МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} (1)\ x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ (2)\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

(2) $x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

Пусть $a=x-6$, $b=2y-1$

Тогда (2): $a^2+9b^2=90$

(1) $x-12y$. $x=a+6$ $2y=b+1 \Rightarrow 12y=6b+6$

Тогда $x-12y=a+6-6b-6=a-6b$.

$2xy-12y-x+6=2y(x-6)-(x-6)=$

$=(x-6)(2y-1)=ab$

Тогда (1): $a-6b=\sqrt{ab}$.

Имеем: $\begin{cases} (1)\ a-6b=\sqrt{ab} \\ (2)\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

(1) $ab\geq 0$. $a^2-12ab+36b^2=ab$

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2-90=0 \end{array} \\ \hline 27b^2-13ab+90=0 \end{array}$$

Продолжение задачи 2.

Имеем: $a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \quad ab \geq 0$

$27b^2 - 13ab + 90 = 0$

$\cancel{a^2 - 13ab + \left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}b\right)^2 - \frac{25}{4}b^2 = 0}$

$\cancel{\left(a - \frac{13}{2}b\right)^2 = \left(\frac{5}{2}b\right)^2}$

$\cancel{\left|a - \frac{13}{2}b\right| = \left|\frac{5}{2}b\right|}$

Из (1) $\quad a = \frac{13b \pm \sqrt{169b^2 - 4 \cdot 36b^2}}{2} = \frac{13b \pm 5b}{2}$

1) $a = \frac{13b + 5b}{2} = 9b$

$27b^2 - 13 \cdot 9b \cdot b + 90 = 0$

$90 = 90b^2$

$b^2 = 1$

$b = 1 \qquad b = -1$

$a = 9 \qquad a = -9$

2) $a = \frac{13b - 5b}{2} = 4b$

$27b^2 - 13 \cdot 4b \cdot b + 90 = 0$

$90 = 25b^2$

$18 = 5b^2$

$b^2 = \frac{18}{5}$

$b = \pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad a = \pm\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ соотв.

Заметим, что ab в этом случае всегда ≥ 0, т.к. $ab = 9b^2$ или $4b^2$.

$x = a + 6, \quad y = \frac{b+1}{2}$. 1) $x = 9 + 6 = 15 \quad y = \frac{1+1}{2} = 1$. $\quad (15; 1)$

2) $x = -9 + 6 = -3 \quad y = \frac{-1+1}{2} = 0 \quad (-3; 0)$

3) $x = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 6 = \frac{12\sqrt{10}}{5} + 6 = \frac{12\sqrt{10} + 30}{5} \qquad y = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 1}{2} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

4) $x = -\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 6 \quad y = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 1}{2}$

Ответ: $(15; 1), (-3; 0), \left(\frac{12\sqrt{10}+30}{5}; \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 6; \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 1}{2}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$10x - x^2 + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Пусть $t = 10x - x^2 > 0$

$$t + |-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

Так как имеется $\log_3 t$, то $t > 0 \Rightarrow |-t| = t$.

$$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} = 5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 3}} = t^{\frac{\log_5 5}{\log_5 3}} = t^{\log_3 5}$$

$$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

$$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

$t = 1$ подходит $(1 + 1 \geq 1)$

$t \neq 1$: $$t^{\frac{\log_t 3}{\log_t 3}} + t^{\frac{\log_t 4}{\log_t 3}} \geq t^{\frac{\log_t 5}{\log_t 3}}$$

$$3^{\frac{1}{\log_t 3}} + 4^{\frac{1}{\log_t 3}} \geq 5^{\frac{1}{\log_t 3}} \quad \Big| : 4^{\frac{1}{\log_t 3}} > 0$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{\log_t 3}} + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{\log_t 3}}$$

Заметим, что при возраст. $\frac{1}{\log_t 3}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{\log_t 3}}$ будет уменьш. $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{\log_t 3}}$ будет возраст. Тогда, слева убывающая строго функц., а справа строго возраст. Заметим, что при $\frac{1}{\log_t 3} = 2$: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$. Тогда, при $\frac{1}{\log_t 3} \in (-\infty; 2]$ неравенство выполн., при остальн. нет

Продолжение задачи 3.

