МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

1) Во втором выражении сумму преобразуем в произведение

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

2) $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

3) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

4) $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 + 1 = 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha - 2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 \\ 4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{ll} \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 & | : \cos^2\alpha \\ 3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0 & | : \cos^2\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg^2\alpha - 2tg\,\alpha - 3 = 0 \\ 3tg^2\alpha + 2tg\,\alpha - 1 = 0 \end{array}\right.$

(Если $\cos\alpha = 0$, то $\sin\alpha = 0$, что невозможно)

$D_1 = 4+4\cdot3 = 16, \sqrt{D_1} = 4 \quad tg\,\alpha = \frac{2\pm4}{2} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array}\right.$

$D_2 = 4+4\cdot3 = 16, \sqrt{D_2} = 4 \quad tg\,\alpha = \frac{-2\pm4}{2\cdot3} = \left[\begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{3} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 3 \\ tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{1}{3} \\ tg\,\alpha = 3 \end{array}\right.$

Ответ: $-1;\ \frac{1}{3};\ 3.$

№2 $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow$

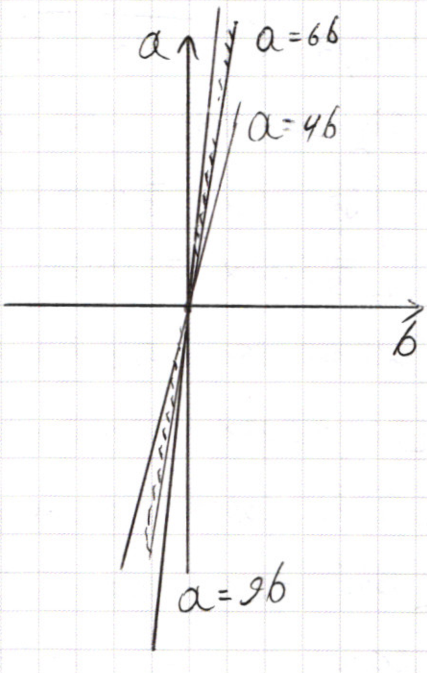
$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ x^2-2\cdot6\cdot x+36+36y^2-2\cdot6y\cdot3+9=45+36+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$ Пусть $a=x-6$, $b=2y-1$. Тогда:

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=a^2-12ab+36b^2 \\ a^2+9b^2=90 \\ a-6b\geq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a\geq6b \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

$D=169b^2-4\cdot36b^2=25b^2, \sqrt{D}=5b \quad a_1=\frac{13b-5b}{2}=4b \quad a_2=\frac{13b+5b}{2}=9b$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right. \\ a\geq6b \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ 25b^2=90 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ 90b^2=90 \end{cases} \end{array}\right. \quad a\geq6b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ \cancel{a\leq0}\ b\leq0 \\ b^2=\frac{18}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ \cancel{a}\ b\geq0 \\ b^2=1 \end{cases} \end{array}\right.$



$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ b=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5} \\ b=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \end{cases} \\ \begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5} \\ 2y-1=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \end{array}\right.$

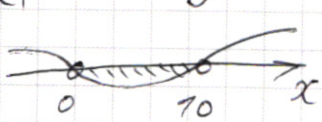
$\cancel{x=6-\frac{60\sqrt{10}}{5}=6-12\sqrt{10}}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac12-\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(15;1)$; $\left(6-\frac{12\sqrt{10}}{5};\ \frac12-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$.

№3 $\begin{cases} 10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)} \\ 10x-x^2>0 \end{cases}$

$\begin{cases} 10-x^2+|x^2-10x|^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)}\geq0 \\ x^2-10x<0 \end{cases}$ $\quad (|x^2-10x|=10x-x^2)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (Продолжение)

$$\begin{cases} 10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} - 5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0 \\ x \in (0;10) \end{cases}$$

Пусть $t = 10x - x^2$. Тогда:

$$t + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geq 0$$

Прологарифмируем неравенство по основанию 5.

