МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} & (2). \end{cases}$

Из (2): $\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = -\sqrt{1-\cancel{\sin^2}\cos^2 2\beta} \\ \sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = -\sqrt{\frac{4}{5}} \\ \sin 2\beta = \sqrt{\frac{4}{5}} \end{array}\right.$ $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$.

Из (1): $\left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha + 2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Пусть $\arcsin\frac{1}{\sqrt5} = \varphi$ $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt5}$; $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt5}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$. Тогда:

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -2\beta - \cancel{\arcsin}\ \varphi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha = -2\beta + \pi + \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = \sin(-2\beta-\varphi) \\ \sin 2\alpha = \sin(\pi - (2\beta - \varphi)) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -\sin(2\beta+\varphi) \\ \sin 2\alpha = \sin(2\beta-\varphi) \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -\sin 2\beta\cos\varphi - \cos 2\beta\sin\varphi \\ \sin 2\alpha = +\sin 2\beta\cos\varphi - \cos 2\beta \sin\varphi \end{array}\right.$

$\sin 2\alpha = (\pm\cos\varphi)\cdot\sin 2\beta - \cos 2\beta\sin\varphi = \left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right) - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} = \pm\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \\ \sin 2\alpha = -1 \end{array}\right.$

Т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ сущ., то $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = x$. Тогда: $\left[\begin{array}{l} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{3}{5} \\ \frac{2x}{1+x^2} = -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3x^2+3 = 10x \\ x^2+1 = -2x \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3x^2-10x+3=0 \\ x^2+2x+1=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} (3x-1)(x-3)=0 \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \\ \operatorname{tg}\alpha = 1 \\ \operatorname{tg}\alpha = 3. \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{1}{3}$; 1; 3.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2. $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$ ОДЗ: $x-12y\geq 0$, $x\geq 12y$.

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-12y)^2=(2y-1)(x-6) \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90. \end{cases}$

$a=x-6$; $b=6y-3$. Тогда $x-12y=a-2b\geq 0 \Rightarrow a\geq 2b$.

$\begin{cases} (a-2b)^2=\frac{ab}{3} \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(a^2-4ab+4b^2)=ab \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} 3a^2-13b+12b^2=0 \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} (3a-4b)(a-3b)=0 \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3a-4b=0 \\ a-3b=0 \end{array}\right. \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=\frac{4b}{3} \\ a=3b \end{array}\right. \\ a^2+b^2=90. \end{cases}$

I. $a=\frac{4b}{3}$. $\frac{4b}{3}\geq 2b \Rightarrow \frac{2b}{3}\leq 0 \Rightarrow b\leq 0 \Rightarrow a\leq 0$.

$\left(\frac{4b}{3}\right)^2+b^2=90 \quad |\cdot 9$

$16b^2+9b^2=810$

$25b^2=810$

$b^2=\frac{810}{25}$

$b=-\frac{9\sqrt{10}}{5}$ (т.к. $b\leq 0$) $\Rightarrow a=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$.

II. $a=3b$. $3b\geq 2b \Rightarrow b\geq 0 \Rightarrow a\geq 0$.

$(3b)^2+b^2=90$

$10b^2=90$

$b^2=9 \Rightarrow b=3$ (т.к. $b>0$) $\Rightarrow a=9$.

~~Ответ: (−12~~ $x=a+6$, $y=\frac{b+3}{6}$

$(a;b)=(9;\ 3)$: $x=9+6=15$; $y=\frac{3+3}{6}=1$

$(a;b)=\left(-\frac{12\sqrt{10}}{5};\ -\frac{9\sqrt{10}}{5}\right)$: $x=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}$

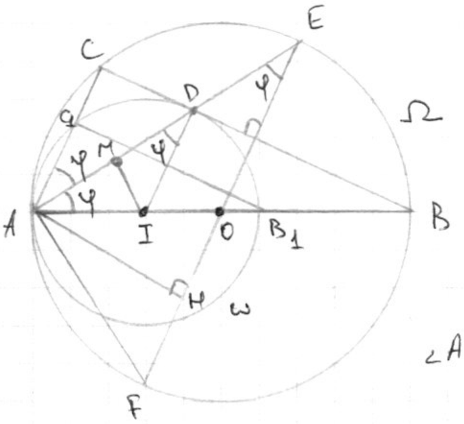
$y=\frac{3+\left(-\frac{9\sqrt{10}}{5}\right)}{6}=\frac{15-9\sqrt{10}}{30}=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}$

Ответ: $(15;\ 1)$; $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5};\ \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

R, r — ? $\angle AFE$ — ?

S_{AEF} — ?

Отметим на окружности ω точки B_1 и C_1 ($B_1 \in AB$, $C_1 \in AC$).

$\angle ACB = \angle AC_1B_1 = 90^\circ$ (как опир. на диаметр), т.е. $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle ACB$ по 2-м углам.

$\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{AB \cdot BB_1}{AC \cdot CC_1}$ (по св-ву отрезков секущей), $\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$ (из подобия).

$\Rightarrow \frac{BD^2}{CD^2} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow AD$ — биссектриса $\Rightarrow E$ — сер. дуги $\smile BC \Rightarrow EF$ — сер. пер-р к $BC \Rightarrow O \in EF \Rightarrow EF$ — диаметр.

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{17}{15} \Rightarrow AB = 17x$; $AC = 15x$. $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8x = 16 \Rightarrow x = 2$.

Тогда $AB = 2R = 17x = 34 \Rightarrow R = 17$; $AC = 15x = 30$.

$tg\ \varphi = \frac{CD}{AC} = \frac{7{,}5}{30} = \frac{1}{4} \Rightarrow \varphi = arctg \frac{1}{4}$. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$AD = \frac{AC}{\cos\varphi}$; пусть M — сер. AD; $H \in EF$; $AH \perp EF$.

Тогда $r = \frac{MD}{\cos\varphi} = \frac{AD}{2\cos\varphi} = \frac{AC}{2\cos^2\varphi} = \frac{30}{2 \cdot \frac{16}{17}} = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$.

$\angle AEF = \varphi = arctg \frac{1}{4} \Rightarrow \angle AFE = 90^\circ - \varphi$ (т.к. EF — диаметр) $\Rightarrow \angle AFE = arctg\ 4$

$S_{AEF} = \frac{EF \cdot AH}{2} = \frac{EF \cdot AE \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{EF^2 \sin\varphi\cos\varphi}{2} = \frac{EF^2 \sin 2\varphi}{4} = \frac{EF^2 \cdot \frac{BC}{AB}}{4} =$

$= \frac{34^2}{4} \cdot \frac{8}{17} = \frac{17^2 \cdot 8}{17} = 17 \cdot 8 = 136$.

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{255}{16}$; $\angle AFE = arctg\ 4$; $S_{AEF} = 136$.

№3. $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Longrightarrow x \in (0;\ 10)$.

$t = \log_3(10x - x^2)$.

$10x - x^2 + |10x - x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

Пусть $f(t) = 3^t + 4^t - 5^t$.

$f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 + 4^t \cdot \ln 4 - \ln 5 \cdot 5^t$.

Заметим, что если $5^t \geq 3^t + 4^t$, то верна цепочка неравенств:

$\ln 3 \cdot 3^t + \ln 4 \cdot 4^t < \ln 5 \cdot 3^t + \ln 5 \cdot 4^t \leq \ln 5 \cdot 5^t \Rightarrow f'(t) < 0$.

Тогда, если существует ноль функции, то при всех больших значениях аргумента функция принимает отрицательные значения (т.к. она убывает на всём луче). Значит, функция f имеет не более одного нуля.

$t = 2$: $3^2 + 4^2 = 5^2$ — верно $\Rightarrow$ 2 — корень.

Тогда $f(t) \leq 0$ при $t \in [2;\ +\infty)$, $f(t) \geq 0$ при $t \in (-\infty; +2]$.

Вернёмся к замене.

$\log_3(10x - x^2) \leq 2$

$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x(10 - x) > 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (0;\ 10) \\ (x-1)(x-9) \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in (0;\ 10) \\ x \in (-\infty;\ 1] \cup [9;\ +\infty) \end{cases}$

Зн., $x \in (0;\ 1] \cup [9;\ 10)$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup [9;\ 10)$.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. $f(a) = f\left(\frac{a}{b}\cdot b\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) + f(b) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Найдём кол-во пар (x, y) таких, что $2 \le x, y \le 25$, $f(x) < f(y)$.
$x, y \in \mathbb{N}$

$f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = 1$, $f(7) = 1$, $f(11) = 2$, $f(13) = 3$,
$f(17) = 4$, $f(23) = 5$.

Числа, имеющие только делители 2 и 3, будут нулями функции. Пусть $x = 2^m \cdot 3^n$. $f(x) = f(\underbrace{2\cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{m} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n}) = m f(2) + n f(3) = 0$

$f(10) = f(5) + f(2) = 1 + 0 = 1$; $f(15) = f(5) + f(3) = 1 + 0 = 1$
$f(20) = f(5) + f(4) = f(5) + f(2) + f(2) = f(5) = 1$
$f(25) = f(5) + f(5) = 2$.

Аналогично получим, что $f(7) = f(14) = f(21) = 1$; $f(22) = f(11) = 2$.

Тогда f принимает значение 1 в точках 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21;
$f(x) = 2$ только для чисел 11, 22 и 25; $f(x) = 3$ при $x = 13$,
$f(x) = 4$ при $x = 17$, $f(x) = 5$ при $x = 23$.

	Реш. на $\{2; 3; \ldots; 25\}$		
$f(x) = 0$	11 реш.	$f(x) < 0$	— 0 реш.
$f(x) = 1$	7 реш.	$f(x) < 1$	— 11 реш.
$f(x) = 2$	3 реш.	$f(x) < 2$	— 18 реш.
$f(x) = 3$	1 реш.	$f(x) < 3$	— 21 реш.
$f(x) = 4$	1 реш.	$f(x) < 4$	— 22 реш.
$f(x) = 5$	1 реш.	$f(x) < 5$	— 23 реш.

Пусть y_0 — решение ур-я $f(x) = a$, к-рое имеет m решений, а нер-во $f(x) < a$ им. n решений. Тогда для нек-рого a есть m способов выбрать число y_0, и n способов выбрать x_0, т.ч. $f(x_0) < a = f(y_0)$.

Зн, для каждого a есть mn способов выбрать (x_0, y_0).

Общее кол-во равно сумме таких выражений по всем a.

$11 \cdot 0 + 7 \cdot 11 + 3 \cdot 18 + 1 \cdot 21 + 1 \cdot 22 + 1 \cdot 23 = 77 + 54 + 21 + 22 + 23 = 197$.

Ответ: 197.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \underbrace{2\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{2}{\sqrt5}}\cos(2\beta) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \cancel{\sin} -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = +\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5} \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} +\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = -1 \end{cases}} \qquad \cancel{\begin{cases} \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = -1 \end{cases}}$$

$$\sin 2\alpha = \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha} = \cancel{2\,tg\,\alpha\cdot\cos^2\alpha} = \cancel{\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg\,\alpha}}$$

I. $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$.

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha \cos + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha =}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt5} = \varphi.$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt5};\ tg\,\varphi = \frac{1}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2(\alpha+\beta) = \cancel{\frac{1}{\sqrt5}\pi n,\ n\in\mathbb{Z}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z} \\ 2(\alpha+\beta) = \cancel{2\pi n}\ \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -2\beta - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha = -2\beta + \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -\sin\left(2\beta + \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) \\ \sin 2\alpha = \sin\left(2\beta - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -\sin(2\beta+\varphi) \\ \sin 2\alpha = \sin(2\beta-\varphi) \end{array}\right.$$

~~I. sin~~

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -(\sin 2\beta\cos\varphi + \cos 2\beta \sin\varphi) \\ \sin 2\alpha = \sin 2\beta\cos\varphi - \cos 2\beta\sin\varphi \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta - \frac{1}{5} \\ \sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta - \frac{1}{5} \end{array}\right. \qquad \sin 2\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt5}\cdot\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right) - \frac{1}{5}$$

$$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}.$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{5} \\ \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot -\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{5} \\ \sin 2\alpha = \end{array}\right.} \qquad \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \\ \sin 2\alpha = -1 \end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = \frac{3}{5},\\ \sin 2\alpha = -1\end{array}\right.$ $\left[\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{3}{5}\right.$ $tg\,\alpha = x$

$\sin 2\alpha = \cancel{2\sin\alpha} \;..\; = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{2x}{1+x^2}$

$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{3}{5}$

$3+3x^2 = 10x$

$3x^2 - 9x - x + 3 = 0$

$(3x-1)(x-3) = 0$

$x = \frac{1}{3}$ $x = 3$

$\frac{2x}{1+x^2} = -1$

$x^2+1 = -2x$

$x^2+2x+1 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$x = -1.$

$3x^2 - 13x + 12 = 0$

$\cancel{D = 169 - 4\cdot 36}$ $\cancel{108 = }$ $\cancel{= 61}$

$D = 169 - 4\cdot 36 = 61$

$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{61}}{6}$

Ответ: $1; \frac{1}{3}; 3$.

№2. $\cancel{6y = z.}$ Огр. $x - 12y \geq 0$ $x \geq 12y$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 24y + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ x^2 - 12x + 36y + 36y^2 = 45 \end{cases}$

$\cancel{x^2 - 36y - 12y + 144y^2 - 2xy + x - 6 = 0}$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y + 36 + 9 = 90$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$\begin{cases} (x-12y)^2 = 2y(x-6) - 1(x-6) \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-12y)^2 = (2y-1)(x-6) \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \end{cases}$

$(a-2b)^2$ $\frac{b}{3}$ a

$y = \frac{1}{2}$: $\begin{cases} (x-6)^2 = 0 \\ (x-6)^2 = 90 \end{cases}$ — не подх.

$x - 6 = a$

$6y - 3 = b$

$x - 12y = a - 2b$

$(x-6) = \frac{(x-12y)^2}{(2y-1)}$

$(x-12y) = a$

$(2y-1) = b$

$\frac{(x-12y)^4}{(2y-1)^2} + 9(2y-1)^2 = 90$

$\begin{cases} (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \\ 9(x-6)^2(6y-3)^2 = 9(x-12y)^4 \end{cases}$

$\frac{a^4}{b^2} + 9b^2 = 90$

$a^4 = 90b^2 - 9b^4$

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ ab = 3(a-2b)^2 \end{cases}$

$3a^2 = 270 - 3b^2$

$3a^2 - 12ab + 12b^2$

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ 3a^2 - 13ab + 12b^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ a = \frac{-13 \pm \cancel{5}}{6} b \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ \left[\begin{array}{l} a = -\frac{4}{3}b \\ a = -3b. \end{array}\right. \end{cases}$

$270 - 13ab + 9b^2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

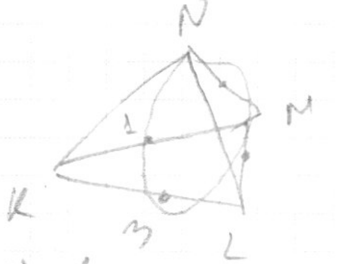
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0; 10)$.

$t = \cancel{x^2 - 10x}, \cancel{t>0}.$ $10 - x^2$

$|10x - x^2|^{\log_3 4} + 10x - x^2 \geq 3^{\log_3(10x-x^2)\cdot\log_3 5}$

$t^{\log_3 4} + t \geq t^{\log_3 5}$, $t > 0$.

~~Если $t > 1$, то $t \geq t^{\log_3 5}$, т.к. $1 \geq \log_3 5$~~

$t = 3^\alpha \Rightarrow \alpha = \log_3 t$

$(3^\alpha)^{\log_3 4} + 3^\alpha \geq (3^\alpha)^{\log_3 5}$

$3^\alpha + 4^\alpha \geq 5^\alpha$. $f(\alpha) = 3^\alpha + 4^\alpha - 5^\alpha$.

$f'(\alpha) = \ln 3 \cdot 3^\alpha + \ln 4 \cdot 4^\alpha - \ln 5 \cdot 5^\alpha$

Если $5^\alpha > 3^\alpha + 4^\alpha$, то:

$\ln 3 \cdot 3^\alpha + \ln 4 \cdot 4^\alpha < \ln 4 \cdot 3^\alpha + \ln 4 \cdot 4^\alpha < \ln 4 \cdot 5^\alpha < \ln 5 \cdot 5^\alpha \Rightarrow f'(\alpha) < 0$.

Если $5^\alpha < 3^\alpha + 4^\alpha$, то:

№5. $f(b) + f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$.

$f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = 1$, $f(7) = 1$, $f(11) = 2$, $f(13) = 3$, $f(17) = 4$, $f(23) = 5$.

$f(5) = f(10) = f(15) = f(20) = 1$; $f(7) = f(14) = f(21) = 1$;

$f(11) = f(22) = 2$; $f(25) = 2$;

9 чисел $- 1$;

$f\left(\frac{1}{4}\right) =$

$f(x) = \frac{16x - 16}{4x - 5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ | $g(x) = -32x^2 + 36x - 3$

$g''(x) < 0$

$\cancel{g''(x) =}$ $g'(x) = -\frac{4}{(4x-5)^2} \cdot 4 =$

$= -16(4x-5)^{-2} \Rightarrow f''(x) = 128(4x-5)^{-3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

$x - 6 = a$; $6y - 3 = b$. $a - 2b > 0$.

$$\begin{cases} (a-2b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$k^2 - 13k + 36 = 0$

$D = 13^2 - 4 \cdot 36$

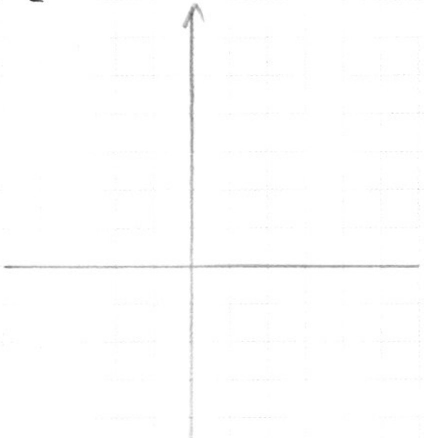
$D = 25$

$k = \frac{13 \pm 5}{2}$

$k_1 = 9 \qquad k_2 = 4$

ОДЗ. $a - 2b \geq 0$

$$\begin{cases} (a-2b)^2 = \frac{ab}{3} \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a^2 - 13ab + 12b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} (3a-4b)(a-3b) = 0 \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$



I. $a = 3b$

$9b^2 + b^2 = 90$

$b^2 = 9$

$b = \pm 3$

$(9; 3)$ $(-9; -3)$ не подх.

II. $a = \frac{4b}{3}$

$\frac{16b^2}{9} + b^2 = 90$

$16b^2 + 9b^2 = 810$

$b^2 = \frac{810}{25}$

$b = \pm \frac{9\sqrt{10}}{5}$

$a = \pm \frac{12\sqrt{10}}{5}$.

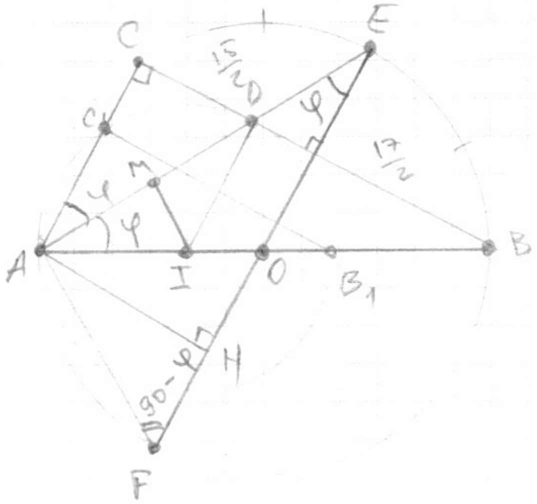
$\sin 2\varphi = \frac{8}{17}$

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 30^2} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$EF = 2R = 34$

$BD^2 = AB \cdot BB_1$; $CD^2 = AC \cdot CC_1$

$\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow AD$ — биссектр.



$\frac{AC}{AB} = \frac{15}{17} \Rightarrow$ ~~BC~~

$AB = 17x$; $AC = 15x \Rightarrow BC = 8x = 16 \Rightarrow x = 2$.

$AB = 34 \Rightarrow R = 17$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4} \Rightarrow AI = \frac{AH}{\cos\varphi} = \frac{15\sqrt{17}}{4} : \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$S_{AEF} = \frac{EF \cdot AH}{2} = \frac{EF \cdot AE\sin\varphi}{2} = \frac{EF^2 \sin\varphi\cos\varphi}{2} = \frac{EF^2 \sin 2\varphi}{4} = 17^2 \cdot \frac{8}{17} = 136.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)