$\frac{1}{\log_t 3} \le 2$ $\quad t>0,\ t\neq 1.$

1) $\log_t 3 > 0$:

$1 \le 2\log_t 3$

$\log_t 3 \ge \frac{1}{2}$ ($\log_t 3>0$ авт. выпол.)

$t^{\log_t 3} \ge t^{1/2}$

$3 \ge \sqrt{t}$

$9 \ge t$

$0 < t \le 9$ (искл. когда $t=1$)

2) $\log_t 3 < 0$

$1 \ge 2\log_t 3$

$\log_t 3 \le \frac{1}{2}$ (с нер-ом выше важно только:

$\log_t 3 < 0 = \log_t 1$.

$3 < 1$.

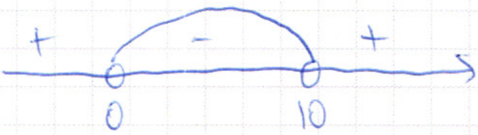
Такого не бывает.

$0 < 10x - x^2 \le 9$

$10x - x^2 > 0$

$x(10-x) > 0$

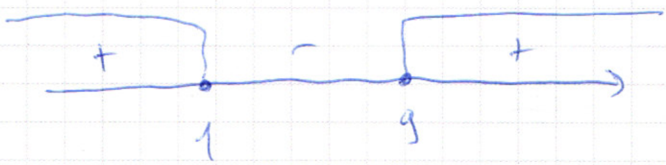
$x(x-10) < 0$



$10x - x^2 \le 9$

$x^2 - 10x + 9 \ge 0$

$(x-1)(x-9) \ge 0$



Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

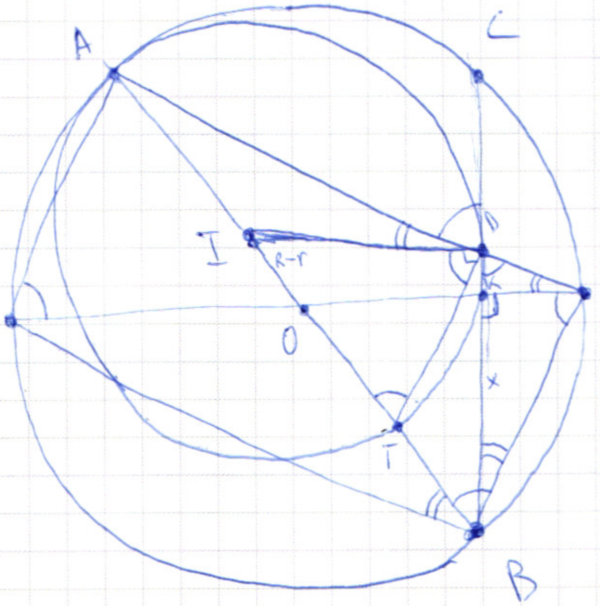
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



Дано: Окр. Ω и ω кас. в A внутр. образ., AB - диаметр Ω, BC - хорда Ω, кас. ω в D. $AD \cap \Omega = E$. Прям., прох. через $E \perp BC$, пересек. Ω в F. $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

Найти: $R(\Omega, \omega)$, $\cancel{\angle AEF}$ $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$.

Решение: Пусть центр $\Omega = O$, центр $\omega = I$. Так как окр касс., то O, I, A с одной прям. Т.к. CB - касат. к ω, то $ID \perp CB$. Пусть AB повт. пересек. ω в T. Тогда $\angle ATD = \angle ADC$ (между касат. и хорда к ~~ней~~) (пусть α) $\angle IDA = 90° - \alpha = \beta$. Заметим, что $\angle ADT$ опир. на диам. AT в ω, тогда $\angle ADT = 90° \Rightarrow \angle IDT = \alpha$. $\angle EDB$ верт. с $\cancel{EBA}$ $\angle CDA$. $\angle AEB$ опирается на диам. AB в $\Omega \Rightarrow \angle AEB = 90°$. Тогда $\angle EBD = 90° - \alpha = \beta$. Но $EF \perp CB$, тогда $\angle FEA = \beta$, $\angle FEB = \alpha$. $\angle FBA$ и $\angle FEA$ опираются на $\smile FA \Rightarrow \angle FBA = \beta$. $OE = OB$ (радиусы) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OBE = \angle OEB = \alpha$. Но тогда $\angle FBE = \angle FBA + \angle ABE =$

$= \alpha + \beta = 90° \Rightarrow FE$ - диаметр $\Rightarrow AB \cap FE = O$. $FE \cap CB = K$.

