МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=45+36+9 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+3^2(2y-1)^2=90 \end{cases}$

$x-6=a \quad 2y-1=b$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$ $\quad a\cdot b\geq 0$, $a-6b\geq 0$ $\quad a\geq 6b$

~~1 случай $b>0$~~

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

$a^2-(13a)b+(36)b^2=0$

$b=\frac{13a\pm\sqrt{(13a)^2-4\cdot 36\cdot a^2}}{2\cdot 36}=$

$=\frac{13a\pm a\sqrt{169-144}}{2\cdot 36}=$

$=\frac{13a\pm 5a}{72}$

$\cancel{90-(13a)b+(27)b^2=0}$

$\cancel{b=\frac{(13a)\pm\sqrt{(13a)^2-4\cdot 27\cdot 90}}{2\cdot 27}}$

$b_1=\frac{18a}{2\cdot 9\cdot 4}=\frac{a}{4}$

$b_2=\frac{8a}{8\cdot 9}=\frac{a}{9}$

$b_1=\frac{a}{4}$! $\quad \cancel{\begin{cases} a-6\frac{a}{4}=\sqrt{\frac{a^2}{4}} \\ a^2+9\left(\frac{a}{4}\right)^2=90 \end{cases}}$

$a^2+9\left(\frac{a}{4}\right)^2=90$

$a^2\left(\frac{16}{16}+\frac{9}{16}\right)=90$

$a^2\cdot\frac{25}{16}=90$

$a^2=\frac{4^2\cdot 3^2\cdot 10}{5^2}=4^2\cdot 3^2\cdot\frac{2}{5}$

$a=\pm 12\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{a = 12\sqrt{\tfrac{2}{5}}}$

1° $\boxed{a = 12\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}} = x-6$ $\qquad \cancel{x = 6(2\sqrt{\tfrac{2}{5}}+1)}$

$b = \frac{a}{4} = 3\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} = 2y-1$ $\qquad \cancel{y \neq \tfrac{1}{2}}$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 12\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} - 6\cdot 3\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^2\cdot 2^2\cdot \frac{2}{5}} \\ 12^2\cdot\frac{2}{5} + 9\cdot 3^2\cdot\frac{2}{5} = 90 \end{cases}$

т.к. $a \geq 6b$

а у нас нет ?!

~~2° $a = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$ $b = \frac{a}{4} = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$ $a-6b=\sqrt{ab}$~~

3° $\boxed{b = \frac{a}{9}}$!

$a^2 + 9\cdot\left(\frac{a}{9}\right)^2 = 90$

$a^2\left(1+\frac{1}{9}\right) = 90$

$a^2 \frac{10}{9} = 90$

$a^2 = 81$

$a = \pm 9$

3° $\boxed{a = 9}$ $\qquad b = \frac{a}{9} = 1$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 9-6 = \sqrt{9} \\ 9^2+9=90 \end{cases}$

$a = 9 = x-6$ $\qquad x = 15$

$b = 1 = 2y-1$ $\qquad y = 1$

4° $a = -9$ $\quad b = \frac{a}{9} = -1$

$a - 6b = \sqrt{ab}$ $\qquad -9+6 = -3 = \sqrt{9}$?!

2° $a = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$b = \frac{a}{4} = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -12\sqrt{\frac{2}{5}} + 18\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^2\cdot 2^2\cdot\frac{2}{5}} \\ 12^2\frac{2}{5} + 9\cdot 3^2\cdot\frac{2}{5} = 90 \quad \Big| \cdot\frac{5}{3^2} \\ \qquad 5\cdot 3^2\cdot 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 6\sqrt{\frac{2}{5}} = 6\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 4^2\cdot 2 + 3^2\cdot 2 = 5^2\cdot 2 \end{cases}$

$a = -12\sqrt{\frac{2}{5}} = x-6$ $\qquad x = 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$b = -3\sqrt{\frac{2}{5}} = 2y-1$ $\qquad y = \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}$

Ответ: $(x;y) \in \left\{ (15;1);\ \left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}};\ \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right) \right\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

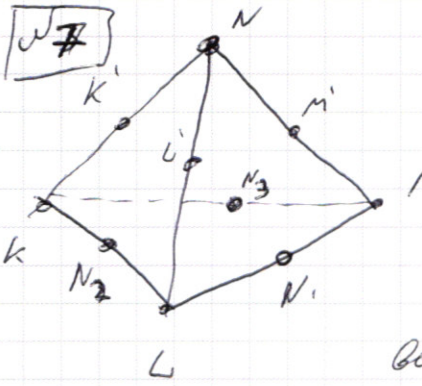
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7



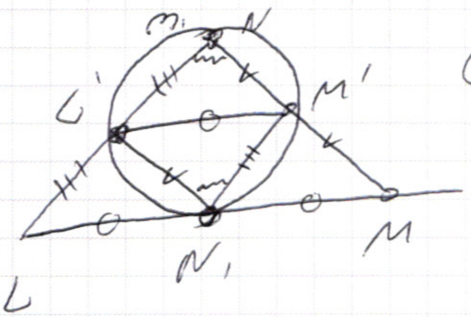
N_1, N_2, N_3 – середины ML, LK, KM соотв.

