



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 25$, $2 \leq y \leq 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN . Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①. Заметим $2\alpha + 2\beta = \pi$. $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(\alpha - 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \Rightarrow \sin(\alpha + 2\beta) + \sin(\alpha - 2\beta) = 2\sin \alpha \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow |\sin 2\beta| = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

1) $\sin 2\beta = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 2 \cos 2\alpha + 1 = 0$$

1) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow 2\sin \alpha \cos \alpha + 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$

$$3\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha = 0$$

$$D = 4\sin^2 \alpha + 12\sin^2 \alpha = 16\sin^2 \alpha \quad \cos \alpha = \frac{-2\sin \alpha \pm 4\sin \alpha}{6}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sin \alpha}{3} \\ \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = -1 \\ \operatorname{tg} \alpha = 3 \end{cases}$$

2) $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow 2\sin \alpha \cos \alpha - 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$

$$-\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + 3\sin^2 \alpha = 0$$

$$D = 4\sin^2 \alpha + 12\sin^2 \alpha = 16\sin^2 \alpha \quad \cos \alpha = \frac{-2\sin \alpha \pm 4\sin \alpha}{-2}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = 3\sin \alpha \\ \cos \alpha = -\sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = -1 \\ \operatorname{tg} \alpha = 3 \end{cases}$$

Ответ: -1; 3; $\frac{1}{3}$

②. $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90 \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \end{cases}$

Заметим $x-6 = a$; $6y-3 = b$

$$x - 2b = x - 6 - 12y + 6 = x - 12y; \quad a \cdot b = 6xy - 3x - 36y + 18 = 7$$

$$\Rightarrow 2xy - 12y - x + 6 = \frac{ab}{3} = 7 \quad \begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab/3} \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

②. Тригонометрия:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ a - 2b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \end{cases}$$

ОДЗ: $a - 2b \geq 0$

$$a^2 = 40b + 4b^2 = \frac{ab}{3} \quad 3a^2 = 120b + 12b^2 = ab$$

$$3a^2 = 120b + 12b^2 = 0 \quad D = 162b^2 - 144b^2 = 25b^2$$

$$a = \frac{12b \pm 5b}{6} \quad \begin{cases} a = 3b \\ a = \frac{7}{3}b \end{cases}$$

1) $9a^2 + b^2 = 90 \quad b^2 = 9 \quad b = \pm 3 \Rightarrow 70; b \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{(9; 3)}$ и $(-3; -3)$
 - не подходит по ОДЗ

$\frac{16}{9}b^2 + b^2 = 90 \Rightarrow \frac{25}{9}b^2 = 90 \Rightarrow b^2 = \frac{9 \cdot 9 \cdot 10}{25} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{5}\sqrt{10}$

$\Rightarrow (a; b) \in \left(\frac{12}{5}\sqrt{10}; \frac{3}{5}\sqrt{10} \right)$ и $\left(-\frac{12}{5}\sqrt{10}; -\frac{3}{5}\sqrt{10} \right)$
 не подходит по ОДЗ

\Rightarrow пары $(a; b)$: $(9; 3)$ и $(-\frac{12}{5}\sqrt{10}; -\frac{3}{5}\sqrt{10})$

$x - 6 = a \Rightarrow x = a + 6$

$6y - 3 = b \Rightarrow y = \frac{b+3}{6}$

1) $x = 15 \quad y = 1$

2) $x = (-\frac{12}{5}\sqrt{10} + 6)$

$y = \frac{-\frac{3}{5}\sqrt{10} + 3}{6} = -\frac{3}{10}\sqrt{10} + \frac{1}{2}$

Ответ: $(15; 1); (-\frac{12}{5}\sqrt{10} + 6; -\frac{3}{10}\sqrt{10} + \frac{1}{2})$

③. $10x - x^2 + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq 5 \log_3 10x - x^2$; По ОДЗ $10x - x^2 > 0$
 $a + a \log_3 4 \geq 5 \log_3 a$ Заметим $10x - x^2 = a > 0$