Т.к. $CB \perp FE$, а FE - диаметр, то $CK = KB$. Пусть ~~KB~~ $KB = x$. $KD = \frac{17}{2} - x$. $CD = \frac{15}{2}$. Тогда $KC = KB \Rightarrow x = \frac{17}{2} - x + \frac{15}{2} \Rightarrow 2x = \frac{32}{2} = 16$

$x = 8$

Продолжение задачи 4.

Пусть $R(\Omega)=R$, $R(\omega)=r$. Тогда $\cancel{QA}=OI=OA-IA=R-r$. Т.к. $ID \parallel FE$ (обе перп. CD), то $\triangle BID \sim \triangle BOK \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO}{BI}=\frac{BK}{BD}=\frac{R}{2R-r}=\frac{8\cdot 2}{17} \Rightarrow 17R=32R-16r \Rightarrow$

$\Rightarrow 15R=16r$. Т.к. CB - касат. к ω, то $BD^2=BT\cdot BA$ (касат. и ~~хорд~~ секущ.) $\left(\frac{17}{2}\right)^2=(IB-IT)\cdot 2R=$

$=(2R-r-r)\cdot 2R=(2R-2r)\cdot 2R=4R(R-r)$.

$R=\frac{16r}{15}$. $\left(\frac{17}{2}\right)^2=\frac{4\cdot 16r}{15}\left(\frac{16r}{15}-\frac{15}{15}r\right)=\frac{4\cdot 16\, r\cdot r}{15\cdot 15}=\left(\frac{8r}{15}\right)^2$

$\frac{8r}{15}=\frac{17}{2} \Rightarrow r=\frac{17\cdot 15}{2\cdot 8}$. $R=\frac{\cancel{16}^{8}\cdot 17\cdot \cancel{15}}{\cancel{15}\cdot 8\cdot 8}=17$.

$\angle AFE$ и $\angle ABE$ опир. на $\overset{\frown}{AE} \Rightarrow \angle AFE=\alpha$. $AD\cdot DE=CD\cdot DB=$ (пер. хордой) $=\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2}$. Т.к. $TD \parallel BE$, то $\triangle ADT \sim \triangle AEB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AT}{AB}=\frac{2r}{2R}=\frac{r}{R}=\frac{\cancel{r}\cdot 15}{16\cancel{r}}=\frac{15}{16}$. $\frac{AD}{AD+DE}=\frac{15}{16}$. Пусть

$AD=x$, $DE=y$. $\frac{x}{x+y}=\frac{15}{16} \Rightarrow 16x=15x+15y \Rightarrow x=15y$.

$xy=\frac{\cancel{15}\cdot 17}{4}=\cancel{15}y\cdot y \Rightarrow y=\frac{\sqrt{17}}{2}$. $x=\frac{15\sqrt{17}}{2}$. Тогда $AE=$

$=\frac{16\sqrt{17}}{2}=8\sqrt{17}$. Тогда по т. синус. $\frac{AE}{\sin\angle AFE}=2R \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle AFE=\frac{AE}{2R}=\frac{8\sqrt{17}}{34}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$ (острый). $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot EF\cdot$

$\cdot\sin\angle AEF$. Т.к. $\angle AFE+\angle AEF=90^\circ \Rightarrow \cos\angle AEF=\frac{4\sqrt{17}}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle AEF=\sqrt{1-\frac{16\cdot\cancel{17}}{17\cdot\cancel{17}}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$. $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 8\cancel{\sqrt{17}}\cdot\cancel{2}\cdot 17\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}=$

$=17\cdot 8=136$.

Ответ: $R(\Omega)=17$, $R(\omega)=\frac{17\cdot 15}{16}$, $\angle AFE=\arcsin\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$,

$S_{\triangle AEF}=136$.