K', L', M' – середины KN, LN, MN соотв.

Рассмотрим пл. LMN ~~сферы~~ ~~для~~ ~~высоты~~ пачет ω

высекает окружность ω_1

// сфера ω – проходит через N, L', M', N_1, N_2, N_3 т.с. сфера из условия.



$L'M'$ – ср. лин. $\triangle LNM \Rightarrow L'M' = \frac{1}{2}LM = LN_1 = N_1M$

Аналогично

$M'N_1 = \frac{1}{2}NL$

$L'N_1 = \frac{1}{2}NM$

$\Rightarrow \triangle L'NM' = \triangle L'M'N_1 \Rightarrow \angle$ при $N = \angle$ при N_1 $\begin{pmatrix}\angle L'NM' \\ \shortparallel\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\angle L'N_1M' \\ \shortparallel\end{pmatrix}$

А еще $N_1 L' N M'$ лежат на $\omega_1 \Rightarrow \angle$ при $N + \angle$ при $N_1 = 180°$

$\Rightarrow \angle$ при $N = 90°$

$NM' \parallel L'N_1$

$NL' \parallel M'N_1$

$\Rightarrow L'NM'N_1$ – прямоуг.

Итг-деляты. ~~Диаметр~~ сферы опис. вокруг. $NLKM$ не больше наиб. стороны. ~~ACC≤3~~ т.к. уже ≤ 3 т.и. $KL = 3$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\boxed{№1}$ $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$

$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\boxed{\begin{matrix}\sin^2+\cos^2=1 \\ tg^2+1=\frac{1}{\cos^2}\end{matrix}}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{1}{5}$

$\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$(1): \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big| \cdot\frac{\sqrt5}{2\cos^2}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) = -\frac{1}{2\cos^2\alpha}$

$tg\alpha \pm (1-tg^2\alpha) = -\frac{1}{2\cos^2\alpha} = -\frac{1}{2}(tg^2\alpha+1)$

$0 = tg^2\alpha \pm 2tg\alpha - 3$

$0=(tg\alpha-1)(tg\alpha+3) \quad 0=(tg\alpha+3)(tg\alpha-1)$

Ответ: $tg\alpha = \pm1 \; \pm3 \qquad tg\alpha \in \{-3; -1; 1; 3\}$

$\boxed{№3}$ $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2 = a > 0$ (т.к. $\log_3 a$ определён)

$a+|-a|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

// $a = 3^{\log_3 a}$ $\quad |-a|$ где $a>0$ $\quad |-a|=a$

$3^{\log_3 a}+\left(3^{\log_3 a}\right)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$ $\qquad$ // $(x^y)^z=(x^z)^y$ $\quad 3^{\log_3 4}=4$

$3^{\log_3 a}+4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a} \qquad \log_3 a = z$

$3^z+4^z \geq 5^z \qquad z\in(0;+\infty)$ — степенные функции $f(z)=5^z-4^z-3^z$

~~возр.~~ при $z=0$ $\quad 3^0+4^0=2>1=5^0 \quad f(z)=-1$

при $z=2 \quad 3^2+4^2=5^2 \qquad f(z)=5^z-(4^z+3^z)$ — возр. функция.

при $z\geq2 \quad 3^z+4^z \geq 5^z$ $\qquad$ ~~~~ и пост. возрастает

при $0<z\leq2 \quad 3^z+4^z\leq5^z$ $\qquad$ т.к. функ степенная, у нас есть три числа в полож. степенях, тогда если наиб. число станет больше остальных то уже всегда будет больше.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(всегда $f(z)=5^z-(4^z+3^z)$) /

знаем, что степенная функция выпуклая.

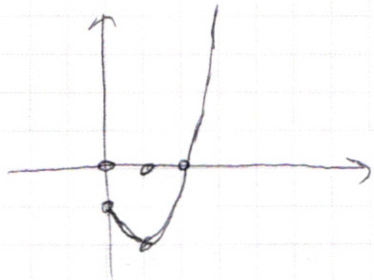
т.е. корней ≤ 2

$$f(z)=5^z-(4^z+3^z)$$

Заметим, что при $z=0$ $f(0)=-1$

при $z=1$ $f(1)=-2$ т.е. $f(z)\downarrow$ при z от 0 до 1.

