МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

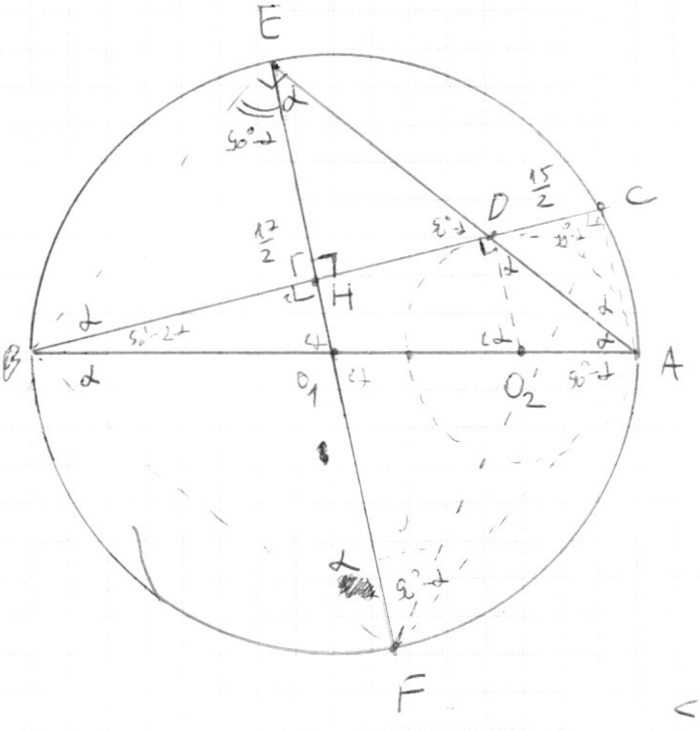
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Решение:

Пусть $\angle\alpha = \angle FEA$, тогда

$\angle EDH = 90° - \alpha$, (сумма углов Δ)

$\angle O_2DA = 180° - 90° - 90° + \alpha = \alpha$

$\angle DAO_2 = \alpha$ ($O_2D = O_2A$ (радиусы) ΔDO_2A - р/б)

$\angle BEF = 90° - \alpha$ ($\angle BEA$ опирается на диаметр)

$\angle BAF = 90° - \alpha$ (опирается на BF)

$\angle EAF = 90° \Rightarrow EF$ - диаметр

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot 2R = 16 \ (\Delta AOC) \\ \sin 2\alpha\,(2R - r) = \frac{17}{2} \ (\Delta BDO_2) \end{cases} \ominus$$

$\Delta BHO_1 \sim \Delta BCA$ $CK = \frac{1}{2}$ (по 2-м углам)

$\frac{BH}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{BH}{2BH} \Rightarrow BH = 8$

$HC = 8 = 16 - 8$

$\Downarrow$

~~ΔBFC равнобедрен.~~

$\angle BCE = 90° - \alpha$ (хорда BE)

$\cos 2\alpha = \frac{r}{2R - r} =$ (ΔBDO_2)

$\frac{2R}{2R - r} = \frac{32}{17}$

$34R = 64R - 32r$

$30R = 32r$

$R = \frac{16}{15} r$

$= \frac{r}{\frac{32}{15}r - r} = \frac{r}{\frac{17}{15}r} = \frac{15}{17}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\frac{15}{17} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{32}{34}} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{17}}$; $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}$

$2R = \frac{16}{8} \cdot 17 \Rightarrow R = 17$; $r = \frac{15 \cdot 17}{16}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\angle AFE = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{17}}\right)$

Ответ: $R = 17$;

$AE = \cos\alpha \cdot 2R = \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot 34 = 8\sqrt{17}$

$r = \frac{17 \cdot 15}{16}$;

$AF = \sin\alpha \cdot 2R = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 34 = 2\sqrt{17}$

$\angle AFE = \cancel{90^\circ - \arcsin}\left(\sqrt{\frac{1}{17}}\right)$ $\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17} = 8 \cdot 17 = 136$

$S_{AEF} = 136$.

