МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3y-2x\geq 0 & (1) \\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 & (2) \end{cases}$$

(2): $4x^2-15xy+2x+9y^2+3y-2=0$

$4x^2+(2-15y)x+9y^2+3y-2=0$

$D=4-60y+225y^2-16(9y^2+3y-2)=225y^2-60y+4-144y^2-48y+32=$
$=81y^2-108y+36=9(9y^2-12y+4)=81(y-\frac{2}{3})^2$

$$x=\frac{15y-2\pm\left(9\left|\left(y-\frac{2}{3}\right)\right|\right)}{8}$$

$\boxed{y\geq\frac{2}{3}}$:

$$x_{1,2}=\frac{15y-2\pm(9y-6)}{8}=\left[\begin{array}{l}3y-1 \Rightarrow \boxed{x_1=3y-1} \\ \frac{3y}{4}+\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{3y}{4}+\frac{1}{2}}\end{array}\right.$$

$\boxed{y<\frac{2}{3}}$:

$$x_{3,4}=\frac{15y-2\pm(-(9y-6))}{8}$$ — очевидно, что те же самые корни

(1): $3y\geq 2x$

$3y\geq 6y-2$
$3y\leq 2$
$\boxed{y\leq\frac{2}{3}}$

$3y\geq\frac{3y}{2}+1$
$6y\geq 3y+2$
$3y\geq 2$
$\boxed{y\geq\frac{2}{3}}$

т.е. при $y<\frac{2}{3}$ $x=3y-1$

при $y>\frac{2}{3}$ $x=\frac{3y}{4}+\frac{1}{2}$

при $y=\frac{2}{3}$ $3y-1=\frac{3y}{4}+\frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2 (продолжение)

I $x=(3y-1)$, при $y\le\frac{2}{3}$

$$3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y-4=0$$

$$3(9y^2-6y+1)+3y^2-18y+6-4y-4=0$$

$$27y^2-18y+3+3y^2-18y-4y+2=0$$

$$30y^2-40y+5=0$$

$$5(6y^2-8y+1)=0$$

$$D=64-4\cdot6\cdot1=40$$

$$y_{1,2}=\frac{8\pm2\sqrt{10}}{12}=\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{10}}{6}$$

$y_1=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6}$ ~~xxxx~~ $>\frac{2}{3}\Rightarrow$ нет соотвествующего x $\Rightarrow$ не подходит

$y_2=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}<\frac{2}{3}\Rightarrow x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}-1=\boxed{1-\frac{\sqrt{10}}{2}}$

$$\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2};\ \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$$

II $x=\left(\frac{3y}{4}+\frac{1}{2}\right)$, при $y>\frac{2}{3}$

$$3\left(\frac{3y}{4}+\frac{1}{2}\right)^2+3y^2-6\left(\frac{3y}{4}+\frac{1}{2}\right)-4y-4=0$$

$$3\left(\frac{9y^2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3y}{4}\right)+3y^2-\frac{18y}{4}-3-4y-4=0$$

$$\frac{27y^2}{16}+\frac{3}{4}+\frac{9y}{4}+3y^2-\frac{18y}{4}-3-4y-4=0$$

$$\frac{75y^2}{16}+\frac{-9y-16y}{4}-\frac{25}{4}=0$$

$$75y^2-100y-100=0$$

$$25(3y^2-4y-4)=0$$

$$25(y-2)\left(y+\frac{2}{3}\right)\cdot3=0$$

$y_1=2\Rightarrow x=\frac{6}{4}+\frac{1}{2}=\frac{8}{4}=\boxed{2}$

$y_2=-\frac{2}{3}<\frac{2}{3}\Rightarrow$ не подходит

Ответ: $\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2};\ \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$, $(2;2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

1) из $\log_4(x^2+6x) \Rightarrow \boxed{x^2+6x>0} \Rightarrow |x^2+6x|^{\log_4 5}=(x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+\cancel{x}^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$, пусть $x^2+6x=t$, тогда:

$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$

2) $t=t^{\log_4 4}=\left(t^{\frac{\log_4 4}{\log_4 t}}\right)^{\log_4 t}=\left(t^{\log_t 4}\right)^{\log_4 t}=4^{\log_4 t}$

$t^{\log_4 5}=\left(t^{\frac{\log_4 5}{\log_4 t}}\right)^{\log_4 t}=\left(t^{\log_t 5}\right)^{\log_4 t}=5^{\log_4 t}$, тогда:

3) $3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

4) Докажем, что $3^a+4^a \geq 5^a$ при $a\in\mathbb{R}$ только, если $a\in(-\infty;2]$

4.1) Заметим, что 5^a растет быстрее, чем 3^a+4^a, т.к. пусть ε - разность степеней >0, тогда: $3^{a+\varepsilon}-3^a+4^{a+\varepsilon}-4^a=$
$=3^a(3^\varepsilon-1)+4^a(4^\varepsilon-1)<(4^\varepsilon-1)(3^a+4^a)$, т.к. $3^\varepsilon-1<4^\varepsilon-1$, т.к. $3^\varepsilon<4^\varepsilon$, тогда:

$3^{a+\varepsilon}-3^a+4^{a+\varepsilon}-4^a<(4^\varepsilon-1)(3^a+4^a)$, а $5^{a+\varepsilon}-5^a=(5^\varepsilon-1)(5^a)$,

т.е при увеличении a на ε $f(x)=3^a+4^a$ увеличивается в $<(4^\varepsilon-1)$ раз, а $g(x)=5^a$ увеличивается в $(5^\varepsilon-1)$ раза, но $5^\varepsilon-1>4^\varepsilon-1$, т.к. $5^\varepsilon>4^\varepsilon \Rightarrow f(x)$ растет медленнее, чем $g(x)$

4.2) тогда если при $a=2$ $3^2+4^2=5^2$, то при $a>2$ $3^a+4^a<5^a$, аналогично при $a\leq 2$ $3^a+4^a\geq 5^a$

5) тогда $\log_4 t \leq 2 \Rightarrow t\leq 16$

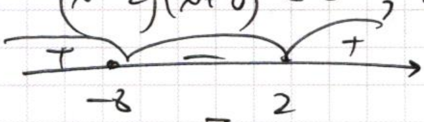
6) $\begin{cases} x^2+6x\leq 16 \; (1) \\ x^2+6x>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \end{cases}$ (методом интервалов)

№3 (продолжение)

(1): $x^2+6x \le 16$

$x^2+6x-16 \le 0$

$(x-2)(x+8) \le 0$, методом интервалов:



$x \in [-8; 2]$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

1) Заметим, что $f(1)=0$, т.к. $f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow \boxed{f(1)=0}$ — ЧТД

2) Заметим, что мы можем получить значение $f(x)$ для $\forall x \in \mathbb{N}$, $x\in[3;27]$, т.к. для простых x — $\left[\frac{x}{4}\right]$, а для составных значения можно получить из простых применяя это условие для каждого простого делителя. ($6=2\cdot3$, $27=3\cdot3\cdot3$)

3) Составим таблицу всех $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}$, $x\in[3;27]$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

для получения некоторых составных чисел

4) Заметим, что $f(a\cdot\frac{1}{a}) = \boxed{f(a)+f(\frac{1}{a})=0} = f(1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$, т.е. $f(\frac{1}{4}) = -f(4) = -1$

5) $f(\frac{x}{y}) = f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y}) = \boxed{f(x)-f(y)<0} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < f(y)$

6) 6.1) Переберем все случаи: среди чисел от 3 до 27 ровно 10 дают 0 при использовании в качестве аргумента $f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ чтобы для таких x $f(x)<f(y)$ нужно чтобы $f(y)>0$, таких чисел ровно 15, тогда подходящих пар 150 $(15\cdot10)$

6.2) ровно 7 дают 1, к ним подходят ровно 8, которые дают $>1 \Rightarrow$ подходящих пар $7\cdot8=56$

6.3) ровно 3 дают 2, к ним подходят ровно 5, которые дают $>2 \Rightarrow$ подходящих пар $3\cdot5=15$

6.4) ровно 2 дают 3, подходят ровно 3, дающие $>3 \Rightarrow$ подходящих пар $2\cdot3=6$

6.5) ровно 2 дают 4, подходят ровно 1, пар: $1\cdot2=2$

№5 продолжение

4) Все пары различны и, по сказанному ранее, единственные подходящие под условие, всего:

$150+56+15+6+2 = \underline{229}$

Ответ: 229 пар

№7

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{14}}$

2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = \sin2\alpha\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha =$

$= \sin2\alpha\left(2\cos^2 2\beta-1\right) + \cancel{\sin4\beta}\ 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha =$