при $f(2)=0$ т.е. где-то на $[1;2]$ она стала возрастать. т.е. корней не больше чем 1 при $z>1$



а корней нет при $0<z\leq 1$

т.е. всего корней ≤ 1

$z=2$ (V) $\Rightarrow z\geq 2$

$f(2)=0$ $\quad f(z)\geq 0$

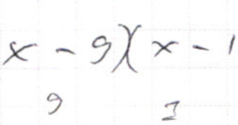
$z=\log_3 a$ $\quad 3^z=a \overset{z\geq 2}{\Rightarrow} a\geq 3^2=9$

$a\geq 9$ $\quad 9\leq a=10x-x^2$

$10x-x^2\geq 9$

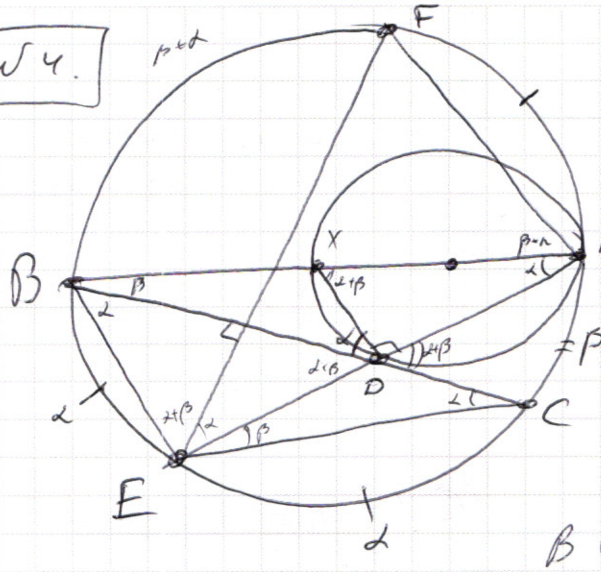
$0\geq x^2-10x+9$

$0\geq (x-9)(x-1)$ $\quad$ Ответ: $x\in[1;9]$



☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№ 4.



X - точка пересеч. AB и ω $(X \neq A)$

AB - проходит через точку кас. окр. ω и Ω и через центр Ω $\Rightarrow$ и через центр ω $\Rightarrow AX$ - диаметр ω

$\angle XAD = \alpha$ $\angle AXD = \alpha+\beta$

$\angle ADX = 90 \Rightarrow 2\alpha+\beta = 90^\circ$

BC - кас. к $\omega \Rightarrow \angle ADC = \alpha+\beta$ $\angle XDB = \alpha$

$\angle BAE = \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \alpha$ (будем называть дуги углами оп. на них. т.е. в 2 раза меньше станд.)

$\overset{\frown}{BE} = \alpha \Rightarrow \angle BCE = \alpha$

$\left.\begin{array}{l}\angle BXD = \alpha + 90^\circ \\ \angle XDB = \alpha\end{array}\right| \Rightarrow ABC = \beta \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \beta$

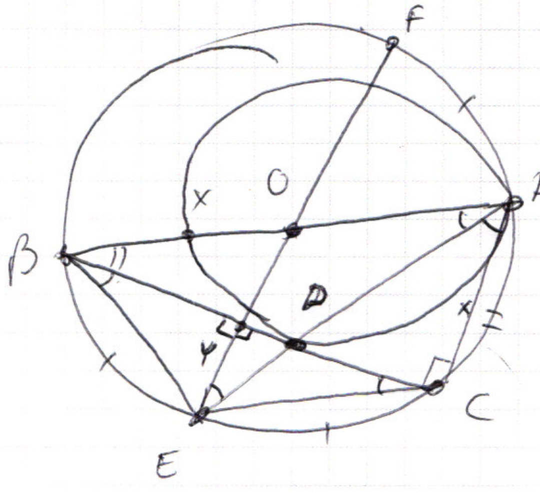
$\left.\begin{array}{l}\angle BEA = 90 \\ \angle BAE = \alpha\end{array}\right| \Rightarrow \angle ABE = \alpha+\beta$ $\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{AC} = \beta \\ \text{и} \\ \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CE}\end{array}\right| \Rightarrow \overset{\frown}{CE} = \alpha$

т.е. $\overset{\frown}{BE} = \alpha = \overset{\frown}{EC}$ $\boxed{\angle EFA = \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CE} = \beta+\alpha}$

