, & (2) \end{cases}$

Решение:

(2): $2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$,

$2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$.

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

(1): $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$;

$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha = 0$ или $4\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha$ не определен! $\quad$ $\underline{\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}}$.

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

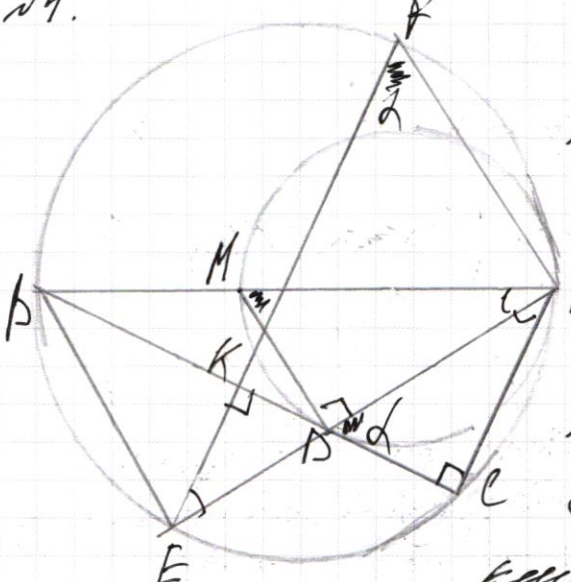
$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0$, тогда или $4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$tg\alpha = 0$ $tg\alpha = -4$.

$\boxed{\text{Ответ: } -4; -\frac{1}{4}; 0}$

№4.



Решение:

1) Пусть $AB \cap \omega = M$; $AM = 2r$; $AB = 2R$; $BM = AB - AM = 2R - 2r$, где r и R — радиусы окружностей ω и Ω соответственно.

По св-ву касательной и секущей для окружности:

$AB\cdot BM = BD^2$; $(2R-2r)\cdot 2R = \frac{169}{4}$. (1)

2) $EF \cap BC = K$; $EK \perp BC$; $AC \perp BC$, значит $EK \parallel AC$, $\Rightarrow$ $\angle KED = \angle CAD$ — накрест лежащие.

~~$\angle ACB$~~ $\angle ADM$ — вписанный, опирается на диаметр $\Rightarrow$ ~~$\angle ACB = 90°$~~ $\angle ADM = 90°$.

$\angle ADC$ — угол между касательной и секущей; $\angle ADC = \frac{1}{2}\smile AD$;

$\angle AMD$ — вписанный, опирается на $\smile AD \Rightarrow \angle AMD = \frac{1}{2}\smile AD \Rightarrow \angle ADC = \angle AMD$, значит $\angle MAD = \angle DAC \Rightarrow$

$\Rightarrow AD$ — биссектриса

3) $\triangle BAC$: по св-ву биссектрисы: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{13}{5}$;

$AC = 2R\cdot\frac{5}{13} = \frac{10}{13}R$.

4) $\triangle ABC$: $AB^2=BC^2+AC^2$; $4R^2=81+\frac{25}{169}\cdot 4R^2$

$\frac{144}{169}\cdot 4R^2=81$; $R^2=\frac{81\cdot 169}{144\cdot 4}$; $R=\frac{9\cdot 13}{12\cdot 2}=\frac{39}{8}$.

$AC=\frac{10}{13}\cdot\frac{39}{8}=\frac{15}{4}$;

(1): $\frac{39}{4}\left(\frac{39}{4}-2r\right)=\frac{169}{4}$; $\frac{39}{4}-2r=\frac{13}{3}$; $2r=\frac{39}{4}-\frac{13}{3}=$

$=\frac{117}{12}-\frac{52}{12}=\frac{65}{12}$; $r=\frac{65}{24}$.

5) $\angle AFE=90^\circ-\angle FEA=90^\circ-\angle DAC=\angle ADC=\alpha$

$\triangle ADC$: $AD=\sqrt{DC^2+AC^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{225}{16}}$

$tg\alpha=\frac{AC}{DC}=\frac{15\cdot 2}{4\cdot 5}=\frac{3}{2}$; $\angle AFE=arctg\,1{,}5$.