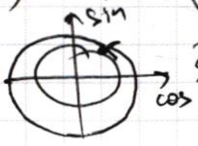
по формуле понижения степени, но наоборот — по формуле двойного угла

$= 2\cos^2 2\beta\sin2\alpha + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = 2\cos2\beta\left(\cos2\beta\sin2\alpha+\sin2\beta\cos2\alpha\right) =$

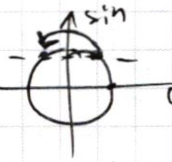
$= 2\cos2\beta\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = -\frac{8}{14} \to \boxed{\cos2\beta = \frac{-\frac{4}{14}}{-\frac{1}{\sqrt{14}}} = \frac{4}{\sqrt{14}}}$

$\boxed{\sin2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}}$

3) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\beta$, если $\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt{14}}$

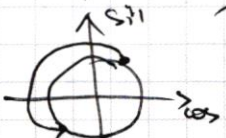


3.1) $2\alpha = 0+2\pi k, k\in Z \Rightarrow \boxed{\alpha = \pi k} \to \boxed{tg\alpha = 0}$



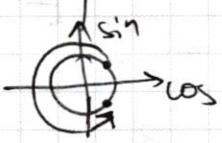
3.2) $\alpha = \frac{\arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{14}}\right)-\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right)}{2}+2\pi k, k\in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha = \boxed{tg\left(\frac{\arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{14}}\right)-\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right)}{2}\right)}$



3.3) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin2\beta$, если $\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}$

$2\alpha = \pi+2\pi k, k\in Z \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z \Rightarrow \boxed{tg\alpha = 1}$



3.4) $2\alpha = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)}{2}$

$tg\alpha = tg\left(\frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)}{2}\right)$

Ответ: $tg\alpha = 0,\ 1,\ tg\left(\frac{\arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{14}}\right)-\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right)}{2}\right),\ tg\left(\frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{14}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)$

$2\cos^2 2\beta\sin 2\alpha-\sin 2\alpha+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha$

$2\cos^2 2\beta\sin 2\alpha+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-\frac{8}{14}$

$2\cos^2 2\beta\sin 2\alpha+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{14}}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=-\frac{8}{14}$

$2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)=-\frac{8}{14}$

$\cos 2\beta=\dfrac{\frac{4}{14}}{\frac{1}{\sqrt{14}}}=\frac{4}{14}\cdot\frac{\sqrt{14}}{1}=\boxed{\frac{4}{\sqrt{14}}}$

$1-\frac{16}{14}=\frac{1}{14}=\frac{1}{\sqrt{14}}$

$\sin(\alpha+2\beta)=\sin 2\beta$

$\boxed{\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}}$

$\sin 2\alpha\frac{4}{\sqrt{14}}\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{14}}$

$4\sin\alpha\pm\cos\alpha=-1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1)\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2)\end{cases}$$

$$\left(\frac{3y}{4}+\frac{1}{2}\right)^2$$

(2) $3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$3\left(\frac{9y^2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3y}{4}\right)+3y^2-\frac{18y}{4}-3$

$D=36-4\cdot3\cdot(y^2-4y-4)=$ $-4y-4=0$

$=36-12y^2+48y+48=$

$=-12y^2+48y+84=$

$=-12(y^2-4y+4)=-12(y$

$D=16-4\cdot1\cdot7=16+28=44=$

$\frac{24y^2}{16}+\frac{3}{4}+\frac{9y}{4}+3y^2-\frac{18y}{4}-3$

$-4y-4=0$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$D=36-4\cdot3\cdot(3y^2-4y-4)=$

$=36-36y^2+48y+48=$

$=-36y^2+48y+84=$

$=-4(9y^2+12y+21)=$

$-12(3y^2-4y-7)=$

$D=16-4\cdot3\cdot(-7)=16+84=100$

$\frac{45y^2}{16}+$ $\frac{5^{a+e}}{5^a}=$

$21\geq 25-4$ 100

21 5^e

$y=\frac{4\pm10}{6}$ $\left[\begin{array}{l}y_1=-1\\ y_2=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}\end{array}\right.$

$3^a(3^e-1)$

$4^a(4^e-1)$

$-\quad -1 \quad + \quad \frac{7}{3} \quad -$

$16+4\cdot3\cdot4$

$16 \quad 48$

64

8

$15 \quad 16$

$15 \quad 9$

$225 \quad 144$

$y\in\left[-1;\frac{7}{3}\right]$

(1) $\Rightarrow$ $3y-2x\geq0$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2+(-12y-3y-2)x+9y^2+3y-2=0$

$\frac{4\pm8}{6}=2$ $\boxed{-\frac{2}{3}}$

$4x^2+(-18y-2)x+9y^2+3y-2=0$

$3^{a+e}+4^{a+e}-3^a-4^a=$

$D=(-18y-2)^2-4\cdot4\cdot(9y^2+3y-2)=$

$=(3^e-1)3^a+(4^e-1)4^a<$

$=225y^2+60y+4-144y^2-48y+32=$

$<(4^e-1)(3^a+4^a)$

$=81y^2+12y+36=3(27y^2+4y+12)$

5^e-1 $5^e>4^e$

$D=16-4\cdot27\cdot12=$

$\frac{4^e-1}{4^e}$ $\frac{5^e-1}{5^e}$ $5^e>$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3y+2x\geq 0$

$\cancel{9y^2-12xy+4x^2}=3xy-2x-3y+2$

$4x^2-15xy+2x+9y^2+3y-2=0$

$4x^2+(2-15y)x+9y^2+3y-2=0$

$D=(2-15y)^2-4\cdot4\cdot(9y^2+3y-2)=$

$=4-60y+225y^2-144y^2-48y+32=$

$=81y^2-108y+36=9(9y^2-12y+4)=$

$=81\left(y-\frac{2}{3}\right)^2$

$D=144-4\cdot9\cdot4=144-144=0$

$\frac{12\pm0}{18}=\frac{12}{18}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$\frac{15y-2\pm9\left|\left(y-\frac{2}{3}\right)\right|}{8}$

$=48346$

$15346+$
$+30000$

$y\geq\frac{2}{3}$:

$\frac{15y-2\pm(9y-6)}{8}=$

$\frac{15y-2+9y-6}{8}=\frac{24y-8}{8}=\boxed{3y-1}=x$

$\frac{15y-2-9y+6}{8}=\frac{6y+4}{8}=\boxed{\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}=x}$

16
9
144

$x^2+6x\geq0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}$

$t=x^2+6x$

124
124
496
248
124
15376

45346	2
22688	2
11344	2
5642	2
2836	2
1418	2
709	2
355	

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$\cancel{3^{\log_4 t}\geq t\left(t^{\log_4 5-1}-1\right)}$

$709 \mid 13$

$709 \mid 17$

$x=3y-1$

$3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y=4$

$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}\geq t^{\log_4 5}$

$\left(3^{\log_4\sqrt{t}}-2^{\log_4 t}\right)^2=3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}-2\cdot3^{\frac{1}{2}\log_4 t}\cdot2^{\log_4 t}$

$64-4\cdot6\cdot1=40$

709 $7\sqrt{10}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$

$\left(3^{\frac{\log_4 t}{\log_4 3}}\right)^{\log_4 3}$

$3^{\log_4 3}$

$t^{\log_4 5} = \left(t^{\frac{\log_4 5}{\log_4 t}}\right)^{\log_4 t}$

$5^{\log_4 t}$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t = t^{\log_4 4} = \left(t^{\frac{\log_4 4}{\log_4 t}}\right)^{\log_4 t}$

$4^{\log_4 t}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t \geq 0$

$-6 \quad 0$

$t($

$t = x^2+6x$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$1 + t^{1-\log_4 3} \geq t^{\log_4 5 - \log_4 3}$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$t \geq t^{\log_4 3}\left(t^{\log_4 3 - \log}\right.$

$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$

$1 + t^{\log_4 \frac{4}{3}} \geq t^{\log_4 \frac{5}{3}}$

$3^a + 4^a \geq 5^a$

$(3^a)' = 3^a e^a$

$3^a + 4^a <$

2

при $a = 2$ – равенство

$3^a + 4^a = 5^a$

$16 \cdot 4$

$27 + 64 \quad 125$

64

$0 \quad 2$

2

$3^{a+1} - 3^a + 4^{a+1} - 4^a$

2

$3^a($

$2 \cdot 3^a + 3 \cdot 4^a = 4 \cdot 5^a$

$2 \cdot 3^a + 3 \cdot 4^a < 3(3^a + 4^a)$

< 3 4 3

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x)$ $\cancel{\mathbb{Z}^+}$: $x \in$ $\cancel{\mathbb{Z}^+}$ $\mathbb{R}^+$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, $p \in$ простым

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$

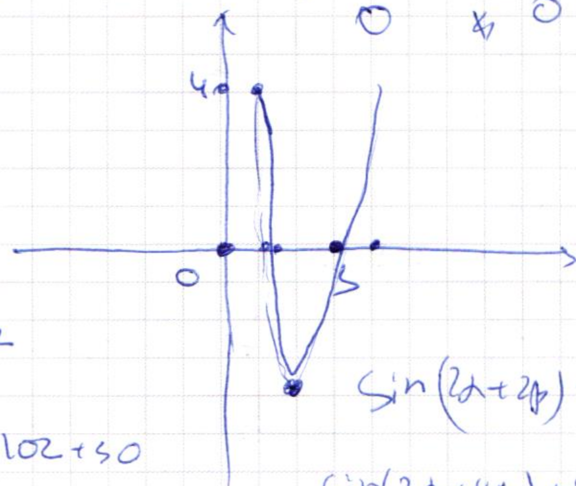
$\frac{x}{y}$ $f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = f(p_1) + f\left(\frac{1}{p_2}\right)$

$f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3) = 1$

$f\left(\frac{1}{2y}\right) + f(2y) = f(1) = 0$

0 ≠ 0

$\frac{4x-3}{2x-2} = \boxed{2 + \frac{1}{2x-2}}$



$8x^2 - 34x + 30$

$8 - 34 + 30 = 4$

$32 - 102 + 30$

0

$32 - 68 + 30$

$62 - 68 = -4$

32 62 − 66

$4 \cdot 8 = 32$

68

$72 - 102 + 30$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{14}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \frac{8}{17}$

$(x-3)(8x-10)$

$x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$8x^2 - 34x + 30 \;|\; x - 3$

$8x^2 - 24x \quad\quad 8x - 10$

$-10x + 30$

$4x - 3 -$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \frac{8}{14}$

$\cancel{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha =$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta$ $\sin^2\beta = \frac{1 - \cos^2\beta}{2}$

$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$

1 2 3

$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) +$

$+ \cos 2\alpha(1 - \sin$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 2 0 3 1 1 0 4 0 4 1 1 2 5 0 2 3 0

$a+2b>4$

$a+b\geq 4$

$4a^2+4b^2+8ab+8a-16b+6<0$

$a+b\geq 4$

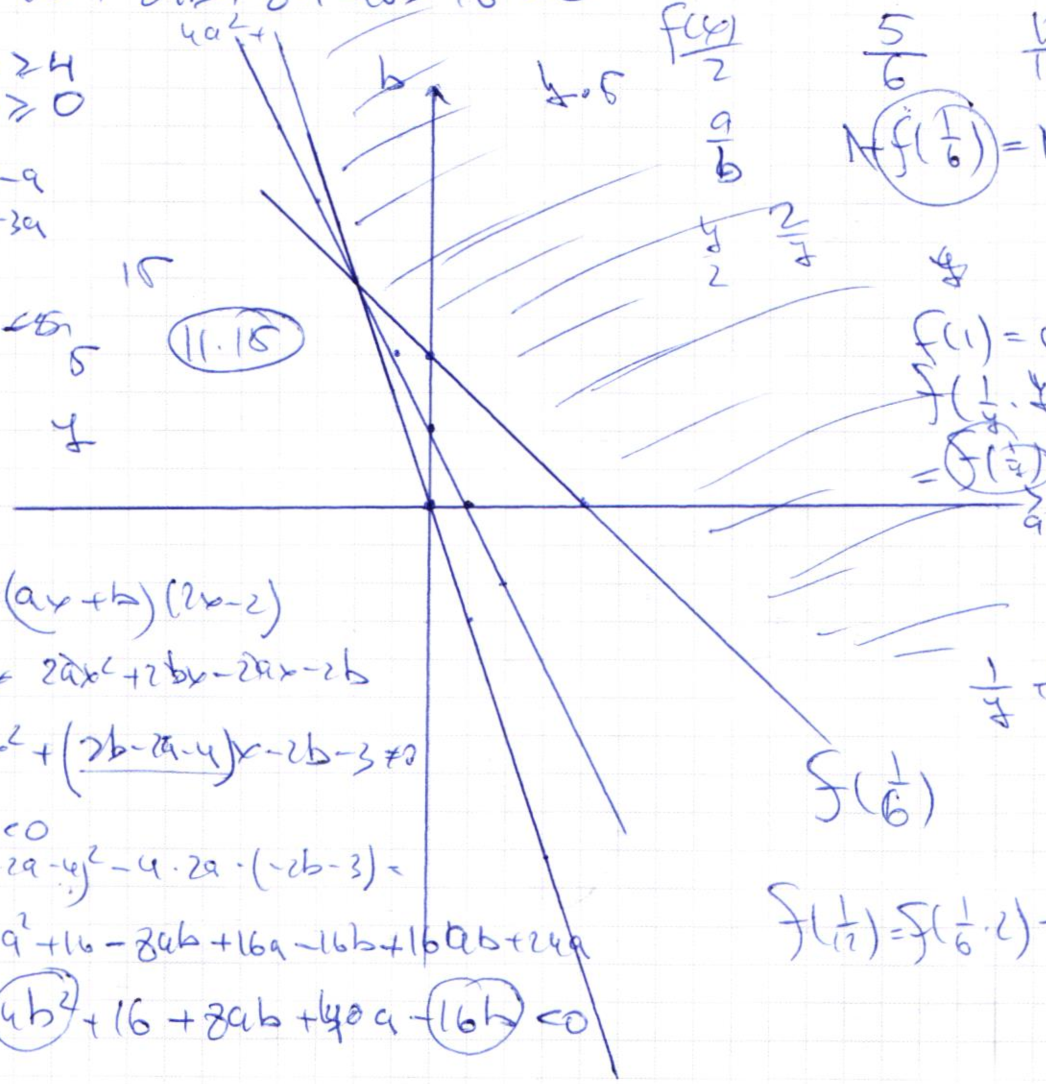
$3a+b\geq 0$

$b\geq 4-a$

$b\geq -3a$

11 15 5 $11\cdot 15$

-1 7



$\frac{f(4)}{2}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{10}{12}$

$\frac{a}{b}$ $1+f\left(\frac{1}{6}\right)=1+f\left(\frac{1}{12}\right)$

$\frac{7}{2}$ $\frac{2}{7}$

$f(1)=0$

$f\left(\frac{1}{7}\cdot 7\right)=$

$=f\left(\frac{1}{7}\right)+f(4)=0$

$4x-3\neq(ax+b)(2x-2)$

$4x-3\neq 2ax^2+2bx-2ax-2b$

$2ax^2+(2b-2a-4)x-2b-3\neq 0$

$D<0$

$(2b-2a-4)^2-4\cdot 2a\cdot(-2b-3)=$

$=4b^2+4a^2+16-8ab+16a-16b+16ab+24a$

$4a^2+4b^2+16+8ab+40a-16b<0$

$\frac{1}{7}+f(4)$

$f\left(\frac{1}{6}\right)$

$f\left(\frac{1}{12}\right)=f\left(\frac{1}{6}\cdot 2\right)-f\left(\frac{1}{6}\right)+f(2)$

3	4	5	6	7	11	13	14	19	23
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	0	1	0	1	2	3	4	4	5

$f(1)=f(1)+f(1)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(1)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ $f\left(\frac{1}{y}\right)=$

$\log_a b$

$f\left(\frac{7}{11}\right)=f(7)+f\left(\frac{1}{11}\right)=$

$f(p_1)+f(p_2)=\cancel{f(p_1)\cdot f(p_2)}$

$f(p_1)f(p_2)$

$f(5a)=f(a)+1$

$f(2a)=f(a)+f(2)$

$2\cdot 2$

$f(2)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4a^2+4b^2+8ab-8a-16b+16<0$