$\left.\begin{array}{l}BC \perp EF \\ \angle BCE = \alpha\end{array}\right| \Rightarrow \angle FEC = 90-\alpha = \alpha+\beta = \overset{\frown}{FA}+\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{FA}+\beta$

т.е. $\overset{\frown}{FA} = \alpha = \angle FEA$

$\left.\begin{array}{l}\angle FEA = \alpha \\ \angle EFA = \alpha+\beta\end{array}\right| \Rightarrow \angle FAE = 90^\circ$ т.е. EF - диам. Ω



O - центр Ω EF и AB прох. через O;

$BD = \frac{17}{2}$ $CD = \frac{15}{2}$ $BC \cap EF = Y$

$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC} = \alpha \Rightarrow BE = EC$ EY - выс. $\Rightarrow$ и мед.

$BY = YC \Rightarrow BY+YC = \frac{17}{2}+\frac{15}{2} = \frac{32}{2} = 16 \Rightarrow$

$BY = 8 = \frac{16}{2} \Rightarrow YD = \frac{1}{2}$

AD - бис. в $BAC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{17}{15}$

$AC = x$ $AB = \frac{17}{15}x$ $\angle C = 90^\circ$

$BC = 16$ $\left(\frac{17}{15}x\right)^2 = 16^2 + x^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$17^2x^2 = 16^2\cdot 15^2 + 15^2x^2$

$2\cdot(15+17)\,x^2 = 16^2\cdot 15^2$

$\cancel{2^2}\cdot \cancel{4^2}x^2 = \cancel{4^2}\cdot 15^2\cdot 2^2\cdot 2^2$

$x^2 = 15\cdot 2 = 30 = AC$

$AB = \frac{17}{15}x = 17\cdot 2 = 34$

~~Ra~~ Радиус Ω это $\frac{1}{2}AB = \frac{34}{2} = 17$

$\cancel{\cos\beta} = \cos\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$

$\cancel{\sin\alpha}$ $AD^2 = AC^2 + CD^2$

$AD^2 = 30^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$

$AD^2 = 15^2\cdot\left(2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 15^2\cdot\frac{17}{4}$ $\qquad AD = \sqrt{17}\cdot\frac{15}{2}$

$4+\frac{1}{4}$

$\sin\alpha = \frac{DC}{AD} = \frac{\frac{15}{2}}{\sqrt{17}\cdot\frac{15}{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{30}{\sqrt{17}\cdot\frac{15}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\alpha+\beta = 90-\alpha$ $\qquad \sin(90-\alpha) = \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{4}$ $\qquad \cancel{tg\,\alpha = \frac{1}{4} = \frac{XD}{DA}}$

$\frac{AD}{XA} = \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\qquad AD\cdot\frac{\sqrt{17}}{4} = XA$

$\sqrt{17}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4} = XA$

$\Rightarrow$ радиус ω $\frac{XA}{2} = \frac{17\cdot 15}{16}$ $\qquad \boxed{\frac{17\cdot 15}{8} = XA}$ – диам. ω.

$\triangle AFE$ FE – диаметр $\Rightarrow FE = 34$

~~FA = 2x~~ $\angle FEA = \alpha$ $\frac{FA}{AE} = tg\alpha = \frac{1}{4}$

$\angle EFA = 90 - \alpha = \alpha + \beta$

$4FA = AE$

$(FE)^2 = (FA)^2 + (EA)^2 = FA^2 + 16FA^2$

~~FE~~ $(34)^2 = 17 FA^2$

$17 \cdot 17 \cdot 2^2 = 17 \cdot FA^2$

$FA = 2\sqrt{17}$ ~~$\cdot \sqrt{...}$~~ ~~$AE = 4FA = 17 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$~~

$EA = \boxed{8\sqrt{17}}$

$FE = 34$

$\angle EAF = 90$ $\Rightarrow S_{AFE} = FA \cdot EA \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17} = 8 \cdot 17 = 80 + 56 = 136$

Ответ: радиус $\Omega = 17$

радиус $\omega = \frac{17 \cdot 15}{8} = \frac{255}{8}$

$\angle EFA = \alpha + \beta = 90^\circ - \alpha = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$S_{EFA} = 8 \cdot 17 = 136$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right) = \sin x\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos(y) + \sin y\cdot\cos x$ $= 2\sin x \cdot \sin y$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right) = 2\sin x\cdot\sin y$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{1}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos 60 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \pm 2\cdot\cos 2\alpha = -1$

$2\,tg\alpha \pm 2\left(1 - (tg\alpha)^2\right) = -1$

$2\,tg\alpha + 2 - 2tg^2\alpha = -1$

$0 = 2tg^2\alpha - 2\,tg\alpha - 3$

$0 =$

4 – 4 ч. кол.

