МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t = \dfrac{4^{t^{\log_4 3}} \cdot 4^t}{4^{t^{\log_4 5}}} \geq 1$

$f(t) = \ldots$

$f'(t) = \log_4 3 \cdot t^{\log_4 3 - \log_4 4} - \log_4 5 \cdot t^{\log_4 5 - 1} + 1$

$\dfrac{4^{\log_4 3} \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}}}{4^{\log_4 5} \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}}} = \dfrac{1}{4}$

$\log_4 \frac{3}{4} \cdot t^{\log_4 \frac{4}{3} - 1} = 0$

$(-)\cdot(-)$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}}$ $\quad t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$\log_4 3 \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}} + \ldots$

$t \to +\infty \quad \dfrac{1}{t^{\log_4 \frac{4}{3}}} \to 0$

$x = 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\log_{48} 3 \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}} = \log_4 5 \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1$

$5 \cdot 3^{t^{\log_4 \frac{3}{4}}} = 5^{t^{\log_4 \frac{5}{4}}}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t = 0$

$t = 16$

$t=2$

$2^{\frac{1}{2}\log_2 3} - 2^{\frac{1}{3}\log_2 5} + 2 = 0$

$x^2 + 2 \cdot 3x +$
9

$\cancel{\sqrt{3} - \sqrt{5} \neq -2}$

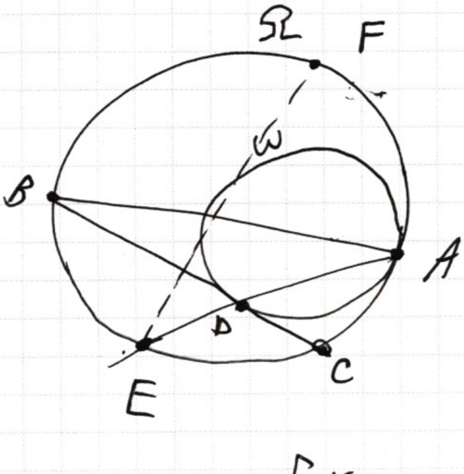
$\cancel{3 + 5 - 2\sqrt{15} \neq 4}$

$t=4$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = 0$

$\frac{4+3}{12} \neq \frac{1}{5}$

$4^{2\log_4 3} - 4^{2\log_4 5} + 16 = 0$



4^2 $\frac{3}{5}$ 27 $\times\frac{35}{9}$

4^3

$4^{3\log_4 3}$

$3^3 - 5^3 + 4^3$

$4^{3\log_4 5} + 4^3$

$9 - 125$

$f(x) = \left[\frac{x}{4}\right]$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{1}{4y}\right]$

при $y \in$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cos 2\beta \ldots$

$1-2\sin^2 x = \cos 2x$

$2\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{17}$

$\ldots\ldots$

$1 - \ldots = \cos(4\alpha+4\beta)$

$1-\frac{2}{17} = \frac{15}{17} = \cos(4\alpha+4\beta)$

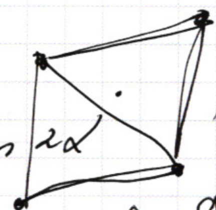
$\cos 4\alpha \cos 4\beta - \sin 4\alpha \sin 4\beta = \frac{15}{17}$

$\cos 4\beta = \left(\frac{15}{17} + \sin 4\alpha \sin 4\beta\right)\frac{1}{\cos 4\alpha}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}\left(\frac{15}{17} + \sin 4\alpha \sin 4\beta\right) + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{18}{17}$

$\sin(2\alpha+3\beta-\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$



$\sin(2\alpha+3\beta+\beta) = -\frac{8}{17} - \sin 2\alpha$

$4\sin\alpha = -\cos\alpha$

$4\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{4}$

b6o1

$\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta - \cos(2\alpha+3\beta)\sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta + \ldots = -\sin 2\alpha - \frac{8}{17}$

$2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k$ 9b01 b9b01 9 = 9b01 V

$2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k$ b9b01 9 = V

$4\beta = 2\arcsin(-\ldots) + 4\pi k - 4\alpha$

$2\beta = a\text{csin}(\ldots) + 2\pi k - 2\alpha$ bb01 9 = 9 b01 V

$\sin(-2\alpha + 2\arcsin(\ldots)) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$4\beta = 2\pi - 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 4\pi n - 4\alpha$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$\cancel{3x^2-6x+3+3y^2-4y}$

$9y^2-12xy+4x^2=$

$\cancel{3x(x-2)+y(3y-4)=4}$

$=3xy-2x-3y+2$

$3y-2x\geq 0$

$3y\geq 2x$

$4\cdot t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t$

$9y^2-15xy-2x-3y+4x^2-2=0$

$3x^2-6x+3=3(x-1)^2=5+4y-3y^2$

из (2):

$3x^2-6x+3\quad+3y^2-4y=4+2$

$3(x-1)^2=7+4y-3y^2$

$\sqrt{3xy-2x-3y+2}=3y(x-1)$

$3y^2-4y-7$

$y_1=-1$ — ок

$y_2=\frac{7}{3}$

$(y+1)(3y-7)$

$3y^2-7y+3y-7$

$\sqrt{x-1}=a$

$\sqrt{3y-2}=b$

$3y^2-2x+2=a-2b$

$3y-2x=a-2b$

тогда:

$a-2b=ab$

$3a^2+(b-5)($

$\sqrt{x-1}=a$

$2a^2=2x-2$

$b^2=3y-2$

$3y-2-2x+2=b^2-2a^2$

$3y=b^2+2$

$y=\frac{b^2}{3}+\frac{2}{3}$

$(2\cdot 12)^2-8\cdot 30\cdot 4=$

$3\cdot 4+3\cdot 4-6\cdot 2-4\cdot 2=4$

$24-12-8=4$

$b^2-2a^2-ab+b^2-2a^2=$

$(b-2a)(b+a)$

$\sqrt{3\cdot 4-4-3\cdot 2+2}=$

$=\sqrt{12-4-6+2}=$

$=\sqrt{4}=2$

$6-4=2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$tg\,\alpha = ?$

заметим: если $\sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, то $\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}$ или $\cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

(2): $\sin((2\alpha + 2\beta) + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

из (1): (а) $2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k$ или (б) $2\alpha + 2\beta = -\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi + 2\pi n$

$4\beta = 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 4\pi k - 4\alpha$ $\quad k, n \in \mathbb{Z}$ $\quad 4\beta = 2\pi - 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 4\pi n - 4\alpha$

в (2): (а) $\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 4\pi k - 2\alpha\right) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - 2\alpha\right) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)\cos 2\alpha - \cos\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

(а1) $2\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha - \left(1 - 2\cdot\frac{1}{17}\right)\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{8}{17} - \frac{8}{17}\cos 2\alpha = -\frac{2}{17}\sin 2\alpha \quad \Big|\cdot\frac{17}{2}$

$4(1 - \cos 2\alpha) = -\sin 2\alpha$

$4(1 - 2\cos^2\alpha + 1) = -2\sin\alpha\cos\alpha$

$8 - 8\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$8\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$4\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\sin\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0 \qquad tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$tg\,\alpha = 0$

(а2) $2\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\alpha - \left(1 - \frac{2}{17}\right)\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{8}{17}\cos 2\alpha + \frac{2}{17}\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \quad \Big|\cdot\frac{17}{2}$

$4(\cos 2\alpha + 1) + \sin 2\alpha = 0$

$4(2\cos^2\alpha - 1 + 1) + \sin 2\alpha = 0$

$8\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$ $\qquad$ $tg\,\alpha = -4$

$\Downarrow$

значение $tg\,\alpha$ не определено

(б1) $\sin\left(2\pi - 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 4\pi n - 2\alpha\right) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

аналогично (а1), также (б2) аналогично (а2)

Ответ: $tg\,\alpha = 0$;
$tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$;
$tg\,\alpha = -4$.

№2

ограничение:
$3y \geq 2x$ (т.к. $\sqrt{\ } \geq 0$)
$3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)} \\ 3x^2 - 6x + 3y^2 - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x-1)^2 + 3y^2 - 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x-1)^2 + (y+1)(3y-7) = 0 \end{cases}$$

пусть $\sqrt{x-1} = a$, $a \geq 0$ (*)
$\sqrt{3y-2} = b$, $b \geq 0$, тогда:

$$\begin{cases} b^2 - 2a^2 = ab \\ 3a^4 + (b^2 - 5)\left(\frac{b^2}{3} + \frac{5}{3}\right) = 0 \mid \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 - ab - 2a^2 = 0 \\ 9a^4 + (b^2-5)(b^2+5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b-2a)(b+a) = 0 & (1) \\ 9a^4 + b^4 - 25 = 0 & (2) \end{cases}$$

из (1): $\boxed{b = 2a}$ (а) $\qquad$ или $\qquad$ $\boxed{b = -a}$ (б)

-невозможно при $b > 0$, $a > 0$, возможно только при $a = b = 0$, но $a = 0$, $b = 0$ не уд (2).

(а) (2): $9a^4 + 16a^4 - 25 = 0$

$16a^4 + 9a^4 - 25 = 0$

$\cancel{(a^2-1)(16a^2+25) = 0}$

$a^2 = 1$ $\qquad$ или $\qquad$ $16a^2 = -25$ — нет решен.

$a = \pm 1$ — уд

-1 не уд.

$a = 1$

$b = 2$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{3y-2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$25a^4 = 25$

$a^4 = 1$ — уд ⊛

$a = \pm 1$

не уд ⊛

$\boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix}}$ Ответ: $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

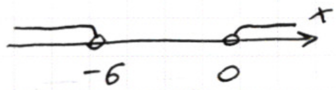
$\boxed{\begin{matrix} x = 1\cdot 2 \\ y=2 \end{matrix}}$

N3

$3^{\log_4 (x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

ограничение:

$x^2+6x>0$



$3^{\log_4 (x^2+6x)} - |x^2+6x|^{\log_4 5} + x^2+6x \geq 0$

пусть $t = x^2+6x$, $t>0$ ⊛, тогда:

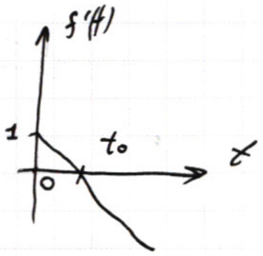
$3^{\log_4 t} - |t|^{\log_4 5} + t \geq 0$

$3^{\log_4 t} - t^{\log_4 5} + t \geq 0$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t \geq 0$

$f(t) = t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t$

$f'(t) = \log_4 3 \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}} - \log_4 5 \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}} + 1$



$f'(t) = 0$:

$\underbrace{\log_4 3}_{>0} \cdot \underbrace{t^{\log_4 \frac{3}{4}}}_{\downarrow} - \underbrace{\log_4 5}_{>0} \cdot \underbrace{t^{\log_4 \frac{5}{4}}}_{\nearrow} = -1$

$\frac{\log_4 3}{t^{\log_4 \frac{4}{3}}} = \log_4 5 \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1$

$f'(t) \downarrow$ монотонно как сумма монотонно $\downarrow$ функций.

~~$g'(t) = f''(t) = (\log_4 3 \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}} - \log_4 5 \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}} + 1)' =$~~

~~$= \log_4 3 \cdot \log_4 \frac{3}{4} \cdot t^{\log_4 \frac{3}{16}} - \log_4 5 \cdot \log_4 \frac{5}{4} \cdot t^{\log_4 \frac{5}{16}}$~~

~~$f''(t)$ – монотонно убывающая функция (при $t>0$), значит $f''(t)=0$ только при $t=0$, но $t=0$ не уд ⊛.~~

~~т.е. при $\forall t \in$ ⊛:~~

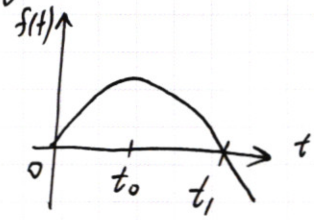
~~$f''(t)<0 \Rightarrow f'(t) \downarrow$ монотонно и только при 1 значении t_0 $f'(t_0)=0$~~

~~при $t \in (0; t_0)$ $f(t) \nearrow$ при $t \in (t_0; +\infty)$ $f(t) \downarrow$~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) пусть при t_0 $f(t)=0$, тогда:

при $t\in(0;t_0)$ $f(t)\nearrow$, при $t\in(t_0;+\infty)$ $f(t)\searrow$

для выполнение условия, что $f(t)\geq 0$:



$t\in(0;t_1]$, где $t_1>t_0$, $f(t_1)=0$

только при 1 значении $t>0$ $f(t)=0$

при $t_1=16$:

$f(16)=16^{\log_4 3}-16^{\log_4 5}+16=$

$=4^{(\log_4 3)\cdot 2}-4^{(\log_4 5)\cdot 2}+16=$

$3^2+4^2-5^2=0$

тогда $t\in(0;16]$

$0<x^2+6x\leq 16$

$\begin{cases} x^2+6x>0 & (1)\\ x^2+6x\leq 16 & (2)\end{cases}$

(1): $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

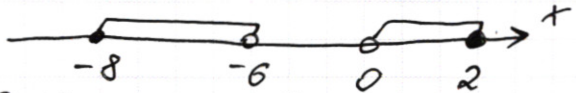
(2): $x^2+6x-16\leq 0$

$x^2+6x+9\leq 25$

$(x+3)^2\leq 25$

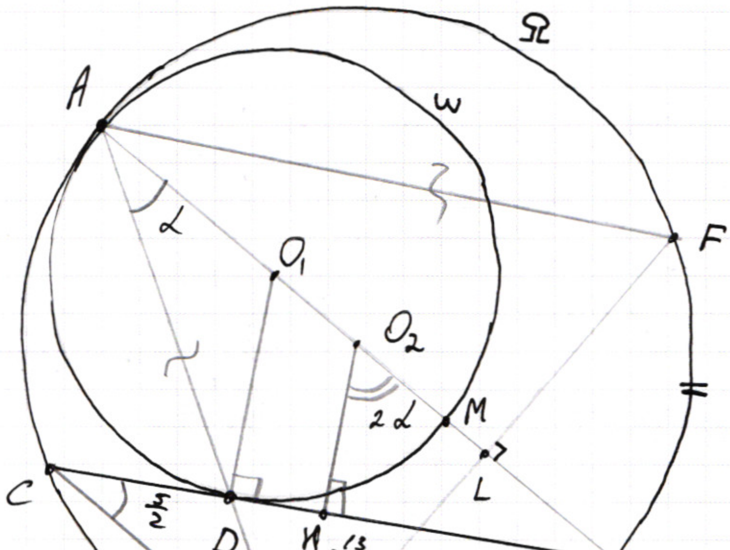
$-5\leq x+3\leq 5$

$-8\leq x\leq 2$



Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

N 4



Найти: R, r, $\angle AEF$, S_{AEF}

Дано: $CD=\frac{5}{2}$

$BD=\frac{13}{2}$

Решение: O_1 и O_2 - центры ω и Ω соответственно.

1) $\angle AEF=\angle ABF$ (опир. на AF окр-сти Ω)

$\angle AFB=90°$ (опир. на диаметр)

из $\triangle AFB$:

$\angle ABF=\angle AFE$

т.е $\angle AFE=\angle AEF$

$\Downarrow$

$\smile AF=\smile AE$

также: AB - диаметр Ω, а $EF\perp AB$, тогда

в $\triangle EO_2F$: O_2L - перп. и бис-са

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $EO_2 = O_2F \Rightarrow \angle EO_2B = \angle FO_2B \Rightarrow \breve{EB} = \breve{BF}$

2) $O_2H \perp AB$, тогда в $\triangle CO_2B$ O_2H - высота и медиана.
образуется 3 подобных $\triangle$-ка: (прямоугольных) $BH = CH = \frac{9}{2}$

$\triangle BO_2H \sim \triangle BO_1D \sim \triangle BAC$

пусть $AO_1 = r$
$O_2B = R$, тогда из подобия:

$\frac{BH}{O_2B} = \frac{DB}{O_1B} = \frac{CB}{AB}$

$\frac{9}{2R} = \frac{13}{2(R+R-r)} = \frac{9}{2R}$

$9(2R-r) = 13R$

$18R - 9r = 13R$

$5R = 9r$

$R = \frac{9}{5}r$

по теореме о секущей и касательной:

$BD^2 = BM \cdot AB$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = (2R-2r)\cdot 2R$

$\frac{169}{4} = 4R(R-r)$

$\frac{169}{16} = \frac{9}{5}r \cdot \frac{4}{5}r$

$\frac{36}{25}r^2 = \frac{169}{16}$

$r^2 = \frac{5^2 \cdot 13^2}{4^2 \cdot 6^2}$

$r = \frac{5\cdot 13}{24} = \frac{65}{24}$

$R = \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}\cdot 13}{4\cdot \cancel{6}_2} = \frac{39}{8}$