$\frac{a+a}{\log_3 4} \geq a \log_3 5 \Rightarrow$ графики монотонно возрастающей и монотонно убывающей (не больше 1 раз)

на прямой a очевидно, что $a \in (0; 1)$ $a \geq a \log_3 5$ н.а. $\log_3 5 > 1 \Rightarrow$ график $a \log_3 5$ эта точка только улетит в бесконечность \Rightarrow график $a \geq 1$

Т.к. $a \geq 1$ левая часть всегда больше \Rightarrow существует не все $a \Rightarrow$
 $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 10x < 0 \Rightarrow x(x-10) < 0 \Rightarrow x \in (0; 10)$

Ответ: $x \in (0; 10)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

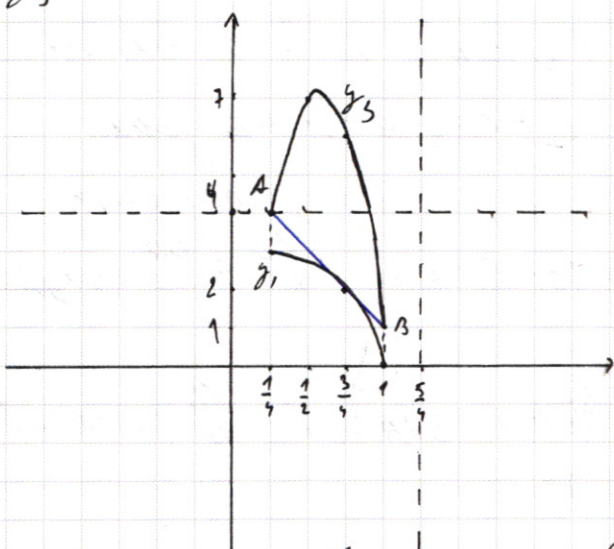
6. $\frac{4(4x-5)+4}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$

$y_1 = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$y_2 = ax+b$

$y_3 = -32x^2+36x-3$

на $x \in [\frac{1}{4}; 1]$



Найдем левую и правую граничные функции на отрезке $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

III. А. график y_2 лежит между кривыми y_1 и y_3 при всех x на интервале $[\frac{1}{4}; 1]$

\Rightarrow прямая y_2 лежит строго между кривыми

AB или на ней (A $(\frac{1}{4}; 4)$; B $(1; 1)$)

$1 = a + b$

$3 = -\frac{3}{4}a \quad a = -4 \quad b = 5$

$4 = \frac{1}{4}a + b$

\Rightarrow прямая AB $= y = -4x + 5$

III. А. график y_2 лежит между кривыми y_1 и y_3

прямая y_2 должна лежать выше или

совпадать с кривой - касательной к графику y_1

$y_1 = f = 4 + 4 \cdot (4x-5)^{-1}$

$f'(x) = \frac{-46}{(4x-5)^2}$

касат.

$y = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) = 4 + 4x_0 - 5 + (x-x_0) \cdot \frac{-16}{(4x_0-5)^2} =$

$= -\frac{16}{(4x_0-5)^2}x + \frac{16x_0}{(4x_0-5)^2} + \frac{16x_0 - 20 + 4(4x_0-5)^2}{(4x_0-5)^2} =$

$= \frac{-16}{(4x_0-5)^2}x + \frac{32x_0 - 20 + 4(16x_0^2 - 40x_0 + 25)}{(4x_0-5)^2} =$

$= \frac{-16}{(4x_0-5)^2}x + \frac{64x_0^2 - 148x_0 + 80}{(4x_0-5)^2} = \frac{64x_0(x_0-2)+80}{(4x_0-5)^2}$

Заметим, что при $x_0 = \frac{3}{4}$ касательная к y_1 имеет вид $y = -4x + 5 \Rightarrow$