$4 + 2\text{ч} = \sqrt{2}8$

$4 + 2\text{ч} = 28 = 7$ ч.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad tg\,\alpha \in$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x^2-2\cdot6x+36=(x-6)^2$ $+9$ $\quad 6y$ $\boxed{6}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{4}$

$x(2y-1) \geq 12y-6 = 6(2y-1)$ $\quad x \geq \frac{6(2y-1)}{(2y-1)}$

$2xy-12y-x+6 \geq 0$

$$\begin{cases} (x-12y) = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2 = 90 \end{cases}$$

$x-12y \geq 0 \quad x \geq 12y$

$(x-6$

$(x-6)^2+3^2(2y-1)^2=90$

$x^2 - 2\cdot\boxed{6}x+36 + (6y)^2 - 2\boxed{3}(6\cdot y)+9 = 45+36+9 = 90$

$x \geq 12y \quad (x-6)(2y-1) \geq 0$
$\quad a \quad\quad b$

$(a-6b) = \sqrt{ab}$ $\quad a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2$

$4a^2+3^2b^2=90$ $\quad a^2+9b^2=90$

$\frac{\sqrt{17\cdot8}}{8\cdot17} = \frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{24}}$

$90-13ab+27b^2=0$

$13^2=169$

$b^2=$

$2^2\cdot3^3\cdot3^2\cdot10$

3^5

$27\cdot4 = 80+28=104$

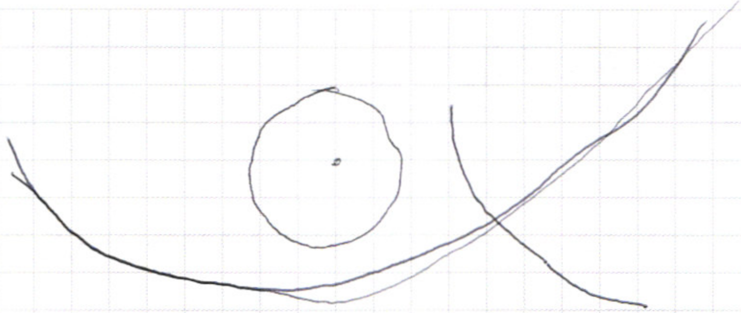
$104\cdot90 = \boxed{9360}$

9360

$6y = z$

$(x-6)^2 + (z-3)^2 = 90$

a



$a^2 + (z-3)^2 = 90$

$(12y-1)$

$a - 6b$

$a - 12y + 6$

$a - 2z + 6$

$81 + 9 = 3^2 + 9^2$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$b = 13a \pm \sqrt{(13a)^2 -}$

