МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{8}{17}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = -\frac{8}{17}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{1}\right) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot\sqrt{17}$$

$$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1-4\sin 2\alpha \quad |^2 \qquad -1-4\sin 2\alpha \geq 0 \Rightarrow \sin 2\alpha \leq -\frac{1}{4}$$

$$1-\sin^2 2\alpha = 1+8\sin 2\alpha+16\sin^2 2\alpha$$

$$17\sin^2 2\alpha + 8\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha\left(\sin 2\alpha+\frac{8}{17}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = \pi n \\ 2\alpha = -\arcsin\left(\frac{8}{17}\right)+2\pi k \\ 2\alpha = \pi+\arcsin\left(\frac{8}{17}\right)+2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = \pi+2\pi n \\ 2\alpha = \pm\arccos\frac{15}{17}+2\pi n \end{array}\right.$$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -1 \\ \cos 2\alpha = \frac{15}{17} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = \pi+2\pi n \\ 2\alpha = \arccos\frac{15}{17}+2\pi n \\ 2\alpha = -\arccos\frac{15}{17}+2\pi n \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha-1+1} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+1} \quad \frac{\overset{\sin 2\alpha=0}{0}}{\underset{\cos 2\alpha=-1}{-1+1}} \quad \varnothing$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = -\frac{8}{15}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+1} = \frac{\sin 2\alpha}{-1-4\sin 2\alpha+1} = -\frac{1}{4}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{\cancel{1}\,\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{2-\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{2tg\alpha}{2-tg^2\alpha-1} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \Rightarrow 1-tg^2\alpha = 2tg\alpha\cdot\frac{1}{tg2\alpha}$$

$$tg^2\alpha + 2\cdot\frac{1}{tg2\alpha}\cdot tg\alpha - 1 = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{tg\alpha} = \frac{-1}{\sin 2\alpha}} \quad 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$\frac{1}{tg2\alpha} = \frac{-1}{\sin 2\alpha} - 4 = \frac{17}{8} - 4 = -\frac{15}{8}$$

$$tg^2\alpha - \frac{15}{4}tg\alpha - 1 = 0$$

$$D = \frac{225}{16} + 4 = \frac{289}{16} = \left(\frac{17}{4}\right)^2 \Rightarrow tg\alpha_1 = \frac{\frac{15}{4}-\frac{17}{4}}{2} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$tg\alpha_2 = \frac{\frac{15}{4}+\frac{17}{4}}{2} = \frac{32}{8} = 4$$

Ответ: $tg\alpha_1 = -\frac{1}{4}$

$tg\alpha_2 = -\frac{8}{15}$

$tg\alpha_3 = 4$

№2

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} = \sqrt{3y(x-1)-2(x-1)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad |:3 \end{cases}$$

$$3y-2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \Rightarrow \left(y-\frac{2}{3}\right)(x-1) \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq \frac{2}{3} \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq \frac{2}{3} \\ x \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$x^2-2x+1-1+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9} = \frac{4}{3}$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12+4+9}{9} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

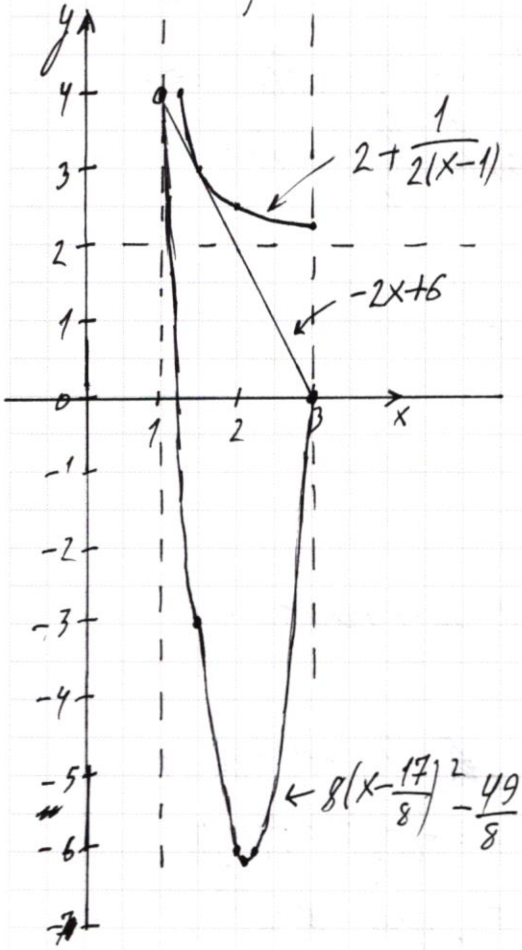
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 = 8\left(x^2-2\cdot\frac{17}{8}x+\frac{289}{64}-\frac{289}{64}\right)+30$$

$$2+\frac{1}{2(x-1)} \geq ax+b \geq 8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2-\frac{49}{8}$$