3) $\angle AEF = 90° - \angle EAB$

$\angle EAL = \angle ECB$ (опр. на $\breve{EB}$ Ω)

$\angle EAL = \angle ECB$

$\angle ECB = \frac{1}{2}\angle EO_2B$ (центр. и вписанные углы для Ω)

в $\triangle O_2BH$: $\angle BO_2H = \angle BO_2E$

$\triangle BO_2H$ и $\triangle BAC$ подобны, $k = 2$, $\angle BAC = \angle BO_2H$, $CH = HB$

- в $\triangle O_2HB$: пусть $\angle BAE = \alpha$ продолжение O_2H попадает в т. E.

$\sin 2\alpha = \frac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4}{\cancel{2}\cdot \cancel{39}_{13}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{13^2-12^2}}{13} = \frac{5}{13}$

$2\alpha = \arcsin\frac{12}{13}$

$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} = \angle EAB$

$\hookrightarrow \angle AEF = 90° - \alpha = 90° - \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13}$.

4) в $\triangle O_2BE$:

по т. косинусов:

$EB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 2\alpha$

$EB^2 = 2R^2(1-\cos 2\alpha) = 2R^2\cdot\left(1-\frac{5}{13}\right) = \frac{\cancel{8}}{\cancel{13}}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{39^{\cancel{2}}\cdot 3}{\cancel{8^2}\ 4} =$

$= \frac{3\cdot 13}{4} = \frac{39}{4}$

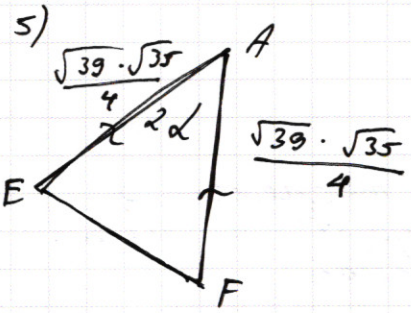
$AE^2 = AB^2 - EB^2$

$AE^2 = 4R^2 - \frac{39}{4} = \cancel{4}\cdot\frac{39^2}{2\cdot 8^2} - \frac{39}{4}$

$AE^2 = \frac{39}{4}\left(\frac{39}{4}-1\right) = \frac{39}{4}\cdot\frac{35}{4}$

$AE = \frac{\sqrt{39\cdot 35}}{4}$

5)



в $\triangle AEF$: $\triangle AEF$ р/б.

по т. синусов:

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF\cdot \sin 2\alpha =$

$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{39}}\cdot 35}{16}\cdot\frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{13}} = \frac{3\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 35}{\cancel{16}\ 8} =$

$= \frac{9\cdot 35}{8} = \frac{315}{8}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$;

$r = \frac{65}{24}$;

$\angle AEF = 90^\circ - \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13}$;

$S_{AEF} = \frac{315}{8}$.

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $(x;y)$ натур. числа

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, p - простое число.

$3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\cancel{f(x) = \left[\frac{x}{4}\right]}$

$\cancel{f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{1}{4y}\right]}$ ~~при~~ $\cancel{y \in [3;27]}$ $\cancel{\in N}$

$\cancel{\frac{1}{4y} \in \left[\frac{1}{4\cdot 27};\ \frac{1}{12}\right]}$, $\cancel{\left[\frac{1}{4y}\right] = 0}$ ~~при всех таких~~ y.

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + 0 < 0}$

$\cancel{f(x) < 0}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

пусть $a = 1p$,
$b = \frac{1}{p}$, тогда:

$f(1) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$1 = \left[\frac{p}{4}\right] + f\left(\frac{1}{p}\right)$

любое натуральное число можно представить в виде произведения простых чисел.

для любого a:

$f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$0 - f(a) = f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(a^2) = 2f(a)$

$f(1\cdot b) = f(1) + f(b)$

$f(b) = f(1) + f(b)$

$f(1) = 0.$

p, q - простые числа

$f(p\cdot q) = f(p) + f(q)$

$f(p\cdot q) = \left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{q}{4}\right]$

Ответ:

$S = 10\cdot15 + 8\cdot7 + 5\cdot2 + 2\cdot3 + 2 =$
$= 150 + 56 + 10 + 8 =$
$= 160 + 64 = 224$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

при $x = 3$:
$f(3) = 0$

$y = 4$
$f(4) = 1$ - уд.