$$\log_5 t + \log_5(t^{\log_3 4}) - \log_5(5^{\log_3 t}) \geq 0$$

$$\log_5 t + \log_3 4 \cdot \log_5 t - \log_3 t \geq 0$$

$$\log_5 t\,(1 + \log_3 4) - \frac{\log_5 t}{\log_5 3} \geq 0$$ С учётом $\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$:

$$\log_5 t \cdot (\log_3 3 + \log_3 4 - \log_3 5) \geq 0$$

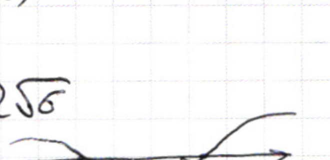
$$\log_5 t \cdot \log_3\left(\frac{12}{5}\right) \geq 0$$ Т.к. $\log_3\left(\frac{12}{5}\right) > 0$, т.к. $\frac{12}{5} > 1$, то

неравенство равносильно: $\log_5 t \geq 0$

$$\begin{cases} \log_5(10x - x^2) \geq 0 \\ x \in (0;10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - x^2 \geq 1 \\ x \in (0;10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 1 \leq 0 \\ x \in (0;10) \end{cases}$$

$D = 100 - 4 = 96$, $\sqrt{D} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$



$$\begin{cases} x \in [5-2\sqrt{6};\ +5+2\sqrt{6}] \\ x \in (0;10) \end{cases}$$

Пусть $5 - 2\sqrt{6} > 0 \Rightarrow 5 > 2\sqrt{6} \Rightarrow 25 > 24$. Это утв. верно

Пусть $5 + 2\sqrt{6} < 10 \Rightarrow 2\sqrt{6} < 5 \Rightarrow 24 < 25$. Это утв. верно

$x \in [5 - 2\sqrt{6};\ 5 + 2\sqrt{6}]$

Ответ: $x \in [5 - 2\sqrt{6};\ 5 + 2\sqrt{6}]$.

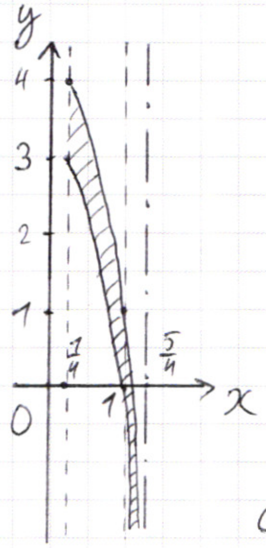
№6 $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ $\left[\frac{1}{4};1\right]$

$f(x)=\frac{16x-16}{4x-5}=\frac{16x-20+4}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}=4+\frac{1}{x-1,25}$ – гипербола

$f\left(\frac{1}{4}\right)=4+\frac{1}{0,25-1,25}=3$ $f(1)=4+\frac{1}{1-1,25}=0$

$g(x)=-32x^2+36x-3$ – парабола („ветви вниз)

$g\left(\frac{1}{4}\right)=-32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac{1}{4}-3=-2+9-3=4$ $g(1)=-32+36-3=1$



Рассмотрим прямую $y=ax+b$, проходящую через точки $\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $(1;1)$

$\begin{cases}0,25a+b=4\\ a+b=1\end{cases}$ $\begin{cases}0,75a=-3\\ b=1-a\end{cases}$ $\begin{cases}a=-4\\ b=5\end{cases}$

$y=-4x+5$

Найдём точки пересечения этой прямой с графиком $y=f(x)$

$\frac{16x-16}{4x-5}=-4x+5 \Rightarrow \frac{16x-16+(4x-5)^2}{4x-5}=0 \Rightarrow$

$\frac{16x^2-40x+25+16x-16}{4x-5}=0 \Rightarrow \frac{16x^2-24x+9}{4x-5}=0 \Rightarrow$

$\frac{(4x-3)^2}{4x-5}=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$ Одна точка пересечения свидетельствует о том, что $y=-4x+5$ – касательная к $f(x)$

Т.к. $y=-4x+5$ проходит через точки $\left(\frac{1}{4};4=g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ и $(1;1=g(1))$, то при других значениях a условие $ax+b\le g(x)$ не будет выполняться при всех x на $\left[\frac{1}{4};1\right]$, а т.к. $y=-4x+5$ – касательная к $f(x)$, то $b=5$ – единственное значение при единственном $a=-4$