$-2x+6 \geq 8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2-\frac{49}{8}$ при $x\in(1;3]$

$y=-2x+6$ — крайняя прямая, большая параболы

чтобы выполнялось $ax+b \geq 8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2-\frac{49}{8}$, $x\in(1;3]$,

нужно, чтобы $ax+b \geq -2x+6$, $x\in(1;3]$.

($y=-2x+6$ — крайняя, т.к. в точках $x=1$, $x=3$ касается параболы)

При этом заметим, что

$$-2x+6 = 2+\frac{1}{2(x-1)} \quad |\cdot 2$$

$$-4x+8 = \frac{1}{x-1} \quad |\cdot(x-1)\neq 0$$

$$-4x^2+4x+8x-8=1$$

$$4x^2-12x+9=0$$

$(2x-3)^2=0 \Rightarrow$ $y=-2x+6$, $y=2+\frac{1}{2(x-1)}$ касаются в 1 точке $x=\frac{3}{2}$

Поэтому $y=-2x+6$ — касательная к $y=2+\frac{1}{2(x-1)}$,

а это значит, что любая прямая $ax+b > -2x+6$, $x\in(1;3]$

будет иметь 2 общие точки с $y=2+\frac{1}{2(x-1)}$, что

означает, что $2+\frac{1}{2(x-1)} \geq ax+b$ не на всём промежутке $(1;3]$.

Поэтому $\begin{cases} ax+b \leq -2x+6, & \text{т.к. } -2x+6 \leq 2+\frac{1}{2(x-1)} \\ ax+b \geq -2x+6, & \text{т.к. } -2x+6 \geq 8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2-\frac{49}{8} \end{cases} \Rightarrow$ Ответ: $a=-2$, $b=6$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№5 $f(a^n) = f(a) + f(a^{n-1}) = \underbrace{f(a)+\dots+f(a)}_{n} = n\cdot f(a)$, $n>0$, $n\in\mathbb{Z}$

$f(a^{-1}) = f(\frac{1}{a}) = f(\frac{a}{a^2}) = f(a) + f(a^{-2}) = f(a) + 2f(a^{-1})$

$f(a^{-1}) = f(a) + 2f(a^{-1}) \Rightarrow \boxed{f(a^{-1}) = -f(a)} \Rightarrow f(a^n) = n\cdot f(a)$, $n\in\mathbb{Z}$

$a = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$, p_i – простое, $a\in\mathbb{N} \Rightarrow \alpha_i \geq 0$

$$\begin{cases} f(a) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2\cdot f(p_2) + \dots + \alpha_n f(p_n) \\ \alpha_i \geq 0 \\ f(p) = [p/4] \geq 0 \end{cases} \rightarrow f(a)\geq 0,\ a\in\mathbb{N}$$

$f(x/y) = f(x) + f(y^{-1}) = f(x) - f(y) < 0$, $x,y\in\mathbb{N} \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Нужно найти такие пары $(x;y)$, чтобы $f(y) > f(x)$.

При $p<4$ $f(p)=0$

$p<27 \Rightarrow \max(p) = 23 \Rightarrow \max f(p) = 5$

$p\in\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

$f(p)\in\{0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5\}$

$f(y) = \alpha_1\cdot 0 + \alpha_2\cdot 0 + \alpha_3\cdot 1 + \alpha_4\cdot 1 + \alpha_5\cdot 2 + \alpha_6\cdot 3 + \alpha_7\cdot 4 + \alpha_8\cdot 4 + \alpha_9\cdot 5$

$f(x) = \beta_1\cdot 0 + \dots + \beta_9\cdot 5$

$f(25) = 2\cdot 1 = 2$, $f(27) = 3\cdot 0 = 0$, $f(23) = 5$, $f(24)=0$, $f(26)=3$

$0+5 = 1+4 = 2+3$, $f(a) = 5 \Rightarrow f(23) = f(\underset{27}{5\cdot 17}) = f(\underset{27}{11\cdot 13})$

Максимальный $f(a)=5$, при $a=23$

$f(a)=4 \Rightarrow_4 f(17) = f(19) = f(\underset{27}{5\cdot 13}) = f(\underset{27}{11\cdot 11}) \Rightarrow f(a)=4$, при $a = 17; 19$