Задача 5

Заметим, что $f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$, $f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$, $f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$,

Аналогично $f(11)=2$, $f(13)=3$,

$f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$.

$f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(2\cdot \frac{1}{2})=f(2)+f(\frac{1}{2})=0+f(\frac{1}{2})=f(1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$. $f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)+f(\frac{1}{2})=f(x)$.

Т.е. $f(x)=f(\frac{x}{2})$. $f(1)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{2})=0 \Rightarrow f(\frac{1}{4})=0$

и т.д. $f(\frac{x}{3})=f(x)+f(\frac{1}{3})\cancel{=f(x)+f(1)}=f(x)$

$f(3\cdot\frac{1}{3})=f(3)+f(\frac{1}{3})=0+f(\frac{1}{3})=0 \Rightarrow f(\frac{1}{3})=0$.

Аналогично $f(5\cdot\frac{1}{5})=f(5)+f(\frac{1}{5})=1+f(\frac{1}{5})=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{5})=-1$. $f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{x})=-f(x)$. $\cancel{f(\frac{x}{p})=f(x)+f(\frac{1}{p})=}$

$\cancel{=f(x)-f(p)}$. ~~Пусть $\frac{x}{y}$ приведём дробь~~ $f(\frac{x}{y})=$

$=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$. $f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=0$ $f(8)=f(2)+f(4)=0$.

$f(9)=2f(3)=0$ $f(10)=f(2)+f(5)=1$. $f(12)=f(4)+f(3)=$

$=0$. $f(14)=f(2)+f(7)=1$ $f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=f(2)+f(8)=0$ $f(18)=f(2)+f(9)=0$ $f(20)=f(4)+$

$+f(5)=1$ $f(21)=f(3)+f(7)=1$. $f(22)=f(2)+f(11)=$

$=2$. $f(24)=f(6)+f(4)=0$ $f(25)=f(5)+f(5)=2$.

Таким образом, чтобы $f(\frac{x}{y})<0 \Rightarrow f(x)-f(y)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)<f(y)$. Значения выписан. $f(k)$,

$k\in[2;25]$ либо 0, либо 1, либо 2, либо 3, 4, 5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение задачи 5.

Кол-во $\forall$ K из диап.: $f(K)=0$: 10

$f(K)=1$: 7

$f(K)=2$: 3

$f(K)=3$: 1

$f(K)=4$: 2

$f(K)=5$: 1

Тогда если $f(x)=0$, то выбрать $f(y)>0$ 14 способ. (× 10 спос.)

если $f(x)=1$, то аналог. 7 способ. (A × 7 способ.)

$f(x)=2$ → 4 способа у подобр. (×3 спос.)

$f(x)=3$ → 2 спос. (× 1 спос.)

$f(x)=4$ → 1 способ. (× 2 спос.)

Тогда всего способов $10\cdot14+7\cdot7+3\cdot4+2\cdot1+$
$+1\cdot2=$
$=140+49+12+2+2=205.$

Ответ: 205.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \left(\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}\right)$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

~~$\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}: -\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{5}} + \frac{2\sin 2\beta}{\sqrt{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$~~

$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} \Big| : \cos^2\alpha \neq 0 = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$.

Пусть $2\alpha+2\beta=\varphi$, $2\beta=\gamma$. Тогда:

$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(\varphi+\gamma)+\sin(\varphi-\gamma) = -\frac{2}{5}$

$\sin\varphi\cos\gamma + \sin\gamma\cos\varphi + \sin\varphi\cos\gamma - \sin\gamma\cos\varphi =$

$= 2\sin\varphi\cos\cancel{\varphi}\gamma = -\frac{2}{5}$

$\cos\gamma = \cancel{-}\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5\cdot 2\,\cancel{\sin\varphi}\cancel{=1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Но тогда $\sin\varphi = -\cos\gamma$ $\quad$ ~~$\sin(\frac{\pi}{2}+$~~ $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) =$

$= -\cos\gamma$.

$-\sin\varphi = \cos\gamma$

$\sin(-\varphi) = \cos\gamma$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Продолжение задачи 1.

$\sin(-\varphi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$.