a $\quad 3b = z$

$b = \frac{z}{3}$

$\boxed{a^2 + z^2 = 50}$

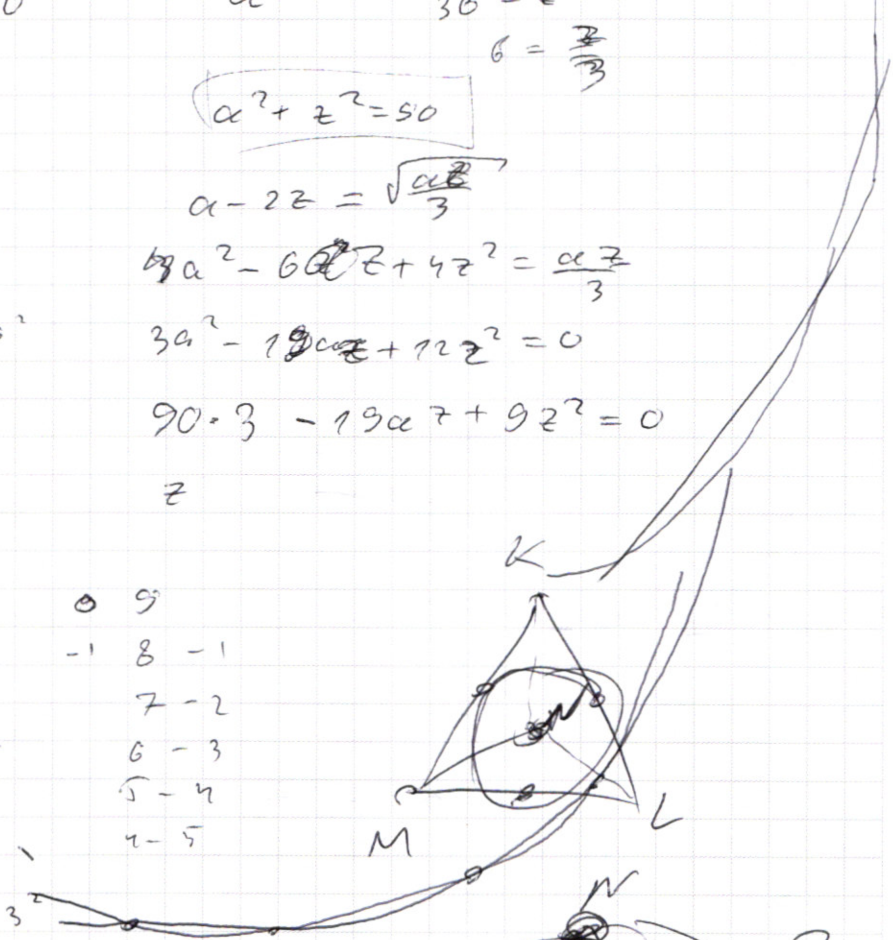
$a - 2z = \sqrt{\frac{az}{3}}$

$a^2 - 4az + 4z^2 = \frac{az}{3}$

$3a^2 - 13az + 12z^2 = 0$

$90 \cdot 3 - 13az + 9z^2 = 0$

z



0	9	
-1	8	-1
	7	-2
	6	-3
	5	-4
	4	-5

$2^2 - 6^2 = 12^2$

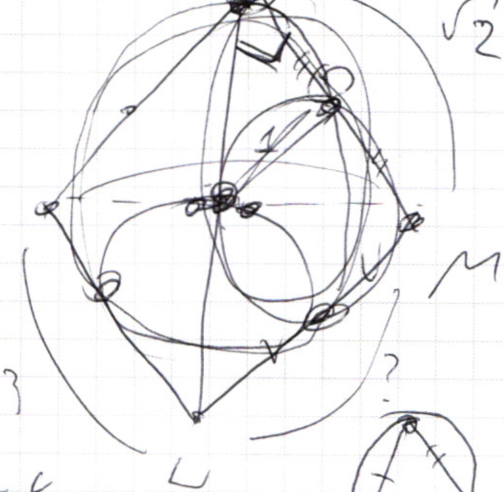
$13^2 - 12^2 = 25 = 625$

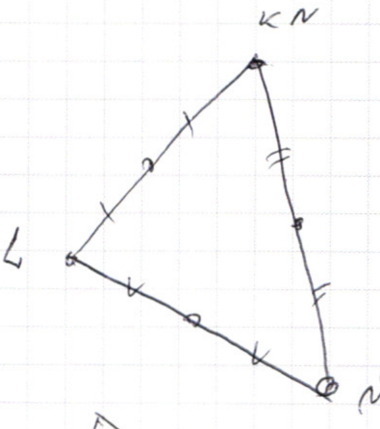
120
24
144

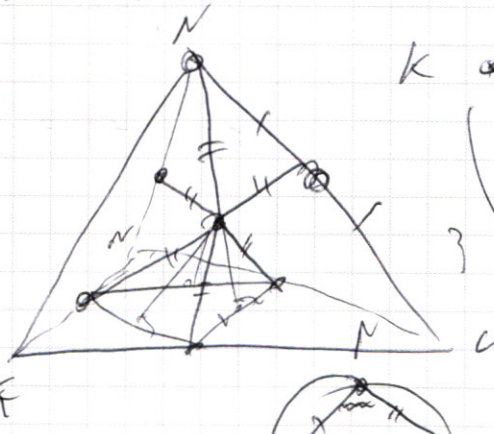
$90 = 9 \cdot 10 = 3^2$

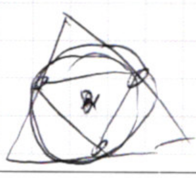
$a^2 \cdot \frac{5}{16} = 9 \cdot 2$

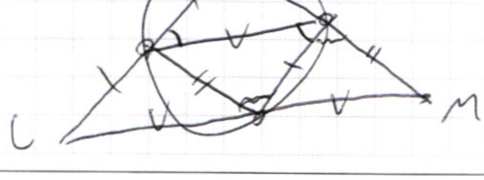
$a^2 = \frac{3^2 \cdot 2 \cdot 4^2}{5} = (12)^2 \cdot \frac{2}{5}$

