МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=\sin(2\alpha)\cdot\cos(4\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(4\beta)+\sin(2\alpha)=$

$=\sin(2\alpha)(\cos(4\beta)+1)+2\sin(2\beta)\cdot\cos(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)=$

$=2\cos^2(2\beta)\cdot\sin(2\alpha)+2\sin(2\beta)\cdot\cos(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)=$

$=2\cos(2\beta)(\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha))=$

$=2\cos(2\beta)\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{17}$

$2\cos(2\beta)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{2}{17}\Rightarrow\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда

$\left[\begin{array}{ll}\sin(2\beta)=-\frac{4}{\sqrt{17}} & (1)\\ \sin(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}} & (2)\end{array}\right.$

1) $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}-\cos(2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\quad\Big|\cdot\sqrt{17}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4+8\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$

$5\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$, т.к. $tg\alpha$ - определён, то $\cos\alpha\neq0$, поделим обе части на $\cos^2\alpha$.

$5tg^2\alpha+2tg-3=0$; $D=4+60=64$

$\left[\begin{array}{l}tg\alpha=\frac{-2-8}{10}=-1\\ tg\alpha=\frac{-2+8}{10}=\frac{6}{10}=0,6\end{array}\right.$

2) $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\cos(2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\quad\Big|\cdot\sqrt{17}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+5-8\sin^2\alpha\ \cancel{}=0.$

$-3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+5\cos^2\alpha=0$ (т.к. $tg\alpha$ - опр., то $\cos^2\alpha\neq0$, поделим на $-\cos^2\alpha$)

~~$-3tg$~~ ~~$3tg^2\alpha+2tg+5=0$~~ $3tg^2\alpha-2tg\alpha-5=0$; $D=64$

$\left[\begin{array}{l}tg\alpha=\frac{2+8}{6}=\frac{10}{6}\\ tg\alpha=\frac{2-8}{6}=-1\end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha$ значения: $\frac{6}{10}$; $\frac{10}{6}$; -1

Задача №3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$, т.к. $26x-x^2$ - аргумент логарифма, то он будет определён только при $26x-x^2>0$, то есть при $x\in(0;26)$, тогда $|x^2-26x|=26x-x^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \cancel{*} -13^{\log_5(26x-x^2)}\geq 0$

$\exists\ t=26x-x^2$; $t>0$

$t^{\log_5 12}+t-\cancel{13}t^{\log_5 13}\geq 0$

При $0<t\leq 1$, выражение больше нуля, т.к. ~~$t^{\log_5 13}\leq 1$, и $t\leq$~~

$t^{\log_5 12}\leq t$ при $0<t\leq 1$.

Используем свойство логарифма: $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}\geq 13^{\log_5 t}$; при $t>1$ степени положительные и правая функция растёт быстрее левой, тогда у них не может быть больше одной точки пересечения (они монотонно возрастают). Но это точка пересечения ~~$\log_5$~~ при $\log_5 t=2$ (13, 12, 5 - стороны прямоуг. треугольника), значит, левая часть больше при $0\leq\log_5 t\leq 2$ и при ~~$0<t\leq1$~~. $0<t\leq 1$;

$0\leq\log_5 t\leq 2 \Rightarrow 1\leq t\leq 25$

Следовательно подходят все t ~~от~~ в ~~[0;~~ $(0;25]$

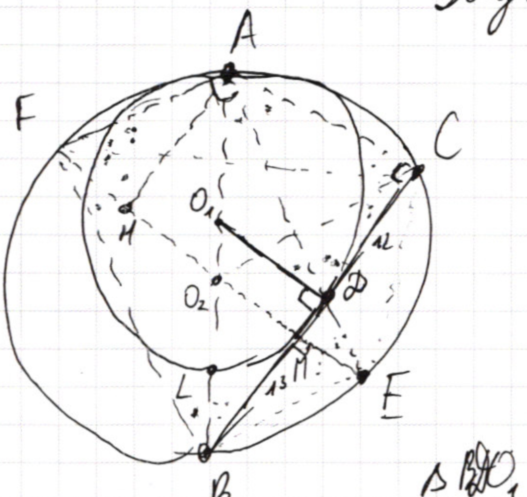
$0<26x-x^2\leq 25 \Rightarrow \begin{cases}26x-x^2>0\\26x-x^2-25\leq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<x<26\\x\leq 1\\x\geq 25\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4



O_1 - ц. окр. ω

Пусть D - диаметр большой окружности, d - малой, R, r - радиусы. $\angle ACB = 90°$, т.к. опирается на диаметр, $\angle BDO_1 = 90°$, т.к. ~~BD ка~~ D - т. касания, тогда $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ ($\angle ABC$ - общий, $\angle BDO_1 = \angle ACB$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO_1}{AB} = \frac{BD}{BC}$; $\frac{D - \frac{d}{2}}{D} = \frac{13}{25}$; $25D - \frac{25d}{2} = 13D$; $12D = \frac{25d}{2}$; $\cancel{D = \frac{25}{24}}$