$f(a)=3 \Rightarrow_3 f(13) = f(13\cdot 2) = f(\overset{27}{11\cdot 5}) \Rightarrow f(a) = 3$, при $a = 13; 26$

$f(a)=2 \Rightarrow_2 = f(11) = f(22) = f(\underset{27}{5\cdot 7}) \Rightarrow f=2$, при $a = 11, 22$

$f(a)=1 \Rightarrow_1 = f(5) = f(10) = f(15) = f(20) = f(25) = f(7) = f(14) = f(21) = f(28)$

При остальных $f(a)=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 продолжение все x кроме 23 x y

$f(y) > f(x) \Rightarrow$ [$5 > f(x)$, ~~...~~ $\Rightarrow$ 24 реш · 1 реш

$f(y)=5 \to$

$f(y)=4 \to$ $4 > f(x)$ все x кроме 23, 17, 19 $\Rightarrow$ 22 реш · 2 реш

$f(y)=3 \to$ $3 > f(x)$ все x кром 23, 17, 19, 13, 26 $\Rightarrow$ 20 реш · 2 реш

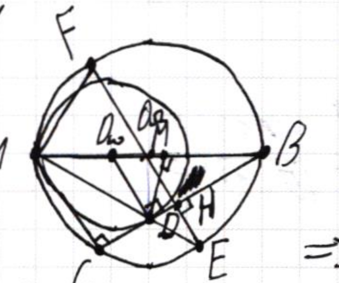
$f(y)=2 \to$ $2 > f(x)$ . . . . . . 11, 22 $\Rightarrow$ 18 реш · 2 реш

$f(y)=1 \to$ $1 > f(x)$ . . . . . . $5n$, $7n$ $\Rightarrow$ 9 реш · 9 реш.

Суммарно $24+44+40+36+81$ решений

Ответ: 225 пар

№4



AB - диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$

BD - касательная $\Rightarrow \angle BDO_\omega = 90^\circ$, O_ω - центр ω

$\Rightarrow AC \perp BC$, $O_\omega D \perp BC \Rightarrow AC \parallel O_\omega D \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BO_\omega D \sim \Delta BAC$ по углам $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_\omega}{BA} = \frac{O_\omega D}{AC}$

$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$ (по условию) $\Rightarrow BC = 9 \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{13}{18} = \frac{BO_\omega}{AB} = \frac{2R-r}{2R}$

r - радиус ω

R - радиус Ω

$\frac{r}{2R} = \frac{5}{18}$ ~~$\frac{BD}{BC}$~~ $\Rightarrow r = R \cdot \frac{5}{9}$

$BD^2 = (2R-2r)\cdot 2R = \left(2R - \frac{10}{9}R\right)\cdot 2R \Rightarrow \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{8}{9}R\cdot 2R = \frac{16}{9}R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = \frac{169}{4}\cdot\frac{9}{16} \Rightarrow R = \frac{13\cdot 3}{8} = \frac{39}{8} \Rightarrow r = \frac{39}{8}\cdot\frac{5}{9}$

$\frac{O_\omega D}{AC} = \frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{18} \Rightarrow AC = r\cdot\frac{18}{13} = \frac{39\cdot 5}{8\cdot 9}\cdot\frac{18}{13} = \frac{15}{4}$

$\angle ADC = \angle EDB$ (пересеч AE и BC) $\Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta EDH$ (по углам)

~~$DM \perp AB \Rightarrow O_\omega D \cdot BD = BO_\omega \cdot DM$ (половина $S_{BO_\omega D}$) $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow DM = \frac{O_\omega D\cdot BD}{BO_\omega} = \frac{13/2\cdot r}{2R-r} = \frac{5}{2}$~~

№4 продолжение

$\angle O_\omega DA = \alpha \Rightarrow \angle DEH = \alpha$ (соотв. углы $FE \parallel O_\omega D$, AE сек.)