$a=-4$, $b=5$

Ответ: $(-4;5)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

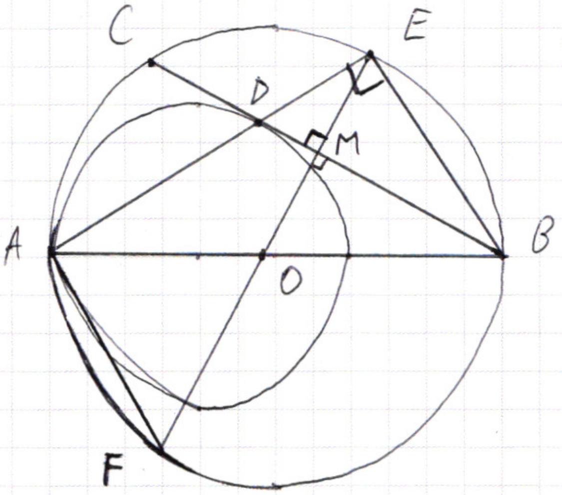
r - ?

R - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

Решение:



1) Т.к. $EF \perp BC$, а BC - хорда, то EF - диаметр, проходит через центр Ω - точку O. Причём $EF \cap BC = $ т. M $\Rightarrow$

$BM = CM = \frac{BD+CD}{2} = \frac{32}{4} = 8$

$(BC = 16)$

2) $\angle AEB = 90^\circ$ (опирается на AB - диаметр)

$DM = BD - BM = \frac{17}{2} - 8 = \frac{1}{2}$

$BE^2 = BD \cdot BM$ (EM - высота прямоуг. $\triangle BED$)

$DE^2 = BD \cdot DM = \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{4} \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$BE^2 = 8 \cdot \frac{17}{2} = 68 \Rightarrow BE = 2\sqrt{17}$

3)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\cancel{\sin(x+y)}=$ $\quad\cancel{\sin x+\sin y}$ $\quad\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$

$\cancel{\sin(x-y)}$ $\quad\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$

$\begin{cases}x+y=2\alpha+4\beta\\x-y=2\alpha\end{cases}$ $\quad\begin{cases}2x=4\alpha+4\beta\\2y=4\beta\end{cases}$ $\quad x=2\alpha+2\beta$, $\;y=2\beta$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{2}{5}\Rightarrow\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta=-\frac{1}{5}\Rightarrow\boxed{\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}}$ $\quad\sin2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\sin2\alpha+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{2}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\sin2\alpha-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l}\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1\\\sin2\alpha-2\cos2\alpha=-1\end{array}\right.$

$\cancel{\begin{cases}\sin^2 2\alpha+\sin2\alpha+2\cos2\alpha+\cos^2 2\alpha=0\\\sin^2 2\alpha+\sin2\alpha-2\cos2\alpha+\cos^2 2\alpha=0\end{cases}}$ $\quad\cancel{tg^2 2\alpha+tg\,2\alpha+\frac{2}{tg\,2\alpha}+1}$

$\cancel{tg^2 2\alpha}$ $\quad\left[\begin{array}{l}2\sin\alpha\cos\alpha+\cancel{1-2\sin^2\alpha}\,2\cos^2\alpha-1=-1\\2\sin\alpha\cos\alpha-1+2\sin^2\alpha=-1\end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l}2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)=0\\2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\\cos\alpha=0\\\sin\alpha+\cos\alpha=0\end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l}tg\alpha=0\\tg\alpha\text{ не определён}\\\cancel{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}\;tg\alpha=-1\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = -1 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha - 2 = -1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \\ 3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0 \\ 3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 1 = 0\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}D_1 = 4 + 4\cdot 3 = 16, \sqrt{D_1} = 4 \quad tg\alpha = \frac{2\pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l}3 \\ -1\end{array}\right. \\ D_2 = 4 + 4\cdot 3 = 16, \sqrt{D_2} = 4 \quad tg\alpha = \frac{2\pm 4}{2\cdot 3} = \left[\begin{array}{l}1 \\ -\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{array}$$

$$\begin{array}{r}54 \\ +36 \\ \hline 90\end{array}$$

N2

$$\begin{cases}x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45\end{cases} \quad \begin{cases}x - 12y = \sqrt{2y(x-6) - (x-6)} \\ x^2 - 2\cdot 6\cdot x + 36 + 36y^2 - 2\cdot 6\cdot 3y + 9 = 45 + 36 + 9 \\ \cancel{x - 12y \geq 0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90\end{cases} \quad \begin{cases}x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90\end{cases}$$