$y = 5$
- уд.

$y = 6 = 2\cdot3$
$f(6) = \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

любое из чисел x и y можно представить в виде:

$x = 2^n\cdot3^m\cdot4^l\cdot\ldots$

(есть ограничения на n, m, l)

при $x = 3$ необходимо, чтобы среди мн. y были числа, ≥ 5 часть

$3 = 3$
$4 = 2\cdot2$
$5 = 5$
$6 = 2\cdot3$
$7 = 7$
$8 = 2\cdot2\cdot2$
$9 = 3\cdot3$
$10 = 2\cdot5$
$11 = 11$
$12 = 2\cdot2\cdot3$
$13 = 13$
$14 = 2\cdot7$
$15 = 3\cdot5$
$16 = 2^4$
$17 = 17$
$18 = 2\cdot3\cdot3$
$19 = 19$
$20 = 2\cdot2\cdot5$
$21 = 3\cdot7$
$22 = 2\cdot11$
$23 = 23$
$24 = 2\cdot2\cdot2\cdot3$
$25 = 5\cdot5$
$26 = 2\cdot13$
$27 = 3^3$

и т.д. для др. x.

• $x = 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 27$

$f(x) = 0$

каждому из данных x уд. 15 знач. y.

• $x = 5; 7; 10; 14; 15; 20; 21; 25$

кажд. зн. уд. 7 зн. y.

• $x = 11; 22$ - 5 зн. y.

• $x = 13; 26$ - 3 зн. y.

• $x = 17; 19$ - 1 зн. y.

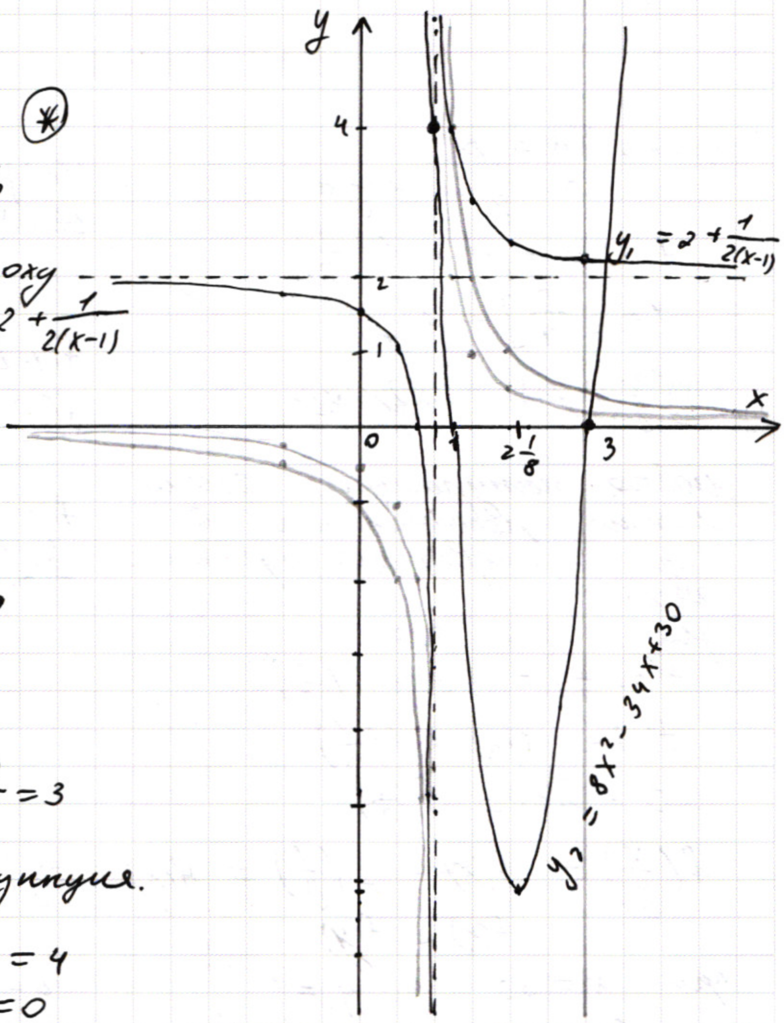
№ 6

$(a;b) = ?$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ верно $\forall x \in (1;\ 3]$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \\ 8x^2-34x+30 \leq ax+b \end{cases} \quad (*)$$