при других x_0 касательная будет либо выше (A), либо ниже (B), тогда уже

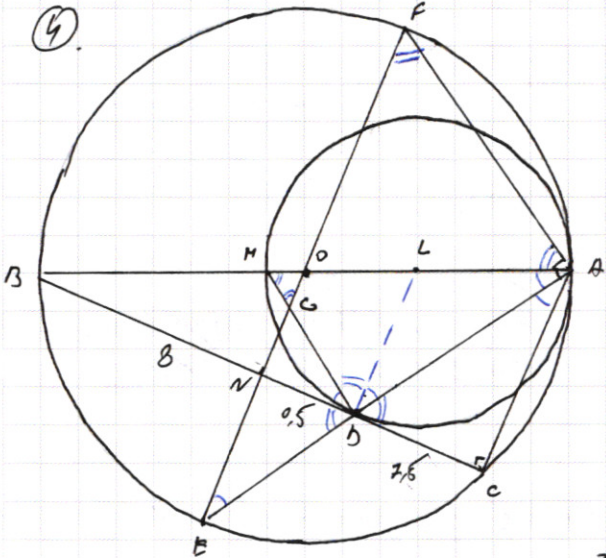
совпадения нет \Rightarrow единственная касательная, выше или совпадающая с кривой y_1

это касательная $y = -4x + 5 \Rightarrow$ это единственная прямая, удовлетворяющая

условию $\Rightarrow a = -4; b = 5$

ответ: $a = -4; b = 5$

4.



$EF + BC$; $\angle C$ опущена на диаметр $AB \Rightarrow \angle C = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle BNF = 90^\circ \Rightarrow EF \parallel AC$;
 $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle BDA$ (угол вписан и центр);
 $\angle ADC = \angle NDE \Rightarrow \angle MED = \angle DAC$;
 $\angle DMA = \angle ADC$ м.п. OM , OM на VA
 \Rightarrow п.п. $\angle MDA$ OM на OM
 $\Rightarrow \angle MDA = 90^\circ \Rightarrow \angle MAD = \angle DAC$
 $\Rightarrow \angle ABC = 90 - 2\angle DAC \Rightarrow \angle AEC = 180 - 4\angle DAC$

$$\angle EFC = 2\angle EAC (180) \Rightarrow \angle ECA = 180^\circ - 2\angle DAC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle EFA = 90^\circ - \angle DAC = \angle ADC \Rightarrow \angle FAE = 90^\circ \Rightarrow FE \text{ — диаметр}$$

$$BD = R \quad LD = r; \angle D \perp BC \text{ на } BC \Rightarrow LD \parallel AC \parallel ON; BD = OA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN = NC = \frac{BC}{2} = b \Rightarrow ND = 0,5; DL = 1,5; BN = b; \frac{LD}{AC} = \frac{BD}{BC} \text{ (из подобия)}$$

$$\frac{r}{AC} = \frac{0,5}{32} \Rightarrow AC = \frac{32}{17} r$$

$$BA = 2R \Rightarrow AC = \sqrt{4R^2 - 64} \Rightarrow \frac{32}{17} r = 2\sqrt{R^2 - 64} \quad \frac{16}{17} r = \sqrt{R^2 - 64}$$

$$R^2 - 64 = \left(\frac{16}{17} r\right)^2 \Rightarrow R^2 = 64 + \left(\frac{16}{17} r\right)^2$$

$$BD^2 = BM \cdot BA \quad (BD \text{ — диаметр}; BA \text{ — диаметр}) \Rightarrow$$

$$\frac{17^2}{4} = (2R - 2r) \cdot 2R \Rightarrow \frac{17^2}{16} = R^2 - R \quad \frac{17^2}{16} = R^2 - R \cdot \frac{17}{16} \sqrt{R^2 - 64}$$

$$17^2 = 16R^2 - R \cdot \sqrt{R^2 - 64}$$

$$16R^2 - 17^2 = R \cdot \sqrt{R^2 - 64}$$

$$16^2 R^4 - 2 \cdot 16 \cdot 17^2 R^2 + 17^4 = R^4 - 64R^2 \quad R^2 = x$$

$$(16^2 - 1) R^2 - (32 \cdot 17^2 + 64) R^2 + 17^4 = 0 \quad (16-1)(16+1) = 255$$

$$255x^2 - 32(287-2)x + 17^4 = 0 \quad D = 287^2 \cdot 32^2 - 4 \cdot 17^4 \cdot 15 \cdot 17$$

$$\text{Находим } x, R = \sqrt{x} \text{ при } x > 0,$$

$$r = \frac{17}{16} \sqrt{R^2 - 64}; \text{ и } r > 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③. $10x + 1x^2 - 10x \stackrel{\log_3 4}{\geq} x^2 + 5 \stackrel{\log_3 (10x - x^2)}{\geq}$