$\angle DEH = \angle DAC$ (из подобия) $\Rightarrow \angle DAC = \alpha$

$\angle O_\omega DA = O_\omega AD$ (равнобедр. $r = r$)

$\Rightarrow \angle O_\omega AD = \angle DAC = \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{EB} \Rightarrow E$ – середина $\overset{\frown}{BC}$

$EH \perp BC \Rightarrow EF$ проходит через центр $\Omega \Rightarrow$

EF – диаметр $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \angle AFE = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\angle AFE = \angle ADC$, $tg \angle ADC = \frac{AC}{DC} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AFE = arctg \frac{3}{2}$ $\quad \triangle ACD \sim \triangle EAF \Rightarrow$ (по углам)

$\Rightarrow \frac{AD}{FE} = \frac{CD}{AF} = \frac{AC}{AE}$

$\frac{AD}{FE} = \frac{AD}{2R} = \frac{\sqrt{AC^2 + CD^2}}{2R} = \frac{\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}}{2 \cdot \frac{39}{8}} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+1}}{\frac{39}{4}} = \frac{5\sqrt{13}}{39}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{EAF}} = \left(\frac{AD}{FE}\right)^2 \Rightarrow S_{\triangle EAF} = S_{ACD} \cdot \left(\frac{FE}{AD}\right)^2 = \frac{AC \cdot CD}{2} \cdot \left(\frac{39}{5\sqrt{13}}\right)^2 =$

$= \frac{\frac{15}{4} \cdot \frac{5}{2}}{2} \cdot \frac{13^2 \cdot 9}{5^2 \cdot 13} = \frac{27 \cdot 13}{16}$

Ответ: $r = \frac{39}{8} \cdot \frac{5}{9}$; $R = \frac{39}{8}$;

$\angle AFE = arctg \frac{2}{3}$; $S_{AEF} = \frac{27 \cdot 13}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta \cdot \cos\beta \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = 2 \cdot \sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

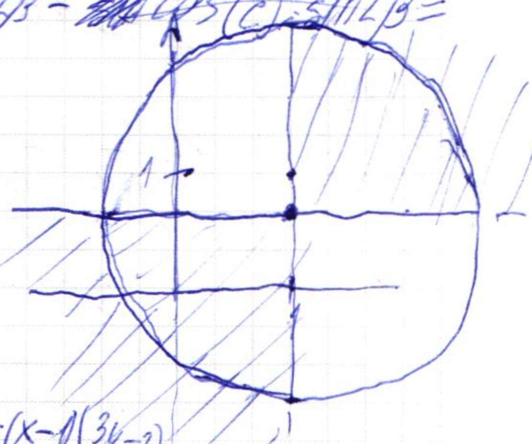
$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(c) \cdot \cos 2\beta + \cancel{\cos(c) \cdot \sin 2\beta} + \sin c \cdot \cos 2\beta - \cancel{\cos(c) \cdot \sin 2\beta} =$

$= 2\sin(c) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$y - \frac{2}{3}x$



$3y(x-1) - 2(x-1)$

$= a\, b / \sqrt{3}$

$\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$\left[\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{2}{3} \end{cases} \begin{cases} x < 1 \\ y \leq \frac{2}{3} \end{cases}\right.$

$a^2 + b^2 = \frac{5}{3}$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = (x-1)(3y-2)$

$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4}{3}y = \frac{4}{3}$

$(x-1)^2 - 1 + (y-\frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$

$(x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = \frac{12}{9} + \frac{4}{9} + \frac{9}{9} = \frac{25}{9} = (\frac{5}{3})^2$

$x^2 + (x^2+6x)^{\log_4 3} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (\ )^{\log_4 3}$

$(x^2+6x)^{\log_4 4} \geq (\ )^{\log_4 5} - (\ )^{\log_4 3}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$4 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1 - 4\sin 2\alpha$

$1-\sin^2\alpha = 1 + 8\sin 2\alpha + 16\sin^2\alpha$

$\sin\alpha\left(\sin\alpha + \frac{8}{17}\right) = 0$

$\frac{32}{17} - 1$

$\frac{32-17}{17} = \frac{15}{17}$

-1

$\begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -1 \end{cases}$

$\sin 2\alpha = \frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha =$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$?

$\frac{\sqrt{17^2 - 8^2}}{17} = \frac{\sqrt{25 \cdot 9}}{17} = \frac{15}{17}$ $\quad$ $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$

$1 - \operatorname{tg}^2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$

$\frac{15^2 + 8^2}{17^2} = 1$ $\quad$ $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}}$

$\frac{3}{2}$

$4\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{\cos 2\alpha} - 1$

$4\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{4}$

$12 - 7 = 5$

$\frac{23}{8} - \frac{49}{8}$

$4 + \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = -\frac{1}{\sin 2\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1$

$225 + 64$

$289 \overset{}{=} 17^2 \Rightarrow 1$

$2 + \frac{1}{2x-2}$ $\quad$ $2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$\cos^2\alpha -$

$-\frac{1}{\sin 2\alpha} - 4$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1 + 1}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1$