6) $\angle BEF=\angle BAF$ – вписанные, опирающиеся на $\smile BF$;

$\angle FAE=\angle BEA=90^\circ$; но т.к. $\angle FAE$ – вписанный, опирающийся на $\smile EF$, значит $\smile EF=180^\circ$;

другими словами EF – диаметр; $EF=2R=$

$=\frac{39}{4}$.

7) $\triangle AEF$: $\frac{AE}{AF}=tg\alpha=\frac{3}{2}$; $AE=3x$; $AF=2x$

$FE^2=AE^2+AF^2$; $\frac{1431}{16}=9x^2+4x^2=13x^2$; $x^2=\frac{39\cdot 3\cdot 13}{13\cdot 16}=$

$=\frac{117}{16}$; $x=\frac{3\sqrt{13}}{4}$; $AE=\frac{9\sqrt{13}}{4}$; $AF=\frac{3\sqrt{13}}{2}$.

$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot AF=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{2}=\frac{27\cdot 13}{16}=\frac{351}{16}$.

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{39}{8};\ \frac{65}{24};\ \angle AFE=arctg\,1{,}5;\ S_{\triangle AEF}=\frac{351}{16}}$

№6. $\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$ $\quad x\in(1;3]$.

Решение:

1) $y=\frac{4x-3}{2x-2}=2+\frac{1}{2(x-1)}$ – дробно-линейная ф-ция ($g(x)$)

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 3
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

график — гипербола;

Прямые $y=2$ и $x=1$ — асимптоты.

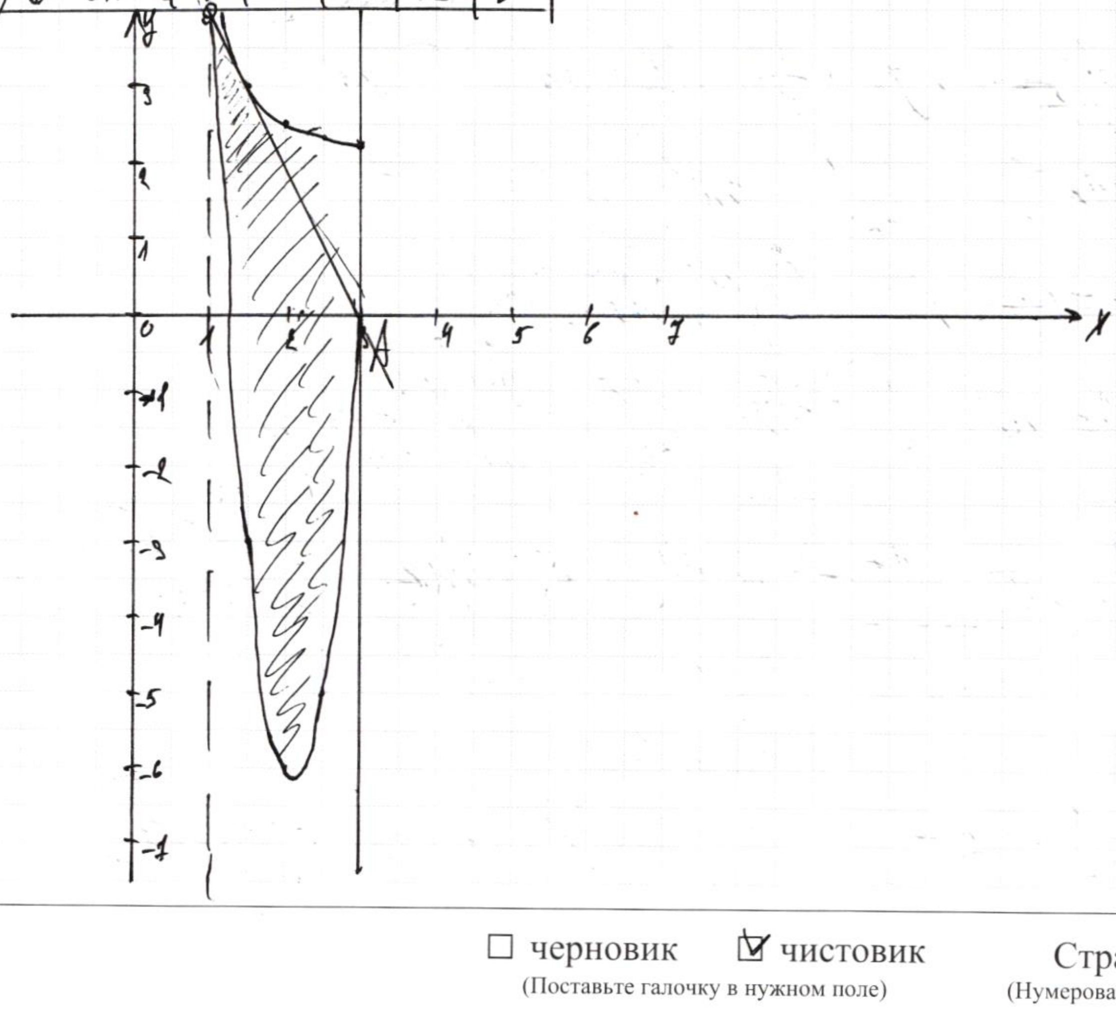
x	3	2	1,5	2,5
$y=2+\frac{1}{2x-2}$	2,25	2,5	3	$2\frac{1}{3}$