$-\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$-2\alpha - 2\beta = \frac{\pi}{2} - 2\beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$-2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Т.е. либо $\sin\alpha = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$tg\alpha = -1$.

либо $\sin\alpha = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$tg\alpha = -1$

~~$-\varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

~~$-2\alpha - 2\beta = \pi + \frac{\pi}{2} - 2\beta + 2\pi n$~~

~~$-2\alpha = \pi + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

~~$2\alpha = -\pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

~~$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

~~$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$~~.

$-\varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$-2\alpha - 2\beta = \frac{\pi}{2} + 2\beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$-2\alpha = \frac{\pi}{2} + 4\beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$\alpha = -\frac{\pi}{4} - 2\beta + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{2} - 4\beta + 2\beta\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ~~$\sin(-\frac{\pi}{2}$~~

$\sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

т.е. $tg\alpha = \dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{4} - 2\beta\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4} - 2\beta\right)}$

или $tg\alpha = tg\left(\frac{3\pi}{4} - 2\beta\right)$

Так как значений не меньше 3-ёх, однако и получилось у нас * 3, тогда все они подходят.

$-\frac{\pi}{2} - 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi k$ $\quad -\frac{\pi}{2} - 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi k$.

Ответ: $tg\alpha = -1$, $tg\alpha = tg\left(\frac{3\pi}{4} - 2\beta\right)$, $tg\alpha = tg\left(-\frac{\pi}{4} - 2\beta\right)$, где $\beta = \dfrac{-\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{2}$, $-\frac{3\pi}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №10

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$2y(x-6)-(x-6)$

$\frac{13}{2}$ $\frac{169}{4}6^2$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9 = 90$

$(6y-3)^2$

$$\boxed{(x-6)^2+(6y-3)^2=90}$$

$144 - 36 = 108$

$$\boxed{x\geq 12y}$$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$

$x^2+36y^2-12x-36y-45=0$

$108y^2-26xy+48y+13x+39=0$

$36 \cdot 4 = 144$

13

$-x^2+10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq \cancel{x}+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t=10x-x^2,\ t>0$

$t+|-t|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$

$t+|-t|^{\log_3 4}\geq 0$

$\log_5(t+t^{\log_3 4})\geq \cancel{\log_5 5^{\log_3 t}}\ \log_3 t$

$\frac{169}{4}-\frac{36\cdot 4}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a = \frac{136 \pm \sqrt{\cancel{1690}^2} \, 56}{}$

$$\begin{array}{r} \overset{2}{13} \\ \times\ 9 \\ \hline 117 \\ -\ 27 \\ \hline 90 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 4 \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 52 \\ -\ 27 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$t^{\frac{\log_3 3}{\log_3 4}} + 1 \geq t^{\frac{\log_3 5}{\log_3 4}}$$

$$t^{\log_4 3} + 1 \geq t^{\log_4 5}$$

$$\left(t^{\log_4 5}\right)' = \log_4 5 \cdot t^{\log_4 5 - 1}$$

$$\left(t^{\log_4 3}\right)' = \log_4 3 \cdot t^{\log_4 3 - 1}$$

$$t^{\log_3 4} \qquad t^{\frac{\log_t 4}{\log_t 3}} = 4^{\frac{1}{\log_t 3}}$$

$$3^{\frac{1}{\log_t 3}} + 4^{\frac{1}{\log_t 3}} \geq 5^{\frac{1}{\log_t 3}}$$

$$3^2 + 4^2 \geq 5^2 \quad | : 4^2$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 \geq$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

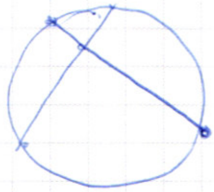
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$