$$\cancel{(x-6)^2(2y-1) = x^2 - 24xy + 144y^2} \quad \cancel{a = x - 6 \quad b = 2y - 1}$$

$$\begin{cases}x - 12y \geq 0 \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90\end{cases} \quad \begin{cases}ab = (x-12y)^2 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \\ x - 12y \geq 0\end{cases} \quad 6ab = 6(x-12y)^2$$

$$\begin{cases}a^2 - 6ab + 9b^2 = 90 - (x-12y)^2 \\ x - 12y \geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}(a - 3b)^2 = 90 - 6(x - 12y)^2 \\ x - 12y \geq 0\end{cases}$$

$$= (x - 6y + 3)$$

$$(x - 6 - 6y + 3)^2 = 90 - 6(x^2 - 24xy + 144y^2)$$

$$x^2 + 36y^2 + 9 - 12xy - 36y + 6x = 90 - 6x^2 + 120xy - 1464y^2$$

$$\cancel{7x^2 + 1500y^2 - 132xy - 36y + 6x - 81 = 0}$$

$$\begin{array}{r}\times 144 \\ 6 \\ \hline +1464 \\ 36 \\ \hline 1500\end{array} \quad \begin{array}{r|l}132 & 7 \\ 7 & 1 \\ \hline 52 & \end{array}$$

$$a = x - 6 \quad b = 2y - 1 \quad a - 6b = x - 6 - 6(2y - 1) = x - 12y$$

$$\begin{cases}\sqrt{ab} = a - 6b \\ a^2 + 9b^2 = 90\end{cases} \quad \begin{cases}ab = a^2 - 12ab + 36b^2 \; ? \\ a^2 + 9b^2 = 90 \\ a \geq 6b\end{cases} \quad \begin{array}{l}\cancel{-13ab + 27b^2 + 90 = 0} \\ \cancel{6ab = 6(a - 6b)^2} \\ a^2 - 13ab + 36b^2 = 0\end{array}$$

$$D = 169b^2 - 4\cdot 36b^2 = 169 - 144 = 25b^2, \sqrt{D} = 5b$$

$$\cancel{\begin{cases}(a+3b)^2 = 90 + 6(a - 6b)^2 \\ (a - 3b)^2 = 90 - 6(a - 6b)^2 \\ a \geq 6b\end{cases}}$$

$$a = \frac{13b + 5b}{2} = 9b$$

$$a = \frac{13b - 5b}{2} = 4b$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

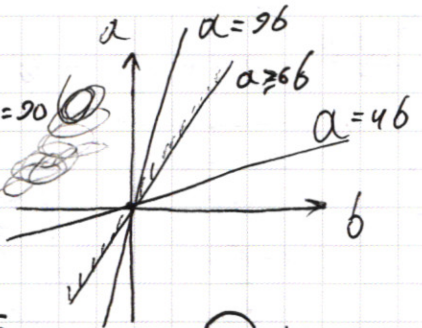
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} a=4b\\ a=9b\end{array}\right.\\ a^2+9b^2=90\\ a\geq 6b\end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=4b\\ b<0\end{cases}\\ \begin{cases}a=9b\\ b\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \quad a^2+9b^2=90$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=4b\\ 25b^2=90\\ b<0\end{cases}\\ \begin{cases}a=9b\\ 90b^2=90\\ b\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=4b\\ b=-2{,}16\end{cases}\\ \begin{cases}a=9b\\ b=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$90 : 25 = 2{,}16$, $\quad 2{,}16 \cdot 4 = 8{,}64$, $\quad 1{,}16 : 2 = 0{,}58$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-8{,}64\\ b=-2{,}16\end{cases}\\ \begin{cases}a=9\\ b=1\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-6=-8{,}64\\ 2y-1=-2{,}16\end{cases}\\ \begin{cases}x-6=9\\ 2y-1=1\end{cases}\end{array}\right. \quad \begin{cases}x=-2{,}64\\ y=-0{,}58\end{cases} \quad \begin{cases}x=15\\ y=1\end{cases}$$

$$\frac{90}{25}=\frac{9\cdot2\cdot5}{5\cdot5}=\frac{18}{5}$$

№3 $\begin{cases}10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}\\ 10x-x^2>0 \Rightarrow x^2-10x<0\end{cases}$