№02

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{\underbrace{(x-6)}_{a}\underbrace{(2y-1)}_{b}} \\ (x-6)^2 + 9(y-2)^2 = 90 \end{cases}$$

ОДЗ: $ab \geq 0$

$x - 12y = a - 6b$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$a^2 - 12ba + 36b^2 = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2 = (5b)^2$

$a_{1,2} = \frac{13b \pm 5b}{2} = \left[\begin{array}{l} 9b \ (b \geq 0) \\ 4b \ (b \leq 0) \end{array}\right.$

а) $81b^2 + 9b^2 = 90$

$b^2 = 1$

$b = 1$; $a = 9$

Подставим $9 - 6 = \sqrt{9}$ ⊕

$81 + 9 = 90$ ⊕

б) $25b^2 = 90$

$b^2 = \frac{18}{5}$

$b = -\sqrt{\frac{18}{5}}$; $a = -4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$-4\sqrt{\frac{18}{5}} + 6\sqrt{\frac{18}{5}} = 2\sqrt{\frac{18}{5}}$ ⊕ $\quad 16 \cdot \frac{18}{5} + 9 \cdot \frac{18}{5} = 90$ ⊕

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолж)

1) $\begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases}$ $x=15$, $y=1$

$6 \vee 4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$36 \vee \frac{16\cdot 18}{5}$

2) $\begin{cases} x-6=-4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ 2y-1=-\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases}$ $x=6-4\sqrt{\frac{18}{5}} < 0$

$y=\frac{1-\sqrt{\frac{18}{5}}}{2} < 0$

$16 \cdot 18 = 128 + 160 = 288$

$36 \cdot 5 = 180$

Ответ: $x_1=15$; $y_1=1$; $x_2=6-4\sqrt{\frac{18}{5}}$, $y_2=\frac{1-\sqrt{\frac{18}{5}}}{2}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \qquad \left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 2\beta = -\arccos(\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

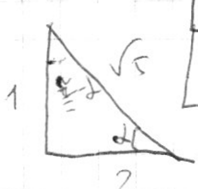
$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi l, l\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi h, h\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) = -\arccos(\frac{2}{\sqrt5}) = \cancel{= \arccos}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arccos(\frac{1}{\sqrt5}) + \pi + \arccos(\frac{2}{\sqrt5}) + 2\pi(k+h) = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi\xi \\ 2\alpha = \arccos(\frac{1}{\sqrt5}) - \arccos(\frac{2}{\sqrt5}) + 2\pi(n+l) = 2\arccos(\frac{1}{\sqrt5}) - \frac{\pi}{2} + 2\pi\varphi \\ 2\alpha = \arccos(\frac{1}{\sqrt5}) + \pi + \arccos(\frac{2}{\sqrt5}) + 2\pi g = 2\arccos(\frac{2}{\sqrt5}) - \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi g \\ 2\alpha = -\arccos(\frac{1}{\sqrt5}) - \arccos(\frac{2}{\sqrt5}) + 2\pi f = -\frac{\pi}{2} + 2\pi f \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi\xi \\ \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt5} - \frac{\pi}{4} + \pi\varphi \\ \alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt5} - \frac{\pi}{4} + \pi g \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi f \end{array}\right.$$

1) $\operatorname{tg}\alpha = -1$ при $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi f$

2) $\cancel{\dfrac{\sin(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \frac{\pi}{4})}{\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \frac{\pi}{4})}} =$



$$\arccos(\frac{1}{\sqrt5}) + \arccos(\frac{2}{\sqrt5}) = 90^\circ$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

$$\overset{\operatorname{arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)}{\overset{\|}{}}$$

2) $$\frac{\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt2}}{\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt2}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt2}} = \frac{1}{3}$$

3) $$\frac{\sin\left(\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt2}-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt2}}{\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt2}} = -\frac{1}{3}$$

Ответ: $1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow |x^2 - 10x| = 10x - x^2$

$$\underbrace{10x - x^2}_{a} + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$5^{\log_3(10x-x^2)} = (10x - x^2)^{\log_3 5}$$

$a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} \geq 0 \quad a > 0$

$(a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5})' = 1 + \log_3 4 - \log_3 5$ - монотонна

$\Downarrow$

$= 0$ только в 1-м значении

Подставим $a = 9$

$9 + 16 - 25 = 0$ при $a = 3$ $3 + 4 - 5 > 0$

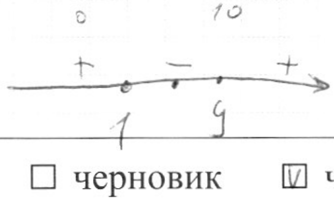
$\Downarrow$

$a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5}$ убывает.