2) $y=8x^2-34x+30$ — квадратичная ф-ия; график — парабола. ($f(x)$)

$x_0=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2,125$; $y_0=\frac{17^2}{8}-\frac{2\cdot17^2}{8}+30=\frac{17^2}{8}+30=-6,125$

$M(2,125; -6,125)$ — вершина параболы.

x	1	2	2,5	1,5	3
$y=8x^2-34x+30$	4	−6	−5	−3	0



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $y=ax+b$ – прямая.
Необходимо выяснить при каких значениях a и b ~~при~~ прямая $y=ax+b$ будет лежать в заштрихованной области при любом $x\in(1;3]$

а) Прямая проходит через точку $A(3;0)$:
$0=3a+b$; $b=-3a$
$y=ax-3a$.

б) Вычислим координаты точки касания графика ф-ии $g(x)$, для этого решим систему:

$\begin{cases} y=ax-3a, \\ y=\frac{4x-3}{2x-2} \end{cases}$ $\quad ax-3a=\frac{4x-3}{2x-2}$
$a(x-3)(2x-2)=4x-3$
$2ax^2-2(4a+2)x+6a+3=0$

$D_1=16a^2+16a+4-12a^2-6a=4a^2+10a+4=0$
$2a^2+5a+2=0$
$a=-2$ или $a=-\frac{1}{2}$.

• $a=-2$: $-4x^2+16x-12-4x+3=0$
$(2x-3)^2=0$ $x=1{,}5$ $y=3$

точка $B(1{,}5;3)$ – подходит, т.к $x\in(1;3]$
Заметим, что при $a=-2$ прямая проходит через точку $C(1;4)$:

$\begin{cases} y=-2x+6, \\ y=8x^2-34x+30; \end{cases}$ $-2x+6=8x^2-34x+30$

$x=3$ или $x=1$

$x=1;\ y=4,$

Значит, ~~к~~ пара $(-2;6)$ — единственная подходящая

$\boxed{\text{Ответ: } (-2;6)}$

№3 $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

Решение:

ОДЗ: $x^2+6x>0$ $\boxed{x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}-(x^2+6x)^{\log_4 5}\geq-(x^2+6x)$

$(x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)^{\log_4 3}\leq (x^2+6x).$

Прологарифмируем неравенство по основанию 4, учитывая, что ф-ия $y=\log_4 t$ возрастающая.