$-(x^2-10x)^{\log_3 4}\geq(x^2-10)+5^{\log_3(10x-x^2)}, \; x\in(0;10)$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)}\geq 0, \; x\in(0;10)$

$\begin{cases}t=10x-x^2\\ t+t^{\log_3 4}-5^{\log_3 t}\geq 0\\ x\in(0;10)\end{cases}$ $\quad \begin{cases}t=10x-x^2, \; x\in(0;10)\\ \log_5 t+\log_3 4\log_5 t-\log_3 t\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\log_5 t(1+\log_3 4)-\dfrac{\log_5 t}{\log_5 3}\geq 0\\ t=10x-x^2, \; x\in(0;10)\end{cases}$

$\begin{cases}\log_5 t\left(1+\log_3 4-\dfrac{1}{\log_5 3}\right)\geq 0\\ t=10x-x^2, \; x\in(0;10)\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\log_5 t(\log_3 12-\log_3 5)\geq 0\\ t=10x-x^2, \; x\in(0;10)\end{cases}$

$\begin{cases}\log_5(10x-x^2)\geq 0=\log_5 1\\ x\in(0;10)\end{cases}$ $\quad \begin{cases}10x-x^2\geq 1\\ x\in(0;10)\end{cases}$ $\quad 40-16=24$

$\begin{cases}x^2-10x+1\leq 0\\ x\in(0;10)\end{cases}$ $\quad D=100-4=96 \quad \sqrt{D}=2\sqrt{24}=4\sqrt6$

$x_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{96}}{2}=\dfrac{\sqrt{100}\pm\sqrt{96}}{2}=\dfrac{10\pm4\sqrt6}{2}=5\pm2\sqrt6$

$\log_3 5=\dfrac{\log_5 5}{\log_5 3}$ $\quad \dfrac{16x-16}{4x-5}=5-4x \quad \dfrac{16x-16+(4x-5)^2}{4x-5}=0 \quad 4\cdot3\cdot2=24$

$\dfrac{16x^2-40x+16x-16+25}{4x-5}=0 \quad 16x^2-24x+9=4x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

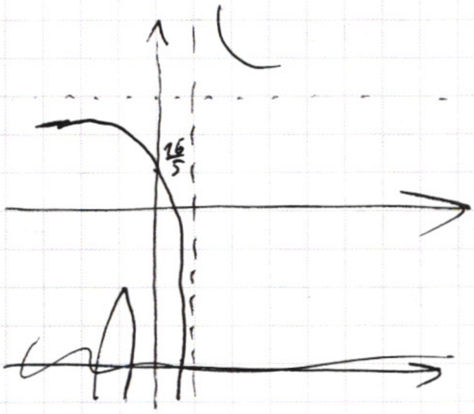
№6 $\dfrac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ $\frac{-87}{\frac{24}{57}}$

$y_1 = \dfrac{16x-16}{4x-5} = \dfrac{16x-20+4}{4x-5} = \dfrac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4 + \dfrac{4}{4x-5} = 4 + \dfrac{4}{x-\frac{5}{4}}$

$y_2 = -32x^2+36x-3$ $\quad x_в = \dfrac{-36}{-64} = +\dfrac{9}{16}$

$y_в = -32 \cdot \frac{81}{256} + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 = -\frac{2^5 \cdot 81}{2^8} + \frac{2^2 \cdot 9 \cdot 9}{2^4} - 3 = -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 =$

$= \cancel{\frac{3 \cdot 81 - 24}{8}} = \cancel{-\frac{267}{8}} = \frac{81}{8} - \frac{24}{8} = \frac{57}{8} = 7\frac{1}{8}$



$h = a\cos\beta$
$h = b\cos\alpha$
$a = c \cdot h_c$
$b = c \cdot h_b$
$h_a = a\cos\alpha$
$h_b = b\sin\alpha$

$a \cdot 0{,}25 + b = 4$
$a + b = 1$
$0{,}75a = -3$
$\frac{3}{4}a = -3$
$a = -4$
$b = 1 - a = 5$
$-4x$
$y = -4x+5$