$d = \frac{24}{25} D$;

BD - касательная, тогда $BD^2 = BA \cdot BL$ (L - т. пересечения AB и ω, отличная от A). $BD^2 = D \cdot (D - d) = D \cdot \frac{1}{25} D$;

$D^2 = 25^2 \cdot 13^2$; $D = 5 \cdot 13 = 65$. $d = \frac{24 \cdot 65}{25} = \frac{24 \cdot 13}{5} = \frac{312}{5} = 62,4$

$R = 32,5$; $r = 31,2$.

Пусть $\angle ADO_1 = \alpha$, тогда $\angle FEA = \angle DAO_1 = \angle DAC = \alpha$, т.к. $EF \parallel DO_1 \parallel AC$, т.к. $EF \perp BC$; $DO_1 \perp BC$; $AC \perp BC$; $\angle EAO_1 = \angle DAO = \angle ADO_1 = \alpha$ т.к. $AO_1 = O_1D = r$, тогда $\smile BE = \smile CE = 2\angle BAE = 2\angle CAE = 2\alpha$ и $\smile AF = 2\angle AEF = 2\alpha \Rightarrow$ т.к. $\smile AF = \smile BE$, то $\smile FE = \smile AB = 180°$, значит т. O_2 (центр Ω окружности) лежит на пересечении AB и FE. Тогда $BO_2 = CO_2 \Rightarrow \triangle BCO_2$ - равнобедренный $\Rightarrow$ $BM = MC = \frac{12+13}{2} = 12,5$, где т. M - пересечение FE и BC. Если из A опустить высоту AH в $\triangle AEF$, то $AHCM$ будет прямоугольник

см. след. лист.

т.к. $\angle AHE = \angle HMC = \angle MCA = 90°$, тогда $AH = MC = 12,5$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot D \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 65 \cdot 12,5 = 406,25$

Тогда $\angle AFE = 45° + \frac{90°}{4} = 77,5°$

Ответ: $R = 32,5$; $r = 31,2$

$\angle AFE = 77,5°$

$S_\Delta = 406,25$

Задача №6

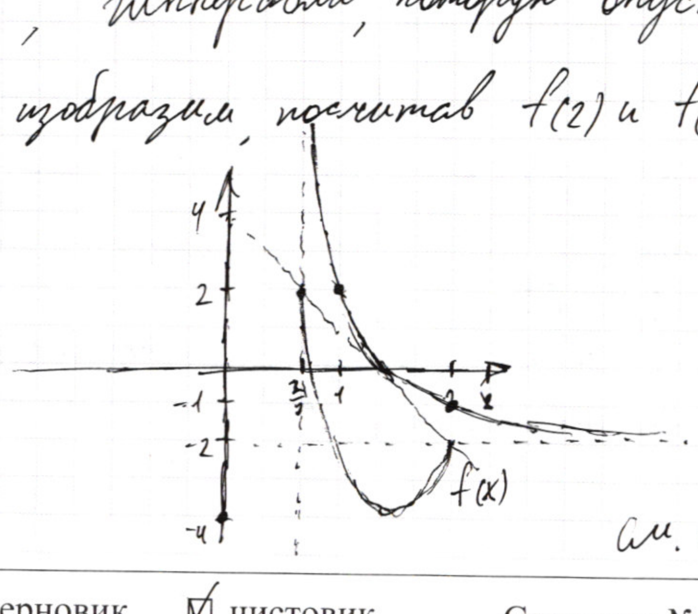
Рассмотрим функции:

$f(x) = 18x^2 - 51x + 28$ – парабола с ветрями вверх, вершина которой в точке $x = \frac{51}{36}$, что между $\frac{2}{3}$ и 2, ~~но т.к. $\frac{2}{3}$ дальше от абсциссы вершины, то нас будет интересовать только то, чтобы прямая~~

Тогда т.к. $\frac{2}{3}$ дальше от $\frac{51}{36}$, чем 2, то есть два варианта: если $b \le f(\frac{2}{3})$, то $a \ge 0$ т.к. $f(\frac{2}{3}) > f(2)$, или если $b > f(\frac{2}{3})$, ~~тогда $a > \frac{f(2) - f(\frac{2}{3})}{1\frac{1}{3}}$~~.

$g(x) = \frac{8 - 6x}{3x - 2} = \frac{4}{3x - 2} - 2$, гипербола, которую опустили на 2. Схематично изобразим, посчитав $f(2)$ и $f(\frac{2}{3})$:

$f(\frac{2}{3}) = 2$, $f(2) = -2$



см. сл. стр.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём крайнее положение. При $a=-3$ и $b=4$, $ax+$ $-3x+4$ проходит через $f(\frac{2}{3})$ и $f(2)$, но также эта прямая ~~сверху~~ на снизу касается гиперболы в точке $(\frac{4}{3};0)$. Тогда чтобы прямая была выше участка параболы, $a \geqslant \frac{f(2)-f(\frac{2}{3})}{\frac{4}{3}} = -3$, но ~~если~~ такая прямая подходит, если $b \geqslant 4$, а при др. b ~~выше б~~ большем будет касание с гиперболой, значит, больше таких пар нет.

Ответ: $a=-3$, $b=4$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$\cancel{xy}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq 6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\frac{18}{9}\cdot 4$

$8-34+28$

$\cancel{(3x-3)^2+(y-6)^2=90}$

144

12

$18\cdot 4-102=-2$

$18\cdot 4$

72

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$y^2-12xy+36x^2=\cancel{(x-1)(y-6)}\ xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$

$y^2-12y+9x^2-18x-45=0$

$-13xy+13y+27x^2+24x+39=0$

$14x^2+13(x^2-xy+y+3)$

$t^{\log_5 12}+t^{\log_5 5}\geq \cancel{\log}\ t^{\log_5 13}$

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}\geq 13^{\log_5 t}$

$0 \quad 3 \quad 0$

$5^{\log_5 3}=3^{\log_5 5}$

$-\ 0\ +\ 26\ -$

$26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

x

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)}\geq 0$

$\vee\ 0$

$f'(t)=\log_5 12\, t^{\log_5\frac{12}{5}}-$

$-\log_5 13\cdot t^{\log_5\frac{13}{5}}+1$

$\frac{4+4-6x}{3x-2}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}-(26x-x^2)^{\log_5 13}+26x-x^{2}\geq 0$

$x^2-26x+25\geq 0$

$1 \quad 25$

$t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t\geq 0$

$\vee\ 0$

$t\left(t^{\log_5\frac{12}{5}}-t^{\log_5\frac{13}{5}}+1\right)\geq 0$

$\frac{4}{3x-2}$ $t=1 \quad \geq 0$

$t<1 \quad \geq 0$

$t>1$

25

$1\frac{1}{3}$

$\cancel{5\cdot 12-5\cdot 13+5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\sin(2\alpha)+4\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-1}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2(\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin2\alpha}=\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin(2\alpha)\cdot\cos(4\beta)+\sin(4\beta)\cdot\cos(2\alpha)$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)$

$\sin(2\alpha)(\cos4\beta+1)=$

$=\sin(2\alpha)\cdot2\cos^2\beta=$

$2\sin(2\alpha)\cdot\cos^2 2\beta+\sin(4\beta)\cdot\cos(2\alpha)$

$2\sin(2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$\cancel{2\cos(2\beta)\cdot(\sin(2\alpha+2\beta)}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=\sin(2\alpha)\cdot(\cos4\beta+1)+\sin(4\beta)\cdot\cos(2\alpha)=$

$=2\cos^2(2\beta)\cdot\sin(2\alpha)+2\cos(2\beta)\cdot\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)=$

$=2\cos(2\beta)\cdot(\sin(2\alpha+2\beta))=-\frac{2}{17}$

$\parallel$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2}\cos(2\beta)=-\frac{2}{17}\cdot(-\sqrt{17})=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin^2(2\alpha)+\sin(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)+4\cos(2\alpha)=0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+4(1-2\sin^2\alpha)=-1$

$5-8\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$

$-3\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha\ \cancel{-8}+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$

$-3tg^2\alpha+2tg\alpha+5=0 \quad |\cos^2\alpha$

$3tg^2-2tg-5=0$

$\cos^2-\sin^2 D=4+60=64$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{2+8}{6}= \\ tg\alpha=\frac{-6}{6}=-1 \end{array}\right.$

$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\cos(2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)+4\cos(2\alpha)=-1$

~~если~~ $\cancel{\cos2\alpha=0}$

$\cancel{tg(2\alpha}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

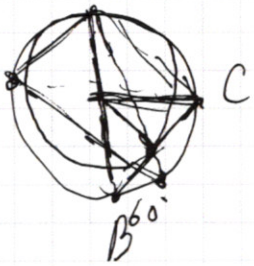
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\alpha = \frac{10}{6}$

$tg\alpha = -1$



$FA + AC + CE = 180$

$AC + CE + BE = 180$

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta)} = \sin(2\alpha)\cdot(2\cos^2(2\beta)-1) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\cos^2(2\beta)\cdot\sin(2\alpha) + 2\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\frac{1}{17}\cdot\sin(2\alpha) + 2\cdot\frac{4}{17}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad \Big| \frac{17}{2}$

$\sin(2\alpha) + 4\cos 2\alpha = -1$

$125 \cdot 65 = 625 + 750 = 8125$

$\beta + \beta + 2\alpha = 180$

$2\alpha + 2\beta + 2\alpha = 180$

$2\alpha + \beta = 90$

$y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$\frac{BO_1}{BAB} = \frac{13}{25} = \frac{D - \frac{d}{2}}{D} = \frac{13}{25}$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$25D - \frac{25d}{2} = 13D$

$12D = \frac{25d}{2}$

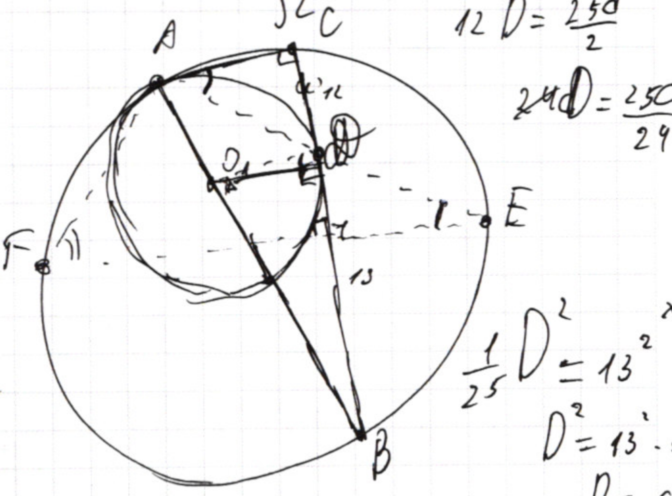
$24D = \frac{25d}{24}$

$y^2 - 12yx + 36x^2 = (x-1)(y-6)$

$\cancel{-12x(1+3x)}$

$\cancel{(y-6)(y}$

$\cancel{y\ 6}$



$\cancel{D > 25}$

$d < 25$

$-\dfrac{y^2 - 12yx + 36x^2}{y^2 - 6y} \quad \Big| \dfrac{y-6}{y-12x}$

$6y + 12yx + 36x^2$

$-12yx + 372x^2$

$6y + 36x^2 - 72x^2$

$\frac{1}{25}D^2 = 13^2$

$13 \cdot 5 = 65$

$D^2 = 13^2\cdot 5^2$

$D = 65$

$D\cdot(D-d) = 13^2$

$\left(D + \frac{d}{2}\right)^2 =$

$d = \frac{65\cdot 24}{25}$

$D^2 - Dd = 13^2$

$D^2 + Dd + \frac{d^2}{4} = 13^2 + \frac{d^2}{4}$

$65\cdot\left(\frac{65\cdot 24}{25}\right) = 13^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$y^2-12xy+36x=(x-1)(y-6)=xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+42x+y-6=0$

$-9x^2-13xy+60x+13y+39=0$

$9x^2+13xy-60x-13y-39=0$

$51=3\cdot17$

$(3x$

$18x^2-x(51+a)+28-b\le0$

$\cancel{y^2-12xy+36x=xy-6x-y+6}$

$\int=1836x-51-a$

$9x^2+y^2-18x-12y-45=0$

$\left(\frac{2}{3};2\right)$

$y^2-13xy+42x+y-6=0$

$\cancel{9x^2+13xy-60x-13y+39=0}$

$\cancel{(10x\quad)(x}$

$12x$

$(\quad+13)(\quad-y+3)$

$-x(-9x-13y+39)$

$\cancel{(9x\quad)(x\quad)}$

$(-21x-13y+39)=0$

$x(9x+13y-39)-(9x+13y-39)+12x=0$

$\frac{51}{36}$

$\cancel{9x^2+10xy-60x}$

$(x-1)(9x+13y-39)+12x=0$

$13y(x-1)$

$13(xy-y+3)$

$\cancel{(8-6x)}(3x-2)\pm(6x-8)=18x^2-36x+16$

$\times\begin{array}{r}24\\13\\\hline 72\\24\\\hline 312\end{array}$

$18x^2-51x+28$

$-2+\frac{4}{3x-2}$

$\cancel{(8-6x)(2-3x)}$

$(3x-7)(6x-4)$

$312 \,|\, 5$

$30 \quad 62$

12

10

2

$\cancel{(6x-8)(3x-7)}$

$\cancel{(6x-7)(3x}$

$+\begin{array}{r}21\\30\end{array}$

$3\cdot6x^2-51x+28$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)