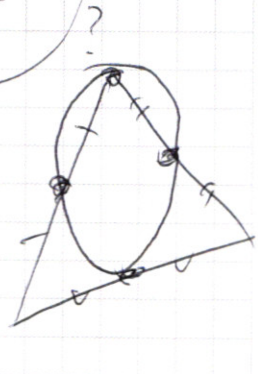




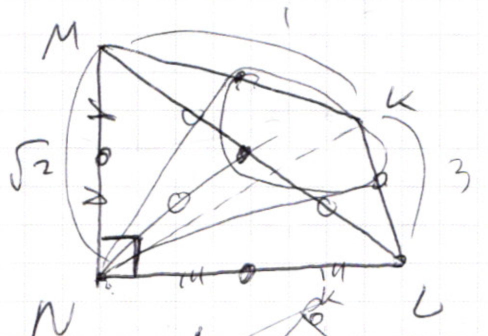


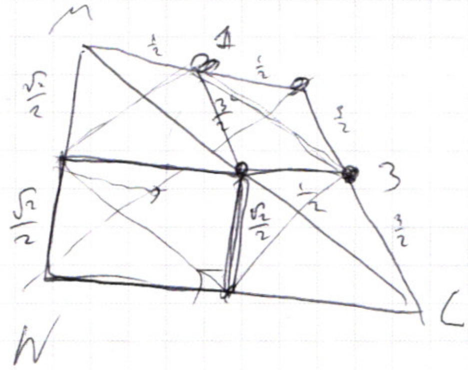


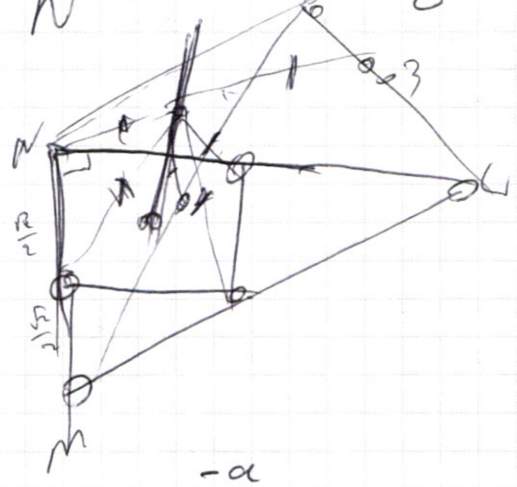


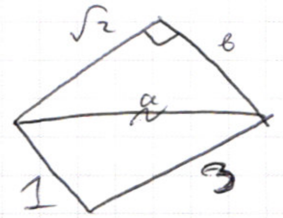


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА









$2+b^2=a^2$

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$a+|-a|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(a)}$$

$$a+a^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 a}$$

$(5^2)^3=(5^3)^2$

$$3^{\log_3 a}+\left(3^{\log_3 a}\right)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 a}$$

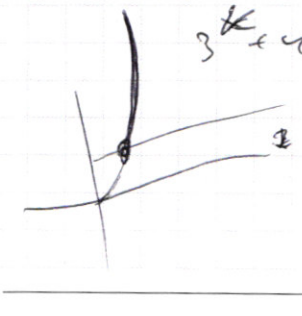
$3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\to 1$

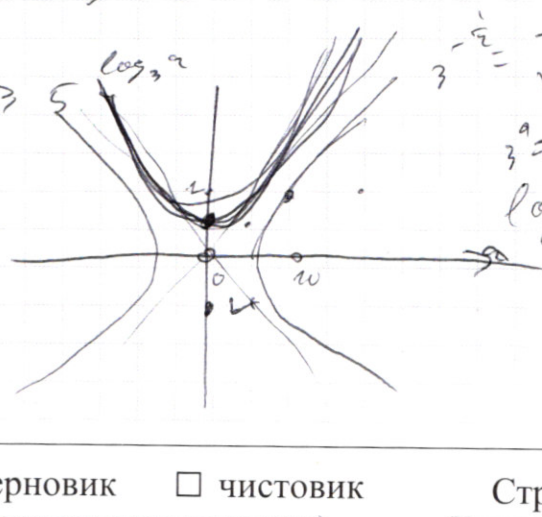
$$3^{\log_3 a}+4^{\log_3 a}\geq 5^{\log_3 a}$$