$\times\frac{81}{3}$, 243, $+24$, 267

$\times\frac{36}{5}$, 180

$+\frac{144}{160}$, 304

$+\frac{180}{16}$, 196, $+\frac{196}{12}$, 208

$\dfrac{16x-16}{4x-5} = -32x^2+36x-3$ $\qquad \dfrac{16x-16}{4x-5} + 32x^2 - 36x + 3 = 0$

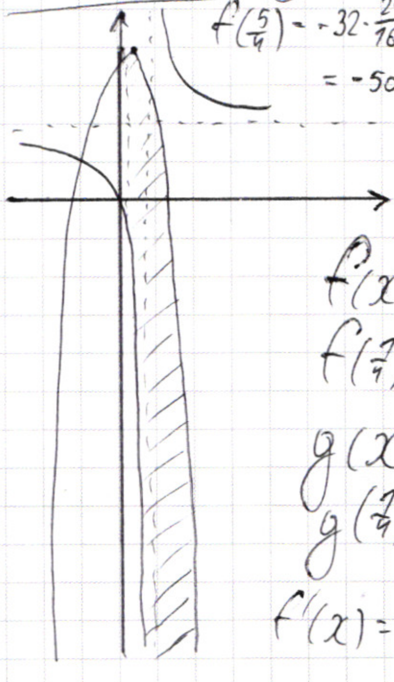
$\dfrac{16x + 128x^3 - 144x^2 + 12x - 160x^2 + 180x - 15}{4x-5} = 0$

$\dfrac{128x^3 - 304x^2 + 208x - 15}{4x-5} = 0$

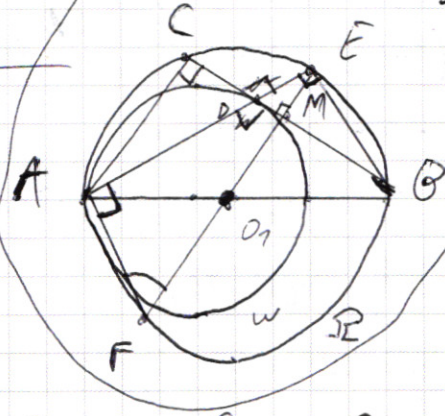
$\times\frac{36^2}{36}$, 216, 108, 1296, 394, 902 $\qquad \times\frac{32}{12}$, 74, 32, 394

$BC = 16$ $\quad \frac{AE}{OE} = \frac{BD}{AB}$

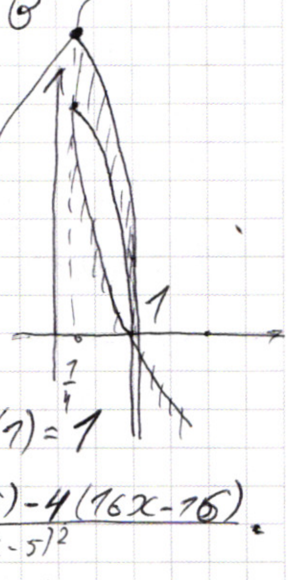
$f(x/y) = f(x \cdot y^{-1}) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$



$f\left(\frac{5}{4}\right) = -32 \cdot \frac{25}{16} + 36 \cdot \frac{5}{4} - 3 =$
$= -50 + 45 - 3 = -8$



$CD = \frac{25}{2}$
$BD = \frac{17}{2}$



$f(x) = \dfrac{16x-16}{4x-5}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \dfrac{4-16}{1-5} = \dfrac{12}{4} = 3$ $\qquad f(1) = 0$

$g(x) = -32x^2+36x-3$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = -32 \cdot \frac{1}{16} + \frac{36}{4} - 3 = -2 + 9 - 3 = 4$ $\qquad g(1) = 1$

$f'(x) = \dfrac{(16x-16)'(4x-5) - (4x-5)'(16x-16)}{(4x-5)^2} = \dfrac{16(4x-5) - 4(16x-16)}{(4x-5)^2} =$

$= \dfrac{16 \cdot 4x - 16 \cdot 5 + 4 \cdot 16}{(4x-5)^2} = -\dfrac{16}{(4x-5)^2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)