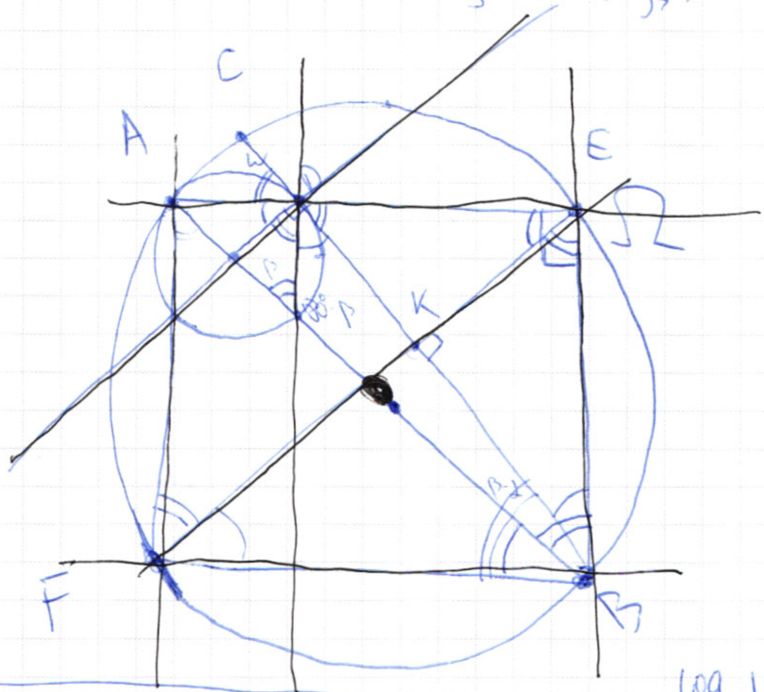
$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) =$

$= \cancel{\sin(2\alpha+2\beta)}\cos 2\beta +$ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\log_3 4 - \log}$

$\log_3 t = \frac{\log_5 t}{\log_5 3}$ $\quad + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta +$

$+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$



$R(\omega, \Omega) = ?$

$\angle AFE$

S_{AEF}

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$t\left(1+t^{\log_3 4-1}\right) \geq 5^{\cancel{\log_3 t}\frac{\log_3 t}{\log_5 3}}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{-\log_5 3}$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0

17	18	19	20	21	22	23	24	25
4	0	4	1	1	2	5	0	2

$2\alpha+2\beta=\varphi$
$2\beta=\gamma$

$\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\varphi+\gamma)+$
$+\sin(\varphi-\gamma)=-\frac{2}{5}$

~~140~~
119
18,6
205

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin$

$\cancel{\sin 2\alpha}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

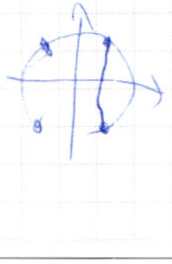
$2(\sin\alpha\cos\beta$

$\sin 2\alpha=a$
$\sin 2\beta=b$

$\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$ $\Big|:\cos^2\alpha$

$\sin 2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\sin$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad -\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{5}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \underbrace{\cancel{\sin 4\beta}}_{2\sin 2\beta \cos 2\beta} \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

~~$13x(1-2y) =$~~

$(x-6)^2 + 3^2(2y-1)^2 = 90$

$\boxed{a = x-6}$ $\boxed{b = 2y-1}$ $\quad \boxed{a^2 + 9b^2 = 90}$

~~$a - 6b$~~

$f\left(\frac{3}{x}\right) =$

$f\left(\frac{x}{3}\right) = f(x) +$

$f\left(\frac{1}{3}\right) =$

$x = a+6$

~~$12y$~~ $2y = b+1$

$12y = 6b+6$

$x - 12y = a + \cancel{6} - 6b - \cancel{6}$ $\quad f(4)$

$f\left(x\cdot\frac{1}{7}\right) =$

$= f(x$

$f\left(\frac{x}{p\cdot k}\right) = f\left(\frac{x}{p}\right) + f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{x}{p}\right) = f(x) + f$