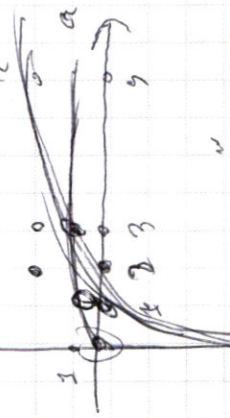
$3^0=1 \quad 3^1=3$

$$3^k+4^k\geq 5^k$$

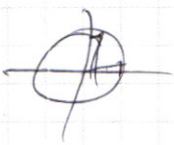
$\log_3 a=$





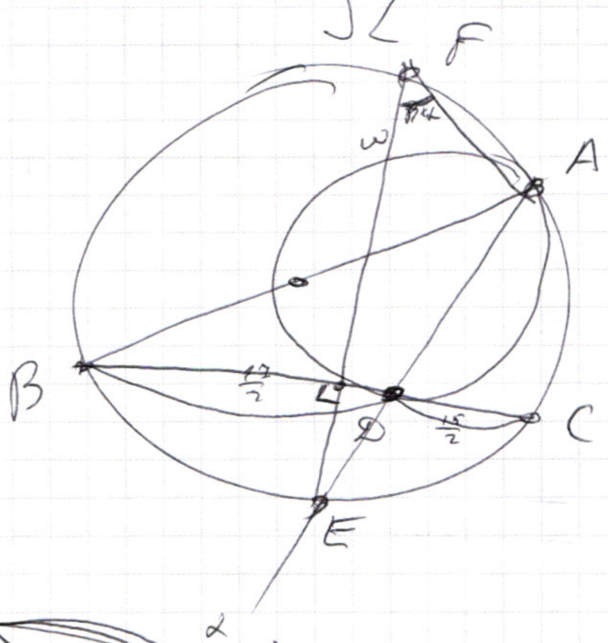


$27+64+125$



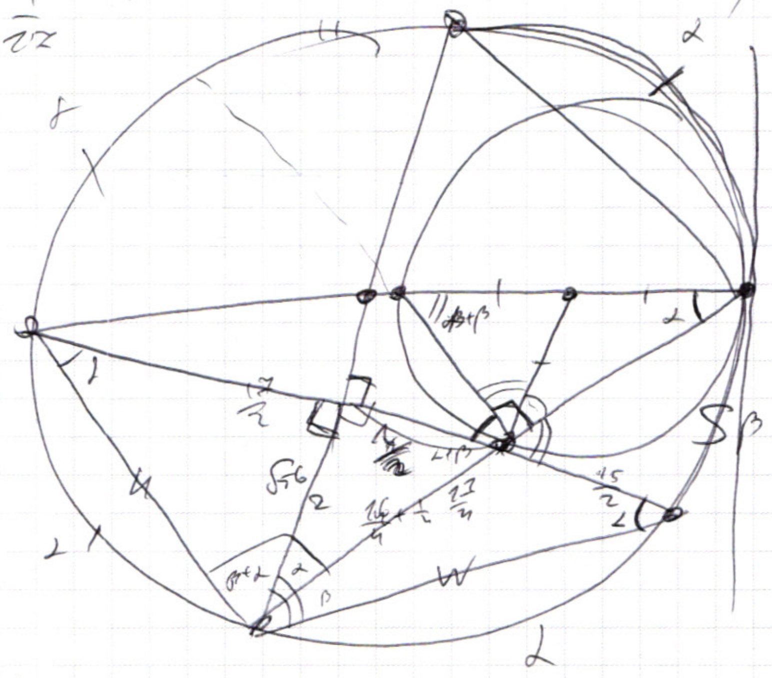
$26=2$

$\frac{16}{22} < \frac{1}{22}$

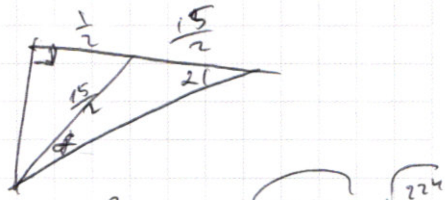


$\angle AFE$

AFE



$2\alpha+\beta=90$



$\frac{15^2}{2^2}-\frac{1}{2^2}=\sqrt{\frac{224}{4}}=\frac{\sqrt{224}}{2}$

$15^2=25\cdot3^2=5\cdot25$

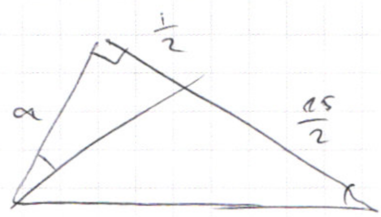
225

$\frac{1}{225}$

$224=112\cdot2$

$56\cdot4$

$\sqrt{56}=\sqrt{7\cdot8}$



$\frac{16}{2}=$

$\frac{\frac{16}{2}}{a}=\frac{a}{\frac{1}{2}}$

$\frac{16}{4}=a^2$

$\frac{4}{1}=a^2$

$a=2$

$\frac{17^2}{15^2}x^2=16^2+x^2$

$17^2x^2-15^2x^2=16^2\cdot15^2$