$\log_4 5\log_4(x^2+6x)-\log_4 3\log_4(x^2+6x)\leq\log_4(x^2+6x).$

$\log_4(x^2+6x)(\log_4 5-\log_4 3-\log_4 4)\leq 0$

$\log_4\frac{5}{12}\log_4(x^2+6x)\leq 0$

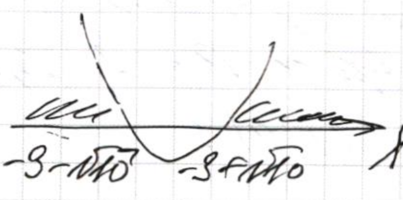
$\log_4\frac{5}{12}<\log_4 1=0$

$\log_4(x^2+6x)\geq 0$ $x^2+6x\geq 1.$

$x^2+6x-1\geq 0$

$D_1=9+1=10$

$x=-3\pm\sqrt{10}$



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Учитывая ОДЗ, имеем:

$\boxed{x\in(-\infty;-3-\sqrt{10}]\cup[-3+\sqrt{10};+\infty)}$

$\boxed{\text{Ответ: } (-\infty;-3-\sqrt{10}]\cup[-3+\sqrt{10};+\infty).}$

№2. $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-8y+2}, & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4; \end{cases}$

Решение.

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x\geq 0; \\ 9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-8y+2, \end{cases}$

$\begin{cases} 3y\geq 2x; \\ 9y^2+4x^2-15xy+2x+8y-2=0; \end{cases}$

Система:

$\begin{cases} 9x^2+9y^2-18x-12y-12=0; \quad (3y\geq 2x) \\ \cancel{3y\geq 2x}; \\ 4x^2+9y^2-15xy+2x+8y-2=0; \end{cases}$

$\begin{cases} 5x^2+15xy-20x-15y-10=0; \quad (3y\geq 2x) \ (2) \\ 4x^2+9y^2-15xy+2x+8y-2=0; \end{cases}$

$(2): x^2+3xy-4x-3y-2=0$

$x^2+(3y-4)x-3y-2=0$

$D=9y^2-24y+16+12y+8=9y^2-12y+24=3(3y^2-4y+8)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 6}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0$, $x(x+6)>0$ $+\quad -6 \quad - \quad 0 \quad + \quad x$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}-|x^2+6x|^{\log_4 6} \geq -x^2-6x$
$= -(x^2+6x)$

$3^{\log_4(x^2+6x)} = 3$

№5 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\cancel{2}\cdot\left(+\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = +\frac{8\,4}{17\sqrt{17}}$ $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha = -1$ $D/4 = 4-$

~~$8\sin\alpha\cos\alpha$~~

$\boxed{1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$

$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}-2tg^2\alpha} =$

$= \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha-2tg^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$-2(x-1)-2-3=$

$(x-1)(x-3-3y)+5=0$

$(x-1)(x-1+3y)-2x-3=0$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\cancel{2\sin 2\alpha +}\ 8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha = 0$ $\quad -16xy + 2x + 3y - 2 = 0$ $\quad 8\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0$

$9y^2 + 4x^2 \cancel{+12xy} = 3xy - 2x$ $\quad 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$9y^2 + 9x^2 - 18x - 12y - 12 = 0$ $\quad 4\operatorname{tg}\alpha = -1$. $\quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$ (1)

$6x - 16xy - 16y - 20x - 10 = 0$

$\cancel{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$ $\quad x - 3xy - 3y - 4x - 2 = 0$

$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. $\quad \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-3x - 3xy - 3y - 2 = 0$

$8\sin\alpha\cos\alpha$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$,

$-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$3x + 3xy + 3y + 2 = 0$

$xy = 6$ $\quad (x + y)^2 =$ $\quad 4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0$ $\quad 4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$ (2) $\quad 4 + \operatorname{tg}\alpha = 0$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = -4$. (3)

№2. $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \ (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$ $\quad 3y - 2x = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$.

(1): $3y - 2x \geq 0$ $\quad (3y - 2x)^2$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$; $\quad 9y^2 + 4x - 12xy$

$\begin{cases} 9y^2 + 4x^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0 \\ 3y^2 + 3x^2 - 6x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$