$10x - x^2 > 0$ $10x - x^2 = a$ $a > 0$

$a + 0 \stackrel{\log_3 4}{\geq} 0 \stackrel{\log_3 5}{\geq} a$

$(a \geq 0 \stackrel{\log_3 5}{\geq} a \stackrel{\log_3 4}{\geq} a)$

$|a| \stackrel{\log_3 4}{\geq} -a + 5 \stackrel{\log_3 a}{\geq}$

$(-a) \stackrel{\log_3 4}{\geq} -a + 5 \stackrel{\log_3 a}{\geq}$

$5 \stackrel{\log_3 a}{\geq} -a$

$(a^b - a^c) \leq 0 \Leftrightarrow 2^2 - 2^3$

$(\Rightarrow) (a-1)(b-c) \leq 0$

$a \stackrel{\log_3 4}{\geq} -a + 5 \stackrel{\log_3 a}{\geq}$

$a \stackrel{\log_3 4}{\geq} -a \stackrel{\log_3 5}{\geq} -a$

$a \stackrel{\log_3 5}{\geq} -a \stackrel{\log_3 4}{\geq} a$

$0 \stackrel{\log_3 5}{\geq} 0 \stackrel{\log_3 4}{\geq} a \stackrel{\log_3 3}{\leq} 0$

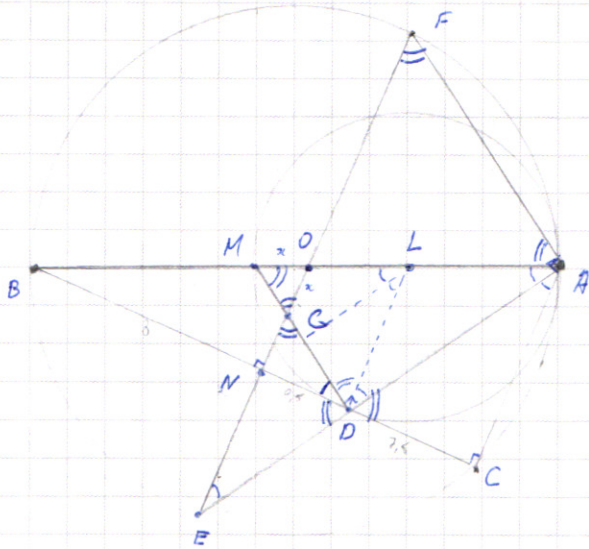
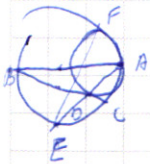
$\log_5 5 = \log_3 (4+1) = \log_3 4$

$\log_5 5 - \log_3 4 = \log_3 \frac{5}{4}$

$\log_3 3 - \log_5 4 = \log_3 \frac{3}{4}$

$a \log_3 \frac{5}{4} - a \log_3 \frac{3}{4} \leq 1$

$\log_3 (4 \cdot \frac{5}{4})$



$EF \parallel AC$ $CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{12}{2}$
 $R, r - ?$ $\angle BFE - ?$ $\angle AFE - ?$

$\angle ABC = 90 - 2\alpha$

$\angle EAC = \alpha = \gamma$ $\angle FEO = 180 - 4\alpha + 2\alpha = 180 - 2\alpha = \gamma$