рассмотрим плоскость оху

$y_1 = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$y_2 = 8x^2-34x+30$

$x_в = \frac{34}{2\cdot 8} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$

$D = 4\cdot 17^2 - 4\cdot 8\cdot 30 =$
$= 4\cdot(289-240) = 4\cdot 49$

$D = 14^2$

$x = \frac{34 \pm 14}{16}$

$x_1 = \frac{5}{4}$ $\quad x_2 = \frac{48}{16} = \frac{12}{4} = 3$

$y_3 = ax+b$ – линейная функция.

$y_1 \geq y_3$ $\quad y_2(1) = 4$

$y_3 \leq y_2$ $\quad y_2(3) = 0$

рассмотрим такую лин. функцию, что она проходит через т. $(3;0)$ и $(1;4)$:

$y_3 = a_1x+b_1$, тогда:

$0 = 3a_1+b_1$

$4 = a_1+b_1$

$-4 = 2a_1$

$\begin{cases} a_1 = -2 \\ b_1 = 6 \end{cases}$

$y_3 = -2x+6$

$-2x+\cancel{6}_{+4} = \cancel{2} + \frac{1}{2(x-1)}$

$4-2x = \frac{1}{2x-2}$

$2(2-x)\cdot 2(x-1) = 1$

$8x - 8 - 4x^2 + 4x = 1$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$(2x-3)^2 = 0$

$x = 1{,}5$ – 1 корень, т.е. $y_3 =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= -2x+6$

касается функции $y_1 = 2 + \frac{1}{2x-2}$ в т. $(1{,}5;\ 3)$

при $\uparrow a$ ~~[illegible]~~ не при всех $x \in (1;\ 3]$

y_2 будет $\le y_3$, при $\downarrow a$ y_1 не всегда $\ge y_3$

а при $\uparrow b$ не при всех $x \in [1;3]$ y_1 будет $\ge y_3$,

т.к. прямая $y_3 = -2x+6$ начнет пересекать

гр. функции $y_1 = 2 + \frac{1}{2x-2}$ при $\downarrow b$ не всегда $y_2 \le y_3$.

значит только 1 прямая уд. системе (*), одно значение $(a;b)$

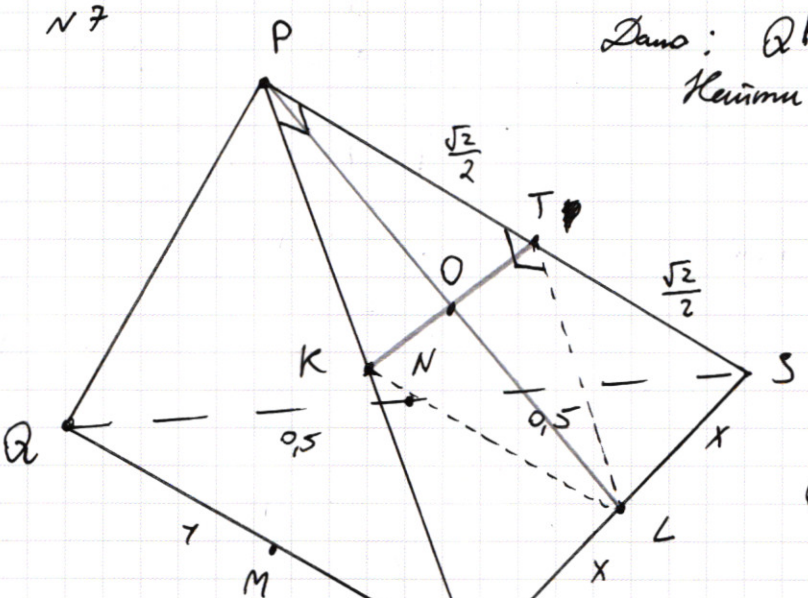
Ответ: $(-2;6)$.

N 7

Дано: $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$

Найти: $RS = ?$

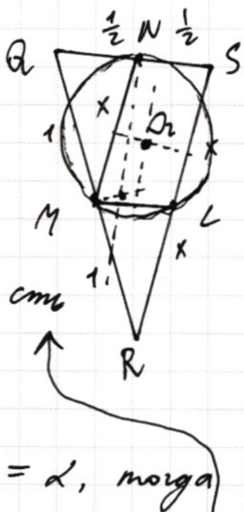
$R_{min} = ?$



Решение: пусть $RS = 2x$, тогда:

в пл. (QRS):

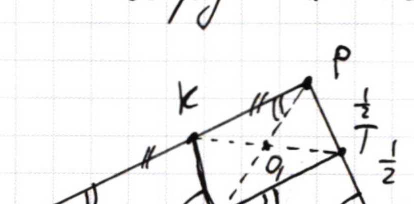
т. O - центр сф. сфера W пересекает пл. по окр-сти, проходящей через середины сторон $\triangle QSR$. $(M; L; N)$



$OO_2 \perp (QSR)$

в пл. (PRS):

вокруг ~~[illegible]~~ KPTL описать окр-сть можно



KL - ср. линия

LT - тоже.

пусть $\angle RKL = \alpha$, тогда

$\angle LTS = \alpha$

$\angle PKL + \angle PTL = 180°$

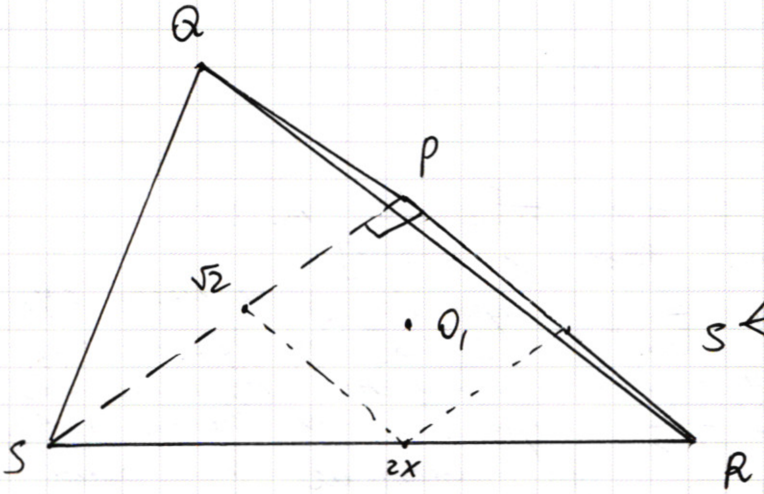
$2 \cdot 180° - 2\alpha = 180°$

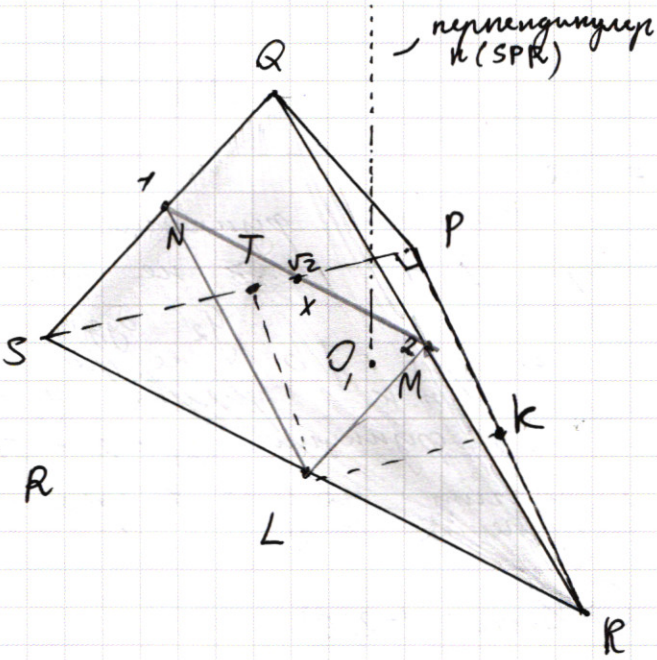
$\alpha = 90°$

KLTP - прямоугольник $KT \cap PL = O$

центр ~~окружн~~ сферы W лежит на перпендикуляре, проведенном к пл. (PRS) через т. O_1

$PL = x$, $NM = x$.





☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)