$3x^2 - 6x + 3y^2 - 4y - 4 = 0$

$D_1 = 9 - 9y^2 + 12y + 12 = -9y^2 + 12y + 21 = -3(3y^2 - 4y - 7)$

$12y^2 + 7x^2 - 4x - y - 6 - 16xy = 0$

$7x^2 - (4 + 16y)x + 12y^2 - y - 6 = 0$

$3x^2 + 3y^2 - 3x - 3x - 4y - 4 = 0$ $\quad 3x^2$

$-4x - 2x$

$x^2 + 3xy - 4x - 3y - 2 = 0$

$3y(x-1) - 2x - 2x - 2$

$(x-1) - 3x - x - 2x$

$x(x-1) + 3x(y-1)$

$x(x-1) - 3x - 3y(x-1)$

$(x-1)(x + 3y) - 3x - 2 = 0$

$(x-1)(x-3y) - 3 - 2x$

$= (x-1)(x + 3y - 1) + 3x(y-1) - 3 - 2x(x-1)$

$x^2 - 2x + 1 - 3$

$-3(1 - xy + y) - 3x$

$(x-2)^2 - 4x + 4) - 4 + 3xy - 3y - 2 = 0$

$(x - 2)^2 - 3y(x-1) = 6$

$(x+1)^2 - 2x + 1 - 2x - 3 + 3xy - 3y = (x-1)^2 - 3y(x-1) = 6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$ax+b=y$ $3a+b=0$ $b=-3a$. $ax-3a=y$

$ax-3a=\frac{4x-3}{2x-2}$ $a(x-3)(2x-2)=4x-3$ $a(2x^2-8x+6)=4x-3$

$\cancel{ax}$ $2ax^2-8ax+6a-4x+3=0$

$2ax^2-2(4a+2)x+6a+3=0$

$D_1=16a^2+16a+4-12a^2-6a=4a^2+10a+4=0$

$2a^2+5a+2=0$

$D=25-16=9=3^2$

$a=\frac{-5\pm3}{4}$, $a=-2$; $a=-\frac{1}{2}$

$b=6$ $b=1{,}5$

$a=-2$; $-4x^2+16x-12-4x+3=0$

$-4x^2+12x-9=0$ $4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$ $x=1{,}5$.

$y=\frac{6-3}{3-2}=3$

$-2x+6=8x^2-34x+30$

$8x^2-32x+\cancel{x}24=0$

$x^2-4x+3=0$

$x=3$ или $x=1$.

$y=$ | $\log_4(x^2+6x)\leq0=\log_4 1$

$x^2+6x\leq1$

$x^2+6x-1\leq0$

$D=$ $-3-\sqrt{10}$

$3<\sqrt{10}<3{,}5$

$-3{,}5<-\sqrt{10}<-3$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}-(x^2+6x)^{\log_4 5}\geq-(6x+x^2)$

$-6{,}5<-3-\sqrt{10}<-6$

$(x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)^{\log_4 3}\leq(x^2+6x)$

$(x^2+6x)^{\log_4 5-1}-(x^2+6x)^{\log_4 3-1}\leq1$

>0 $\log_4 1{,}25$ $\cancel{0{,}75}<1$. $\log_4 0{,}75<0$ $\log_4 1=0$

$x^2+6x>1$

$(x^2+6x)^{\log_4 1{,}25}$

$\log_4 1{,}25\log_4(x^2+6x)-\log_4 0{,}75\log_4(x^2+6x)\leq\log_4 1=0$

$\log_4(x^2+6x)(\log_4 1{,}25-\log_4 0{,}75)\leq0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

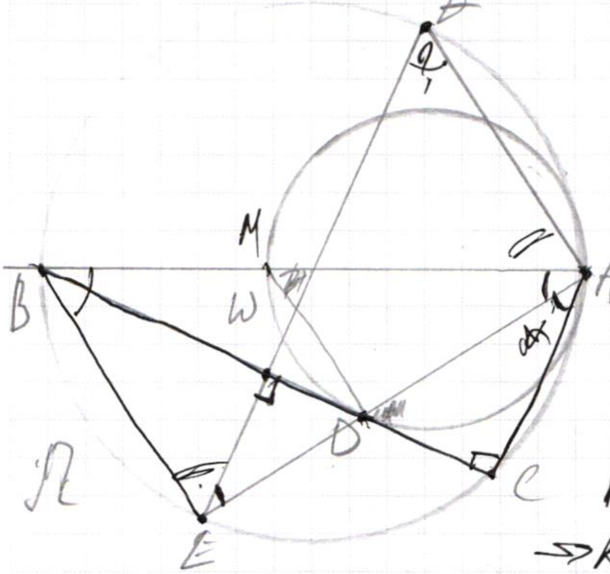
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$R - ?$ $r - ?$ $\angle AFE$ $S_{\triangle AEF}$

$CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$ $9 \cdot 13 =$

$BM = 2R - 2r$; $AM = 2r = 11 \cdot 7$

$2R \cdot (2R - 2r) = \frac{169}{4}$

$EBFA$ — вписанный

$\Rightarrow \angle FAE$

$\angle AMD = \angle ADC \Rightarrow \angle MAD = \angle DAC$

$\Rightarrow AD$ — биссектриса $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{13}{5}$; $AB = 2R$, $AC = \frac{5}{13} \cdot 2R$

$\Rightarrow \angle E = \angle FAE = \angle FAE = 90° \Rightarrow EF = 2R$

$\triangle ABC$: $BC = 9$, $AB = 2R$, $AC = \frac{5}{13} \cdot 2R$

$4R^2 = \frac{25}{169} \cdot 4R^2 + 81$ $\quad \frac{144}{169} \cdot 4R^2 = 81$ $\quad R^2 = \frac{81 \cdot 169}{144 \cdot 4}$

$R = \frac{9 \cdot 13}{12 \cdot 2}$, $\quad \frac{9 \cdot 13}{12}\left(\frac{9 \cdot 13}{12} - 2r\right) = \frac{169}{4}$

$\cancel{\frac{117}{12}\left(\frac{117}{12} - 2r\right) = \frac{169}{4} = \frac{117}{12} - 2r = \frac{507}{117}}$

$\cancel{2r = \frac{117}{12} - 607}$ $\quad 3\frac{9}{3}\left(\frac{9 \cdot 13}{12} - 2r\right) = \frac{13}{}$

$\frac{117}{12} - 2r = \frac{13}{3}$

$2r = \frac{117}{12} - \frac{13}{3} = \cancel{\frac{117 - 52}{12}} = \frac{9 \cdot 13 - 13 \cdot 4}{12} = \frac{5 \cdot 13}{12} =$

$r = \frac{5 \cdot 13}{24}$; $R = \frac{3 \cdot 13}{4 \cdot 2} = \frac{39}{8}$

$= \frac{65}{24}$; $AC = \frac{5}{13} \cdot 2 \cdot \frac{39}{8} = \frac{15}{4}$; $tg\,\alpha = \frac{5 \cdot 12}{8 \cdot 169} = \frac{2}{3}$

$169 \cdot 3 = 507$

$89 \cdot 89$, 261, 117, 1431

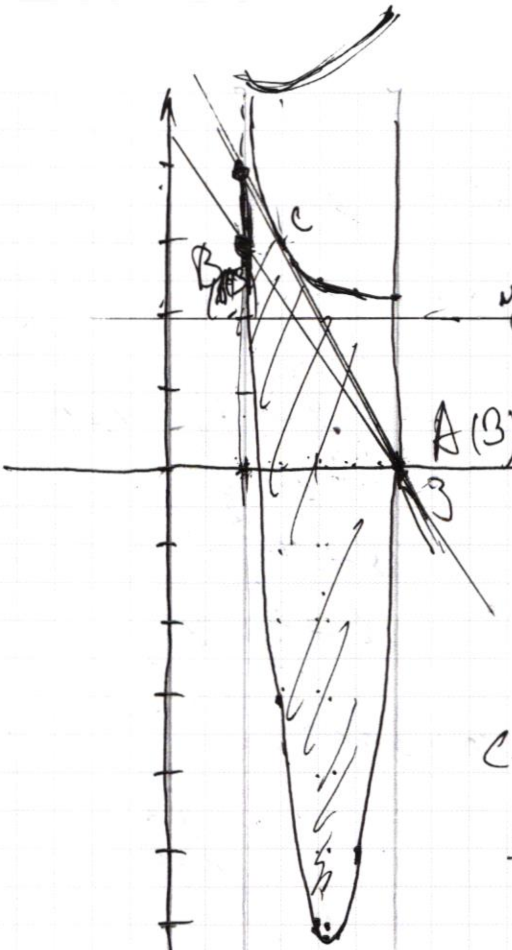
$27 \cdot 13 = 351$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$y_0 = \frac{8\cdot 17^2}{8^2} - \frac{2\cdot 17^2}{8} + 30 =$

$= -\frac{17^2}{8} + 30 = -6{,}125$

$17 \cdot 17 = 119$
17
$\frac{289}{8} =$
$= 36{,}125$

$2{,}5:\ 8\cdot\frac{25}{4} - 34\cdot\frac{5}{2} + 30 =$

$= 50 - 85 + 30 = -5$

$\frac{3}{2}:\ 8\cdot\frac{9}{4} - 34\cdot\frac{3}{2} + 30 =$

$= 18 - 51 + 30 = 48 - 51 = -3$

C – точка касания!

$3a + b = 0$

$a = -\frac{b}{3} \quad b = -3a$

$y = ax - 3a$

$ax - 3a$

$a - 3a = 3 \quad -2a = 3 \ \begin{cases} a = -1{,}5 \\ b = 4{,}5 \end{cases}$

$ax - 3a = \frac{4x - 3}{2x - 2}$

$a(x-3)(2x-2) = 4x - 3$

$a(4x^2 - 10x + 6) = 4x - 3$

$4ax^2 - 10ax + 6a - 4x + 3 = 0$

$4ax^2 - 2x(5a+2) + 6a + 3 = 0$

$D_1 = 25a^2 + 20a + 4 - 24a^2 - 12a =$

$= a^2 + 8a + 4 = 0$

$D_1 = 16 - 4 = 12$

$a = -4 \pm 2\sqrt{3} = -4 + 2\sqrt{3}$
$-4 - 2\sqrt{3}$

$\begin{cases} b = 12 + 6\sqrt{3} = 22{,}2 + \\ b = 12 - 6\sqrt{3} \approx 1{,}2 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$,

$ax+b \geq 8x^2-34x+30$;

1) $y=\frac{4x-3}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}$

$2+\frac{1}{4}=2{,}25$

$2+\frac{1}{2}$

$2+1=3$

$2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$

$4x-3 \mid 2x-2$, $4x-4$, 2, 1

$y=2$, $x=1$ – асимптоты

x	3	2	1,5	2,5
$2+\frac{1}{2x-2}$	2,25	2,5	3	$2\frac{1}{3}$

$84 + 54 = 136$

2) $y=8x^2-34x+30$ – кв. ф-ия, график – парабола

$x_0=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2{,}125$ $y_0=8\cdot\frac{17^2}{8^2}-2\cdot\frac{17\cdot 17}{4}+30-$

$=\frac{8\cdot 17^2-8\cdot 17^2}{16}+30$

$72-102+30=0$

$32-68+30=-6$

$8-34+30=4$

x	2	3	4		1
y	−6	0	22	30	4

$17x=2\cdot 2x\cdot\frac{17}{4}$

$10\frac{3}{4}$

3) $y=ax+b$.

1: $8-34+30=4$

2: $32-68+30=-6$

3: $72-102+30=0$

$2(4x^2-17x+15)=$

$=2((2x-\frac{17}{4})^2-\frac{17}{4}+15)=$

$=2(2x-4{,}25)^2+20\frac{3}{2}=21{,}5$

1: $2(2{,}25)^2+21{,}5=\frac{81}{8}+\frac{43}{2}$

$2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ $\frac{81}{16}\cdot\frac{81}{8}$ $21\frac{1}{2}=\frac{43}{2}$

2: $2\cdot(\frac{1}{4})^2+21{,}5=\frac{1}{8}+21{,}5=$

$=21{,}625$

$172+81=\frac{253}{8}=$

$=31\frac{5}{8}$

3: $2(1{,}75)^2+21{,}5=2\cdot\frac{49}{16}+21{,}625$

$1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$ $=\frac{49}{8}+21{,}5=6\frac{1}{8}+21{,}5=6{,}125+21{,}5=27{,}625$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)