$a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} \geq 0 \iff a \in (0; 9]$

$0 < 10x - x^2 \leq 9$

$$\begin{cases} x(10 - x) > 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N.°5

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

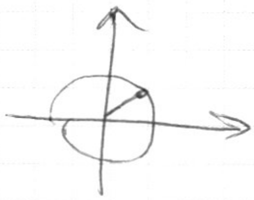
$f(ab) = f(a) + f(b)$

$2 \le x \le 25$

$f(x/y) < 0$ $\sin\alpha =$

$f(p) = [p/4]$

$2 \le y \le 25$



$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + \underbrace{f(1)}_{=0} + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) =$

$=$

$= f(x) + f(-1) + f\left(-\frac{1}{y}\right) =$

$= f(x) + \cancel{f(-1) + f(-1)} + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\cancel{f(0) = f(x \cdot 0) = f(x) + f(0)}$

$f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{10}{6}\right) = f(10) + f$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{2x}{2y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2x) + f\left(\frac{1}{2y}\right) =$

$= \underbrace{f(2)}_{=0} + f(x) + \underbrace{f\left(\frac{1}{2}\right)}_{=0} + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

$f(n \cdot 5) = 1 + f(n)$

f

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(29) = 7$

$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2 \cdot n}\right)$

$f\left(\frac{5}{5n}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{5n}\right)$

$f\left(\frac{1}{5n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{\cancel{2xy}\ x(2y-1)-6(2y-1)} \\ \qquad\qquad \underbrace{(x-6)}_{a}\underbrace{(2y-1)}_{b} \end{cases}$$

$x-12y=a-6b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$6-4\sqrt{\frac{18}{5}}-6+\cancel{2}\sqrt{\frac{18}{5}}=$

$=2\sqrt{\frac{18}{5}}=\sqrt{}$

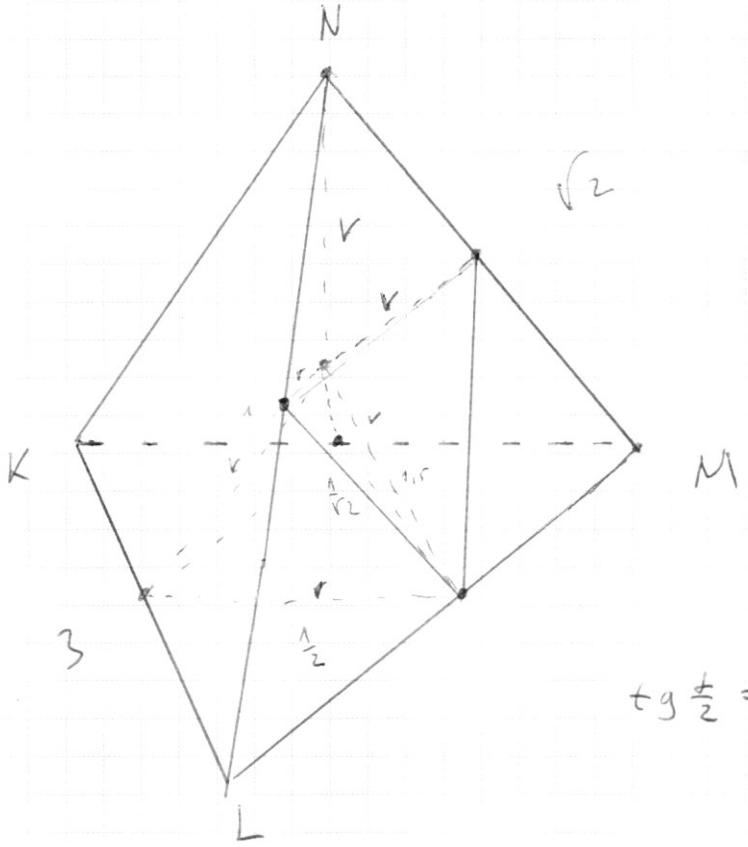
$-\cancel{2}\sqrt{\frac{18}{5}}\ (1-\sqrt{\frac{18}{5}}-1)$

$\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\cdot 32\cdot\sin\alpha\, 32=$

$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{32}\cdot\cancel{32}}{17}\cdot 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$$tg\alpha = \frac{\cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha + 1}$$

$$tg 45^\circ = 1 = \frac{1 \pm \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$tg 30^\circ = \sqrt{\frac{1 \pm \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{2 - 2\cos^2\alpha}{\cancel{2\cos^2\alpha + 2}}$$

$$2\cos^2\alpha$$

$$\frac{1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \cos^2\alpha}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta =$$

$$tg 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 + 1}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$$