$a^2+b^2+2ab-2a-4b+4<0$

$(a+b)^2+4-2a-4b<0$

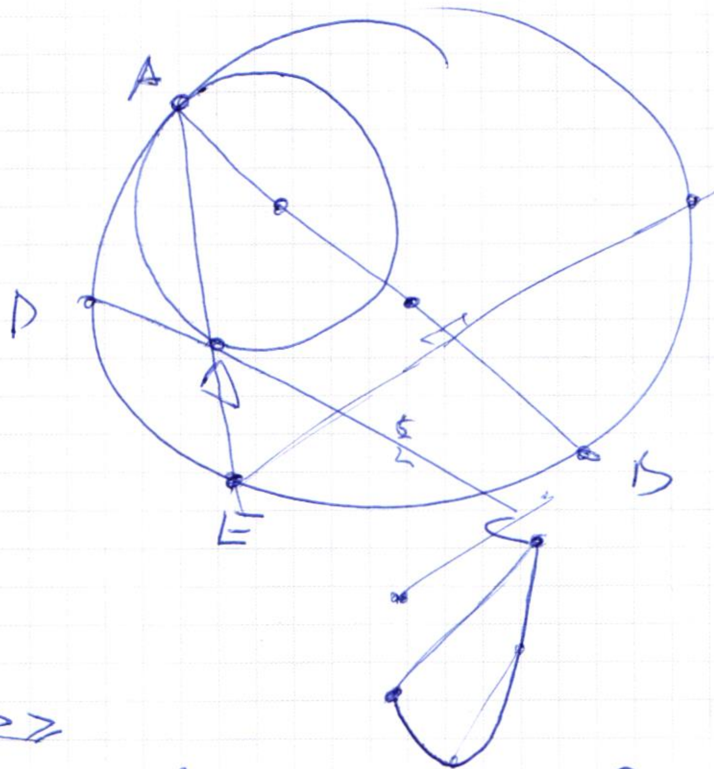
$(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2$

$3b^2+4ab+8a-16b+16$

$4-2a-4b\leq-4$

$2a+4b>8$

$a+2b>4$
$a+b\geq4$
$3a+b\geq0$
$2a+b\geq2$



$ax+b\geq$

$ax+b\geq 8x^2-34x+30$

$a+b\geq4$

$3a+b\geq0$

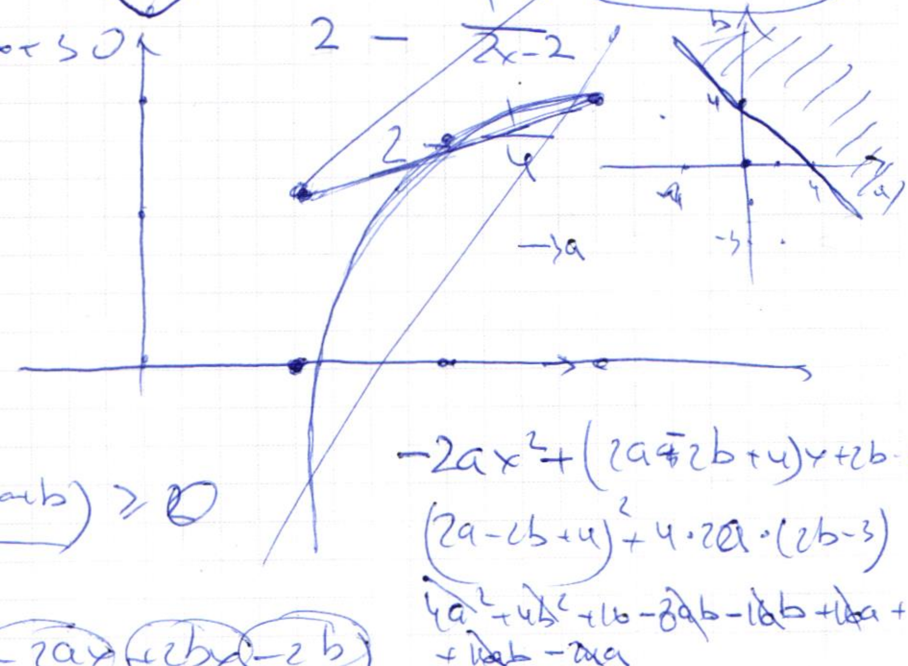
$2a\geq-4$

$\boxed{a\geq-2}$

$4a+2b\geq4$

$\boxed{2a+b\geq2}$

$2-\frac{1}{2x-2}$



$\frac{4x-3-(2x-2)(ax+b)}{2x-2}\geq0$

$4x-3-2ax^2-2ax+2bx-2b$

$-2ax^2+2ax-2bx+4x+2b-3$

$-2ax^2+(2a-2b+4)x+2b-3\geq0$

$(2a-2b+4)^2+4\cdot2a\cdot(2b-3)$

$4a^2+4b^2+16-8ab-16b+16a+16ab-24a$

$4a^2+4b^2+8ab-8a-16b+16$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)