$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик

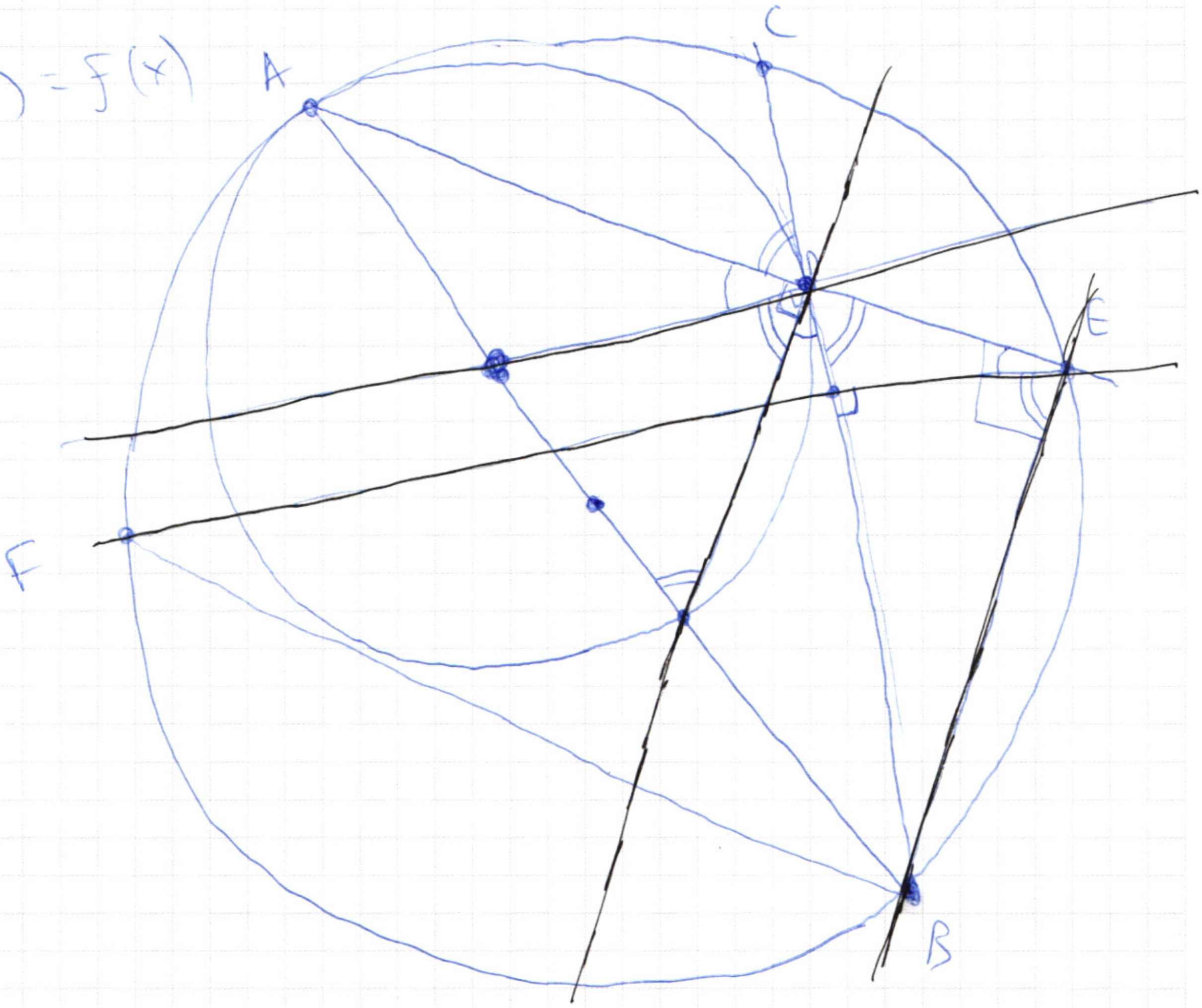
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$



$f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) =$ > 0 раз.

$= 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f(1\cdot 1) = 2f(1)$

$\forall a, b: \quad f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \ \forall p$ - прост.

$\boxed{\begin{array}{l} 2 \le x \le 25 \\ 2 \le y \le 25 \\ f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \end{array}}$

$x, y \in N$

$\boxed{\begin{array}{l} f(2) = 0 \\ f(3) = 0 \\ f(5) = 1 \\ f(7) = 1 \end{array}}$

$f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$

$\boxed{f(1) = 0}$ $\boxed{f\left(\frac{1}{3}\right) = 0}$

$f($ $\underset{0}{f\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)} = \underset{0}{f(2)} + \underset{0}{f\left(\frac{1}{3}\right)}$

$\underset{0}{f\left(\frac{1}{3}\cdot 3\right)} = \underset{0}{f(3)} + f\left(\frac{1}{3}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)