$8x^2 - 32x + 32 \quad -2x - 2$

$\frac{17}{8} - 4$

$8(x-2)^2 - 2(x+1)$

$8\left(x^2 - 2\frac{17}{8}x + \frac{30}{8}\right)$

$8\left(x^2 - 2\cdot\frac{17}{8} + \frac{289}{64} - \frac{289}{64} + \frac{30}{8}\right)$

$\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad$ $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$

$\frac{32}{2}$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$

$9xy$

$8\left(x - \frac{17}{8}\right)^2 + 30 - \frac{289}{8}$

$-1 - 4\sin 2\alpha$

$9y\left(y - x + \frac{1}{3}\right) + 4\left(x + \frac{1}{2}\right)x = 2$

$\frac{1}{8}(8x-17)^2 - \frac{49}{8}$

$240 - 289$

$-\frac{\sin 2\alpha}{4\sin 2\alpha}$

$\frac{40}{8} - \frac{49}{8}$ $\quad$ $\frac{81}{8}$ $\quad$ $8\left(\frac{8x-17}{8}\right)^2$

$8\left(\frac{8}{8} - \frac{17}{8}\right)^2 - \frac{49}{8}$

$8\left(x - \frac{17}{8}\right)^2 - \frac{49}{8}$

$40 - 8$ $\quad$ $12 - 8$ $\quad$ $41 - 9$ $\quad$ $\frac{1}{8} - \frac{49}{8}$

$\frac{81 - 49}{8} = \frac{}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

5 23
4 19, 17,

24+36
60+40
5 7 100
181
44
225

$y = -2x + 6$

$ax + b \geq -2x + 6$

$2^3 \cdot 3$

$-2x + 6$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)$

$\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}$

$= \frac{x' \cdot 2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$

f.

$f(x) = 5$
$f(23) = 5$
$f(27) = 0$
$f(29) = 2$

$\left(\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-1}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$

$-2x + 6 = 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$

$-4x + 8 = \frac{1}{x-1}$

$-4x(x-1) + 8(x-1) = 1$

$-4x^2 + 4x + 8x - 8 = 1$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$(2x-3)^2 = 0$

$f(x) + f(y)$

$x \cdot y^{-1}$

$\frac{x}{y}$

3 4 5 6 7 8 9

$\frac{1}{6}$

$f(a^{-1}) = f\left(\frac{a}{a^2}\right) = f(a) + 2f(a^{-1})$

$f(a^{-1}) = -f(a)$

$f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

$f(a^3) = 3f(a)$

$f\left(\frac{a^2}{a^3}\right) = 2f(a) - 3f(a)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) =$

$a \cdot a \cdot a = 3f(a)$

$a^b = bf(a)$

$a^{b-c} = (b-c)f(a)$

$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(a \cdot b)$

$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c} = \frac{(b-c)f(a)}{b\,f(a)} = \frac{b-c}{b} = 1$

$OD \cdot BD = BO \cdot DM$

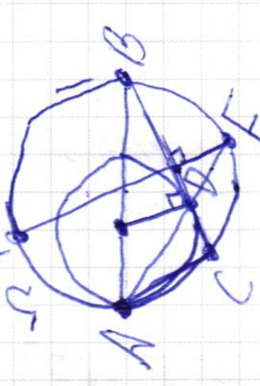
$DM = \cancel{2R-2r\ 13} \quad \dfrac{\frac{13}{2} \cdot r}{2R-r} = \dfrac{\frac{13}{2} \cdot \frac{39}{8} \cdot \frac{5}{9}}{2 \cdot \frac{39}{8} - \frac{39}{8} \cdot \frac{5}{9}} = \dfrac{\frac{13}{2} \cdot \frac{5}{9}}{\left(2 - \frac{5}{9}\right) \cdot \frac{13}{9}} = \frac{5}{2}$

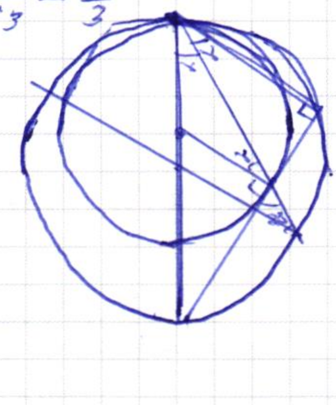
$\sqrt{BD^2 - R^2} = \sqrt{\frac{13^2}{4} - \left(\frac{39}{8}\right)^2} = \left(\frac{13}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{4}\right)$

$\frac{13}{2} \cdot \frac{3}{4} \qquad \frac{16-9}{4} \qquad \frac{3}{4}$

$\frac{13}{4}\sqrt{3}$

$\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{15}{4}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{3}$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА