МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

Пусть ~~x-1=a и y-2~~ $x-2=a$ и $y-1=b$, тогда система равносильна системе:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$ ОДЗ: $ab\geq 0$

$a-2b\geq 0 \Leftrightarrow a\geq 2b$

Из первого уравнения имеем:

$a^2-4ab+4b^2=ab \mid :b^2$ $b\neq 0$, иначе $a=0$ и $a^2=25$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$$

Пусть $\frac{a}{b}=t$, тогда:

$t^2-5t+4=0$

$D=25-16=9$

$t_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2}$; $t_1=1$, но $a\geq 2b$ и $ab\geq 0$,

то есть $t_1=1$ – не входит в ОДЗ:

$t=4$, тогда:

$a=4b$

Из второго уравнения имеем:

$16b^2+9b^2=25$

$b^2=1$

$b_1=1$ $a_1=4$ и $b_2=-1$ $a_2=-4$

см. другую страницу

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2.

Но если $b=-1$ и $a=-4$, то

$a-2b=-4+2=-2<0$ — не входит в ОДЗ,

то

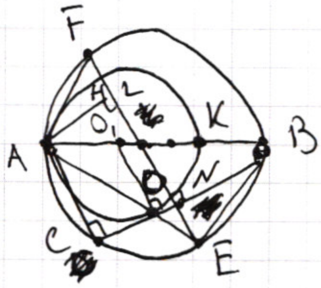
$a=4$ и $b=1$

$x-2=4$ и $y-1=1$

$x=6$ $\qquad$ $y=2$

Ответ: $x=6$ и $y=2$.

№4.



Пусть радиусы Ω и ω — это R и r соответственно. Пусть AB пересекает ω в K. Тогда AK — диаметр ω, так как AK перпендикулярен касательной к Ω, но A — общая точка касания, то есть AK перпендикулярен и касательной к ω, так как они совпадают, то есть AK — диаметр ω. Запишем теорему о касательной и секущей для точки B и ω:

$BD^2 = AB\cdot KB$, но $BD=17$, $AB=2R$ и $KB=2R-2r$, то

$17^2=2R\cdot(2R-2r)$, то есть

$R(R-r)=\left(\frac{17}{2}\right)^2$

~~Пусть FE пересекает AB в точке L, тогда A и BE в точке N.~~

см. след. лист. =>

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

O_1BD O_1 - центр ω.

~~Тогда~~ Δ ~~LNB~~ $O_1BD \sim \Delta ACB$, действительно:

$\angle ABC$ и $\angle$ ~~LBN~~ O_1BD - совпадают, а

$\angle ACB = 90^\circ$ (как опирающийся на диаметр AB) и ~~$\angle LNB = 90^\circ$, так как $FE \perp CB$ (по условию), тогда из подобия:~~

~~$\frac{BL}{AB} = \frac{BN}{BC}$~~ ~~то~~ $\angle O_1DB = 90^\circ$, так как BD касательная к ω в D, а O_1D - радиус ω в D.

Из подобия:

$$\frac{BO_1}{AB} = \frac{BD}{BC};\ BO_1 = 2R - r,\ AB = 2R,\ BD = 17,$$

$$BC = BD + DC = 17 + 8 = 25.$$

То есть:

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} \Rightarrow 50R - 25r = 34R \Rightarrow \cancel{R=16}\ r = \frac{16}{25}R.$$

То есть

$$R(R-r) = R\left(R - \frac{16}{25}R\right) = \frac{9}{25}R^2,$$

$$\frac{9}{25}R^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{85}{6} \Rightarrow r = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{6} = \frac{136}{15}.$$

Заметим, что $\angle AFE = \frac{\smile AE}{2}$ и $\angle ABE = \frac{\smile AE}{2}$ (как вписанные в Ω)

См. оборот =>

№4

а $\angle AEB = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр AB.
Тогда из $\triangle ABE$: $\angle AFE = 90^\circ - \angle EAK$,
а $\angle EAK = \frac{\breve{KD}}{2}$, как вписанный в ω, а
$\angle DO_1K = \breve{KD}$, как центральный в ω, то
$\angle AFE = 90^\circ - \frac{\angle DO_1K}{2} \Leftrightarrow 2\angle AFE = 180^\circ - \angle D_1OK$

Из этого следует, что
$\sin(2\angle AFE) = \sin(\angle D_1OK)$, а
$\sin(\angle D_1OK) = \frac{BD}{O_1K} = \frac{17}{2R-r} = \frac{17}{2\cdot\frac{85}{6} - \frac{136}{15}} = \frac{17\cdot 15}{85\cdot 5 - 136} =$
$= \frac{255}{289}$, т.е. $\sin(2\angle AFE) = \frac{255}{289}$

~~$\sin(2\angle AFE) = 2\sin(\angle AFE)($~~

то $\angle AFE = \frac{\arcsin\frac{255}{289}}{2}$

Заметим, что $\breve{EB} = 180^\circ - \breve{AE} = 180^\circ - 2\angle AFE$,
но $\angle ELB = \angle DO_1K$ (L - точка пересечения AB и FE), так как $FE \parallel O_1D$ ведь
$FE \perp BC$ и $O_1D \perp BC$, тогда
$\angle ELB = 180^\circ - 2\angle AFE$, но $\breve{EB} = 180^\circ - 2\angle AFE$,
значит $\angle ELB$ - центральный в Ω,
то есть FE - диаметр.

Тогда в $\triangle AEF$:
$FE = 2R = 2\cdot\frac{85}{6} = \frac{85}{3}$
а AH - высота из A равна CN
(N - точка пересечения BC и EF),
так как $AH \perp FE$ и $CN \perp FE$,
а также $AC \perp AH$ и $AC \perp CN$

См. след. лист

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Но $\ell N = \frac{BC}{2} = \frac{25}{2}$, так как FE - диаметр и $FE \perp BC$, то $AH = \frac{25}{2}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{AH \cdot FE}{2} = \frac{\frac{25}{2} \cdot \frac{85}{3}}{2} = \frac{2125}{12}$

Ответ: радиус Ω равен $\frac{85}{6}$, радиус ω равен $\frac{136}{15}$, $\angle AFE = \frac{\arcsin\frac{255}{289}}{2}$ и $S_{\triangle AEF} = \frac{2125}{12}$.

№5

Заметим $f(2)=0$, что $f(1)=0$, так как $f(2)=f(1)+f(2)$.

Тогда $f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$, так как $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)=0$.

А теперь рассмотрим:

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=f(3)+f(2)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=f(4)+f(3)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=f(8)+f(2)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=f(9)+f(2)=0$

№5

$f(19) = 34$

$f(20) = f(10) + f(2) = 1$

$f(21) = f(7) + f(3) = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = f(12) + f(2) = 0$

То есть $f \neq 0$ в 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23., ~~в 13 точках~~, ~~значит~~ способов выбрать ~~x~~ и y ~~из этих точек~~

Чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, должно $f(x) < f(y)$.

То есть $f(y) \geq 2$, а таких точек 6: 11, 13, 15, 17, 19, 22, 23.

Значит способов выбрать y при $f(x) = 1$ всего 6, а способов выбрать ~~f(x)~~ x, так, что $f(x) = 1$ 7,

итого $6 \cdot 7 = 42$ способов

Если $f(x) = 2$, то $f(y) \geq 3$, таких y всего 4: 13, 17, 19, 23, а x, так, что $f(x) = 2$ всего 2: 11 и 22,

итого: $4 \cdot 2 = 8$ способов

$f(x) = 3$, то $f(y) \geq 4$, таких y всего 3: 17, 19, 23, а x, так, что $f(x) = 3$ всего 1: $x = 3$.

Итого $3 \cdot 1 = 3$ способа

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

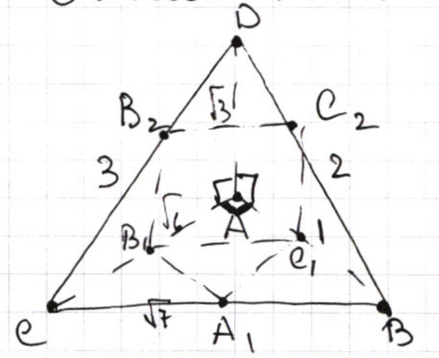
№5

$f(x) = 4$, то $f(y) \geq 5$, то есть $y = 5$, а x равен 17 или 19. Итого 2 способа.

$f(x) \geq 5$ – не бывает, так как все значения f ограничены 5, то есть $f(y) \leq 5$.

Итого: $42 + 8 + 3 + 2 = 55$ способов

Ответ: 55 пар.



№7

Пусть A_1 – середина BC, B_1 – середина AC, C_1 – середина AB, B_2 – середина CD, C_2 – середина BD.

Точки A, A_1, B_1, C_1 – лежат в плоскости основания ABC и на данной сфере, поэтому $\cancel{AA_1B_1C_1}$ – $AC_1A_1B_1$ – вписанный, но B_1A_1 и C_1A_1 – средние линии в $\triangle ABC$ поэтому $B_1A_1 \parallel AC_1$ и $B_1A \parallel A_1C_1$, тогда $\angle B_1AC_1 + \angle B_1A_1C_1 = 180^\circ$ из вписанного $AC_1A_1B_1$ и $\angle B_1AC_1 = \angle B_1A_1C_1$ из параллелограмма $AC_1A_1B_1$. см. оборот $\Rightarrow$

Значит $\angle B_1AC_1 = 90°$.

Заметим, что $B_1C_1 \parallel BC$ и $B_2C_2 \parallel BC$, а также $B_1B_2 \parallel AD$ и $C_1C_2 \parallel AD$ как средние линии в $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ и $\triangle ABD$ соответственно, значит B_1, B_2, C_1, C_2 лежат в одной плоскости и $B_1B_2C_2C_1$ параллелограмм, но все эти точки лежат на данной сфере, значит аналогично первому случаю получим:

$\angle C_1B_1B_2 = \angle C_1C_2B_2 = 90°$ и

$\angle B_1B_2C_2 = \angle B_1C_1C_2 = 90°$, то есть $BC \perp AD$, так как $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel BC$ и $B_1B_2 \parallel C_1C_2 \parallel AD$, то $\angle CAD = \angle BAD = 90°$

Тогда по теореме Пифагора:

$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2}$; $AC = \sqrt{CD^2 - AD^2}$; $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$

$AD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$; $AC = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$; $BC = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 1^2} = \sqrt{7}$

Заметим, что радиус сферы, описанной R должен быть таким, что выполняются ~~неравенство~~ неравенства треугольников для $\triangle OAB$; $\triangle OBC$; $\triangle OAC$; $\triangle OAD$; $\triangle OBD$; $\triangle OCD$ (O центр описанной сферы)

см. следующий. лист =>

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

А именно:

~~$2R \geq BC$~~ ~~$2R > BC$~~

~~$2R \geq$~~ ~~$2R >$~~

$2R > AB \Rightarrow R > \frac{1}{2}$

$2R > BC \Rightarrow R > \frac{\sqrt{7}}{2}$

$2R > AC \Rightarrow R > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2R > AD \Rightarrow R > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2R > BD \Rightarrow R > 1$

$2R > CD \Rightarrow R > \frac{3}{2}$

При этом ~~одно~~ неравенство может быть нестрогим, если О лежит в середине ~~на~~ данного отрезка, то есть $R \geq \frac{3}{2}$ или $R_{min} = \frac{3}{2}$.

~~Поэтому~~

Ответ: $BC = \sqrt{7}$ и $R = \frac{3}{2}$.

№6.

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

при $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ $4x+3 < 0$, то есть $\frac{12x+11}{4x+3} < 3$

(см. следующий лист =)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$-8x^2-30x-17$ – парабола с ветвями вверх и $x_0=-\frac{15}{8}$, что принадлежит $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$, поэтому минимальное значение будет или при $x=-\frac{11}{4}$ или при $x \to -\frac{3}{4}$

$x=-\frac{11}{4}$, то

$-8\left(-\frac{11}{4}\right)^2-30\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)-17=-\frac{11^2}{2}+\frac{15\cdot 11}{2}-17=$

$=\frac{11\cdot(15-11)}{2}-17=22-17=5$

$x=-\frac{3}{4}$, то

$-8\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2-30\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-17=-\frac{3^2}{2}+\frac{3\cdot 15}{2}-17=$

$=\frac{3(15-3)}{2}-17=18-17=1$, то

получим

$3\le ax+b\le 1$ при $x\to -\frac{3}{4}$,

что конечно же невозможно, поэтому таких a и b не существует.

Ответ: $\varnothing$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin(4\alpha+4\beta - 2\alpha) +$

$+ \sin 2\alpha = \sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha - \cos(4\alpha+4\beta)\cdot$

$\cdot \sin 2\alpha + \sin 2\alpha$, а

$\sin(4\alpha+4\beta) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} =$

$= \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда

$\sin(4\alpha+4\beta) = \pm\frac{4}{5}$, а

$\cos(4\alpha+4\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(4\alpha+4\beta)} =$

$= \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$; получим:

$\pm\frac{4}{5}\cos 2\alpha \pm \frac{3}{5}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\pm 4\cos 2\alpha \pm 3\sin 2\alpha + 5\sin 2\alpha = -4$

1. $4\cos 2\alpha + 3\sin 2\alpha + 5\sin 2\alpha = -4$

$\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = -1$

Возможно только при

$\cos 2\alpha = -1$

$2\alpha = \pi + 2\pi k;\ k \in Z$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ k \in Z\} \Rightarrow tg\alpha$ - неопределён

2. $4\cos 2\alpha - 3\sin 2\alpha + 5\sin 2\alpha = -4$

$4\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = -4$

$2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -2$

$\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 22\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = -2}$

$\cancel{\frac{1}{2}\left(\sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -2}$

$\cancel{\sin(2\alpha +}$

Возможно при $\cos 2\alpha =$

Рассмотрев все 4 случая при помощи введения дополнительного угла получим значения $tg\,\alpha$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha \qquad \cos(2\alpha+4\beta)$

2. $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$\underline{\sin(2\alpha+4\beta)}$

$\sqrt{}$

$x(y-1)+$

$x(y-1)-2(y-1)$

$x^2-4x+4+$

$\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$9y^2-18y+9$

$(x-2)^2+3(y-\cancel{1})^2=25$

$x-2=a$

$y-1=b$

$ab\geq 0$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+3^2(y-1)^2=25 \end{cases}$

$a-2b\geq 0$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$ab=a^2-4ab+4b^2$

$a^2-5ab+4b^2$

$a^2=25-9b^2$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$-5ab-5b^2+25=0$

$b^2+ab+5=0$

$D=a^2-20$

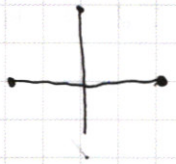
$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta +$

$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ $\quad \frac{2}{\sqrt{5}}$



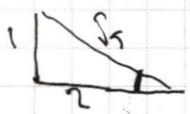
$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha =$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1)$

$2\cos^2 2\beta +$

$-\frac{1}{\sqrt{5}} \pm$



$\sin(2\beta +$

$-\frac{1}{\sqrt{5}} +$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha = a$ и

$\cos\beta = b$

$\cos^2 - \sin^2$

$2\cos$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$2(\sin\alpha\cos\alpha\,(2\cos^2\beta - 1) + \sin\beta\cos\beta\,(2\cos^2\alpha - 1))$

$2(\cos\beta(\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + \sin$

$2((\cos\alpha\cos\beta)(\sin\alpha\cos\beta + \sin$

$\sin(\alpha+\beta)$ $-$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

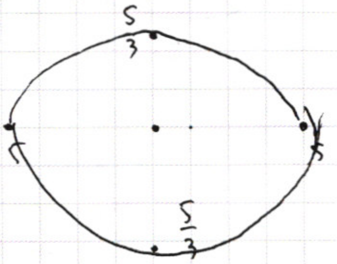
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$



$a-2b=\sqrt{ab}$

$a^2-4ab+b^2=ab$

$a^2-5ab+b^2=0 \quad | : b^2$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2$

$\frac{a}{b}=t$

$t^2-5t+1=0$

$D=25-4=21$

$\frac{a}{b}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2} \qquad \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

a^2

$a=$

$\left(\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}b\right)^2 \quad 46$

$\frac{25\pm10\sqrt{21}+21}{2}b^2+9b^2=25$

$b^2 \cdot 23\pm5\sqrt{21}=25$

$b=\frac{5}{\sqrt{23\pm5\sqrt{21}}}$

$a=\frac{5}{2}(5\pm\sqrt{21})$

$23^2 \cdot 5\cdot2$

$25\cdot21$

$23\cdot23=69+46\cdot10=529$

$25\cdot21=21+50\cdot10=525$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$\log_5 \log_{12}(x^2+18x)$

$4'$

x

$x^2+18x>0$

-18

$(\log_{12}13-1)(x+18)-18$

$(\log_{12}\frac{13}{12})(x+18)-18$

$x+18$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

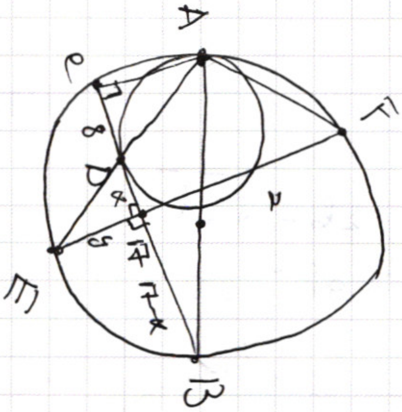
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ: $x-2y \geq 0$

$xy-x-2y+2 \geq 0$



$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$ab \geq 0$

$a \geq 2b$

$a^2-5ab+b^2=0 \quad |:b^2$

$\frac{a}{b}=t$

$t^2-5t+1=0$

$D=25-4=21$

$\frac{a}{b}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

$5-\sqrt{21}<2$

$a=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}b$

$a=\frac{5+\sqrt{21}}{2}b$

$\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}b\right)^2+9b^2=25$

$b^2\left(\frac{\overbrace{25+10\sqrt{21}+21}^{46}}{4}+9\right)=25$

~~$b^2\left(31+5\sqrt{21}\right)=25$~~

~~$b=\frac{5}{\sqrt{31+5\sqrt{21}}}$~~

21

R и r

∠AFE

$S_{\triangle AEF}$

$(8+x)(17-x)-5^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$D = 900 -$ $\quad -\frac{15}{8}$ $\quad -\frac{b}{2a}$

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$\cancel{3x+}$ $\frac{3(4x+3)+2}{4x+3}$ $\quad -8x^2-30x-17 \quad -\frac{15}{8}$

$3 + \frac{2}{4x+3}$ $\quad -\frac{b}{2a} = \frac{30}{-16}$

$-\frac{15}{8}$ $\quad 3 \quad 2$

$\frac{2}{4x+3} \quad 4x+3 \in [-8; 0)$

$-\frac{15}{8}^2 + \frac{15}{4}^2$

$0 \le ax+b \le 11\frac{1}{8}$

$\frac{15}{8}^2 - 17$ $\quad 15 \times 15 = 75,\ 15,\ 225$

$-8 \cdot \frac{11^2}{16} + \frac{11 \cdot 30^{15}}{4_2} - 17$

$\frac{225}{8} - 17$

$-\frac{121}{2} + \frac{165}{2}$ $\quad 17 \times 8 = 136$

$22 - 17 = 5$ $\quad \frac{225-136}{8}$

$\frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{3 \cdot H}{2}$

$0 \le ax+b \le 5$ $\quad \frac{100-11}{8} = \frac{89}{8}$

$a > 0 \quad -\frac{3}{4}$

$x <$ $\quad 11\frac{1}{8}$ $\quad \sqrt{11}$ $\quad 3\sqrt{2} = 3H$

$a < 0$

$-\frac{11a}{4} \ge b$ $\quad 3 \quad 2 \quad H = \sqrt{2}$

$b \le \frac{11a}{4}$ $\quad \sqrt{7}$

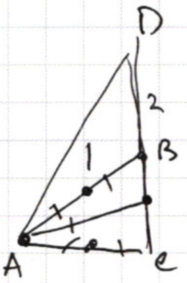
$\begin{cases} -\frac{11}{4}a + b \ge 0 \\ -\frac{3}{4}a + b \le 5 \end{cases}$

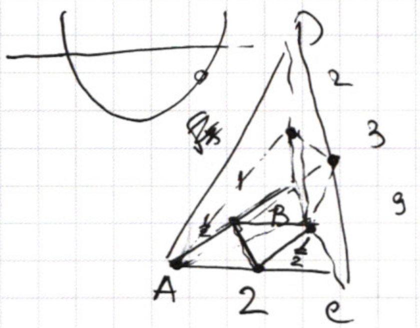
$-\frac{3a}{4} + \frac{11a}{4} \le 5$ $\quad a \le 2,5$

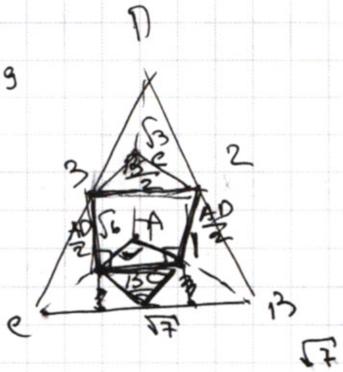
$2a \le 5$

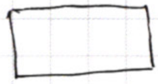
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

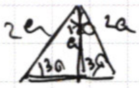
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

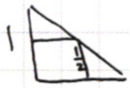


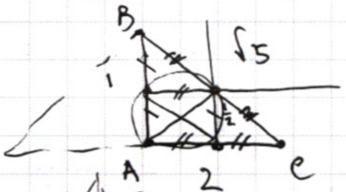


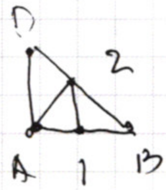












2 + 14

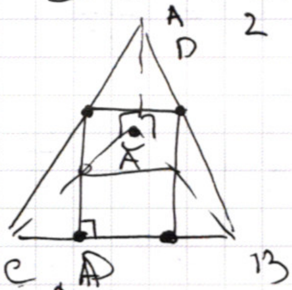
4 +

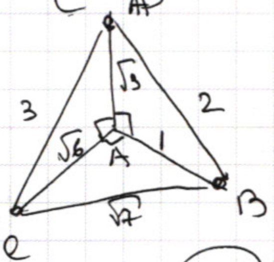
5 + 15

7 +

3 + 4 + 6 33

26





3

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin(4\alpha+4\beta) = \pm\frac{4}{5}$

$\cos(4\alpha+4\beta) = \pm\frac{3}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)$

$\sin(4\alpha+4\beta-2\alpha)$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha - \cos(4\alpha+4\beta)\sin 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\pm\frac{4}{5}($

$\pm\frac{4}{5}\cos 2\alpha \pm \frac{3}{5}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\pm\frac{4}{5}\frac{tg^2\alpha - 1}{tg^2\alpha + 1}$

$:\cos^2\alpha \quad \pm\frac{4}{5}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \pm \frac{6}{5}\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\pm\frac{4}{5}(1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$

$1 \le x \le 24$

$1 \le y \le 24$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(5) = 1$

$f(10) = 1$

$f(15) = 1$

$f(20) = 1$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(6) = 0$

$f(12) = 0$

$f(18) = 0$

$f(24) = 0$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{y})$

$f(1) = 0$

$f(x) = -f(\frac{1}{x})$

$f(1) = 0$
$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(4) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$- f(11) = 2$
$f(12) = 0$
$- f(13) = 3$
$f(14) = 1$

$f(15) = 1$
$f(16) = 0$
$f(17) = 4 -$
$f(18) = 0$
$f(19) = 4 -$
$f(20) = 2$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2 -$
$f(23) = 5 -$
$f(24) = 0$

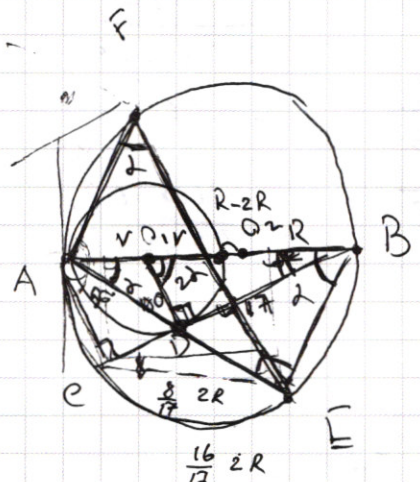
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{r}{2R-r}$

$2\cdot 2Rr =$

$4 \qquad Rr = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$2R\cdot(2R-2r) = 17^2$

$4\,(R(R-r)) = 17^2$

$R(R-r) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$\frac{85}{4}$

$21 \qquad \sin 2\alpha \quad \frac{17}{}$

$17 \qquad \frac{R+r}{17}$

$\frac{2R-r}{17} = \frac{2R}{25}$

$\frac{340}{389}$

$\frac{\arcsin\frac{340}{389}}{2}$

$\frac{25}{16}r^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$34R = 50R - 25r$