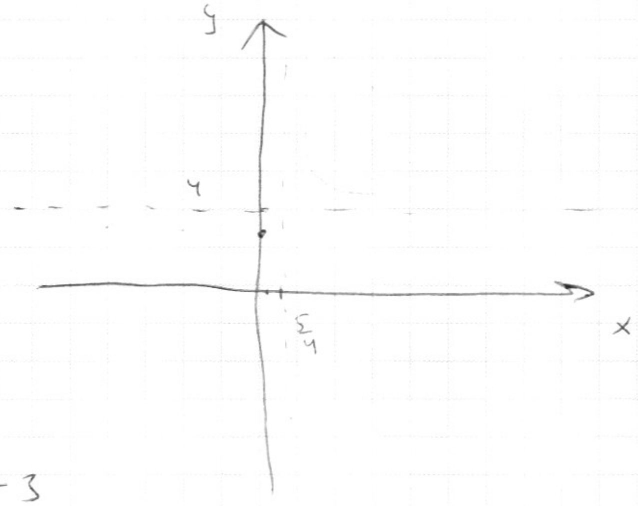
$$\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\frac{-36}{64} = \frac{9}{16} \qquad \frac{-32}{16} + 9$$

$$-2+9-3$$

$$-32^2 \cdot \frac{81}{16} + 9\cdot 4 \cdot \frac{9}{16} - 3$$

ОДЗ: $2xy-12y-x+6 \ge 0$



$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ (x-6)(2y-1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$x^2-2\cdot 6x+36+$$

$$+36y^2-36y+9=90$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$$

$-\cancel{32}=$

$x_1+x_2=$

$$(x-12y)^2 = 2xy-12y-x+6$$

$(x-6)^2+$

9

$\cancel{2xy-12y-x+6}$

$$x^2-24y+144y^2 = 2xy-12y-x+6$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$2\alpha+2\beta = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi n,$

$2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi n$

$\sqrt5$, -1, 2

$2\alpha+2\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi n$

$\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})$ $\quad 2\alpha+2\beta = \cancel{\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt5}} + 2\pi n$

$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2\alpha + \cancel{2\beta} = ar$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\beta = \arccos(\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$2\beta = -\arccos(\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$$\sin 2\beta = \left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{4}{\sqrt5}} \\ -\sqrt{\frac{4}{\sqrt5}} \end{array}\right.$$

$\cancel{\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}}$

$\cancel{4)\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}}$

a) $\sin(2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{2\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = \sin^2 \ldots 1}$

a') $2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k =$

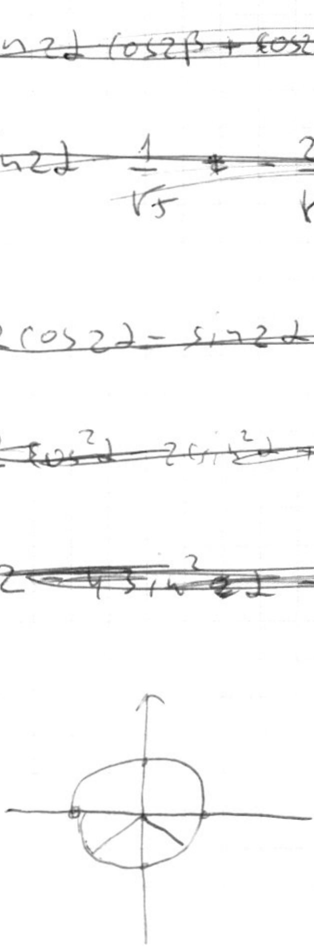
$= \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi r$

$\cancel{2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$

a'') $2\alpha + \arccos(\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi k =$

$= \pi - \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi l$

$\cancel{2 - 4\sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$\sqrt{17}$, 8, 136

ОДЗ:

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{32}{34}}$ ($\frac{15}{17}$)