$\frac{5}{4}r = \frac{17}{2}$

$16R = 25r$

$R = \frac{25}{16}r$

$\begin{cases} r = \frac{34}{5} \\ R = \frac{85}{8} \end{cases}$

$\frac{17\cdot 5}{8} \qquad \frac{85}{8}$

$\frac{85}{4} - \frac{34}{5} \qquad 85\cdot 5\cdot 34.$

$\frac{85}{4} - \frac{34}{5}$

$425-136$

$\frac{425-136}{20} \qquad \times\frac{34}{136}$

$\frac{389}{20} \qquad 11$

$2x(1-x$

$2\cdot s$

$\cos$

$R =$

$4x^2(1-x^2) = \frac{255^2}{289}$

$\frac{17}{85} \quad \times\frac{17}{17}$

$\times\frac{225}{225}$

$18596 \quad 17 \quad 2312 \quad 2601 \quad \times\frac{289}{289}$

$\times\frac{255}{255} \quad 1275 \quad 1275 \quad 5110 \quad 1275 \quad 52025$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

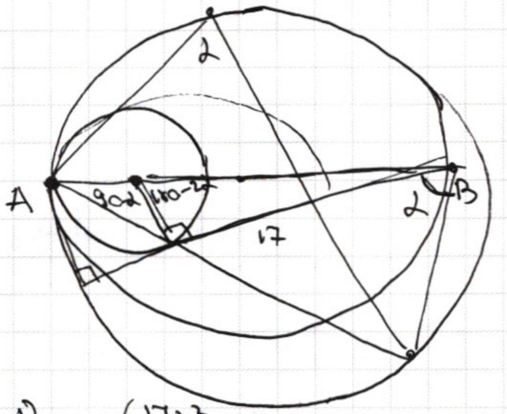
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{136}{5}$ $\quad \frac{136 \cdot \cancel{15}\ 3}{\cancel{5} \cdot 289}$ $\quad \frac{136}{5}$ $\quad \frac{289}{15}$

289

289

$\sin(180-2\alpha) = \frac{17}{\frac{85}{8}-\frac{34}{5}}$



$\frac{85 \cdot 5 - 34 \cdot 8}{40}$

$\frac{17}{\frac{425-272}{40}}$

$\times 25$, 2, $\times 85$, 25, 425, 170, 2125

$\frac{40 \cdot 17}{425-272}$

$Rr = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

17

$2R-r$

$\frac{2R-r}{17} = \frac{2R}{25}$

$\frac{85}{8} - \frac{34}{5}$

$50R - 25r = 34R$

$\frac{425-272}{40}$ $\quad \frac{153}{40}$

$\frac{85}{3} - \frac{136}{15}$ $\quad 16R = 25r$ $\quad \frac{289}{15}$ $\quad \times 17, 15, 85, 17, 255$

$r = \frac{16}{25}R$

$-425, 272$ $\quad$ 80 $\quad$ 136

$\frac{425-136}{15}$

$\frac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3}$

$\frac{16}{25}R^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$ $\quad +125, 28, 153$

$425-136$

$\sin(180-2\alpha) = \frac{17}{\ } = \frac{255}{289}$

300

289

$\frac{4}{5}R = \frac{17}{2}$

$\sin 2\alpha = \frac{255}{289}$

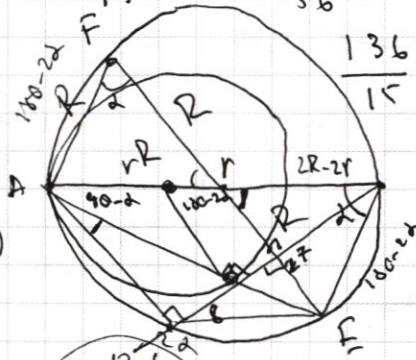
$R = \frac{85}{8}$ $\quad r = \frac{34}{5}$ $\quad \frac{17 \cdot 8}{15}$

80, 56

$\alpha = \frac{\arcsin\frac{255}{289}}{2}$

$\underline{(2R-2r) \cdot 2R}$

$\frac{136}{15}$



$R^2 - Rr = \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 17$ $\quad \frac{3}{5}R = \frac{17}{2}$

$R^2 = $ $\quad R = \frac{85}{6}$

$\frac{3}{5} = \frac{17}{2}$

$r = \frac{16}{25}R$

$R^2 - \frac{16}{25}R^2$ $\quad \frac{9}{25}R^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$r = \frac{136}{15}$ $\quad R^2 \cdot \sin\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)