4, 17, 17, 119, +17, 289; 289 − 225 = 64, $\sqrt{3}$

$10x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 10x < 0$

$\log_9 8 + \log_a 81 =$
$= \log_a bc$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{32}{34}} = \sqrt{\frac{1}{17}}$

$$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)} \quad \log$$

$$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)} = (10x - x^2)^{\log_3 5}$$

$$(10x - x^2)\left(1 + (10x - x^2)^{\log_3 \frac{4}{3}} + (10x - x^2)^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) \geq 0$$

$$\underline{a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} \geq 0}$$

$a^{\log_3 \frac{4}{3}}\left(1 - a^{\log_3 \frac{5}{3} - \log_3 \frac{4}{3}}\right) =$
$= a^{\log_3 \frac{4}{3}} \cdot \left(1 - a^{\log_3 \frac{5}{4}}\right)$

$$a\left(a^0 + a^{\log_3 \frac{4}{3}} - a^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) \geq 0$$

$$1 + a^{\log_3 \frac{4}{3}} - a^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 0$$

$a^{\log_3 \frac{5}{3} - \frac{1}{3}}$

$a^{\log_3 \frac{5}{3}} - a^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq 1$

$$\log_3 3 + \log_3 3^{a^{\log_3 \frac{4}{3}}} - \log_3 3^{a^{\log_3 \frac{5}{3}}} \geq 0$$

$\log_3 3 \cdot 3^{a^{\log_2 \frac{a}{3}}}$

$$\left(a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5}\right)' = 1 + \log_3 4 - \log_3 5 > 0$$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

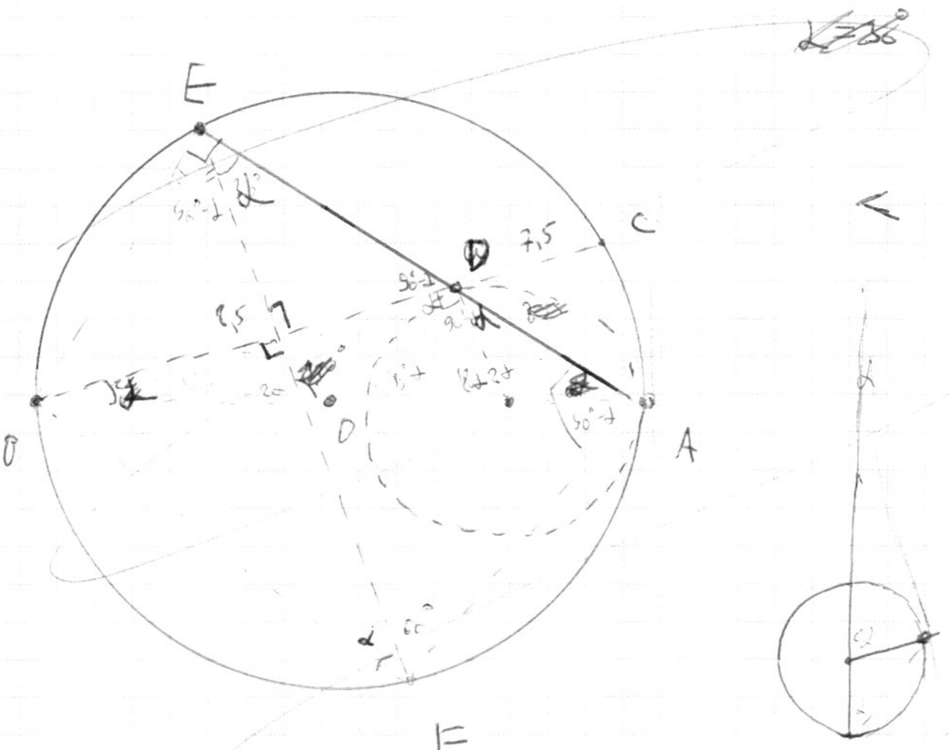
$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$ $\quad$ $\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+2\beta) + \cos\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

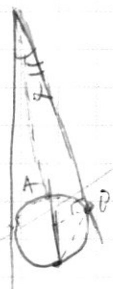
$+\sin 2\alpha$

$tg\,\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha+2}{2\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+1}{\cos^2\alpha} =$ $\quad$ $2\cdot\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

~~$\alpha = 30°$~~



$\alpha = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AO}$



$\frac{1}{2}\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\frac{1}{2}\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}\ \frac{1}{5}$

$\sin a\cdot\cos\beta + \cos a\cdot\sin\beta + \sin a\cdot\cos a + \sin\beta\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt5} - \frac{1}{5}$

$(\sin a + \sin\beta)(\cos a + \cos\beta)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)