$\frac{6287}{2281}$

$\angle EFA = 90 - \alpha = 13 = \gamma$

$\frac{2009}{2296}$

$\Rightarrow \angle FAB = 30 = \gamma = 0 - 8\alpha$

$OA = OE = OB = R$

$CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{12}{2}$ $BC = 16$ $BN = NC = 8 \Rightarrow ND = \frac{1}{2}$

$\frac{MB}{AD} = \frac{MD}{DC} = \frac{AD}{AC}$

$\frac{EF}{AM} = \frac{FA}{MD} = \frac{AE}{AD}$

$\frac{EF}{AD} = \frac{FA}{DC} = \frac{AE}{AC}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{EF}{AE}$

$ND = \frac{16}{77} r$

$CD = r$ $\frac{r}{AC} = \frac{8.5}{16} \Rightarrow AC = \frac{16}{8.5} r = \frac{32}{17} r$

$AC = \frac{32}{77} r$

$MA = 2r$ $OA = R = 2r - \alpha \Rightarrow R = 2r - \alpha$ $\alpha = 2r - R$

$NE = \frac{1}{15} AC = \frac{32}{17 \cdot 15} r$

$\frac{GN}{7.5} = \frac{9.5}{AC} \Rightarrow GN = \frac{15}{4 \cdot \frac{32}{17}} r = \frac{15 \cdot 17}{32} r$

$AC = \sqrt{4r^2 - 16r^2} = 2\sqrt{R^2 - 16 \cdot 4} = 17r$

$R^2 - 64 = \frac{16^2}{77^2} r^2$ $R^2 = 64 + \frac{16^2}{77^2} r^2$

$r = \frac{17}{16} \sqrt{R^2 - 64}$

$R = \sqrt{64 + \left(\frac{16}{77} r\right)^2}$

$\frac{285}{16} = 64 + \frac{16^2}{77^2} r^2$

$BD^2 = BM \cdot BA$

$\frac{172}{4} = (2R - 2r) \cdot 2R$

$\frac{285}{4} = 4R^2 - 4Rr$

$\frac{285}{16} = 64 + \frac{256}{289} r^2 - r \cdot \sqrt{64 + \frac{256}{289} r^2}$

$-\frac{735}{16} = \frac{256}{289} r^2 - r \cdot \sqrt{64 + \frac{256}{289} r^2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

②

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$30 - 12 - 18 + 6 \quad 36 - 12 = 9$$

$$6y - 2 \quad x - 12y = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9$$

$$\left(\frac{x-6}{a}\right)^2 + \left(\frac{6y-3}{b}\right)^2 = 45 + 45 = 90$$

$$a^2 + b^2 = 90$$

$$x^2 - 24yx + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$$

$$2y(x-6) - (x-6) = (12y-1)(x-6)$$

$$x^2 + x + 144y^2 + 12y - 26xy = 6$$

$$x-6 = 2(6y-3) = x-12y = a-2b$$

$$ab = 6xy - 3x - 36y + 18 = 3(2xy - x - 12y + 6) = 30b$$

$$\begin{cases} a-b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 2ab - b^2 = \frac{ab}{3} \\ 3a^2 - 6ab + 3b^2 = ab + 9a^2 - 10b^2 \end{cases}$$

$$30^2 - 72b + 3b^2 = 0$$

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 40b + 4b^2 = \frac{ab}{3} \\ \log_3 4 - \log_3 32 = \log_3 \frac{4}{3} \\ \log_3 5 - \log_3 3 = \log_3 \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$30^2 - 120b + 12b^2 = ab$$

$$30^2 - 13ab + 12b^2 = 0$$

$$163 - 144 = 25b^2$$

$$D = \frac{13b \pm 5b}{6}$$

$$a = \frac{4}{3}b$$

$$a = 3b$$

$$\frac{16}{9}b^2 + b^2 = \frac{25}{9}b^2 = 90$$

$$b^2 = \frac{9 \cdot 9 \cdot 10}{25}$$

$$b = \pm \frac{9}{5} \sqrt{10}$$

$$a = \pm \frac{12}{5} \sqrt{10}$$

$$1 + a^{\log_3 \frac{4}{3}} = a^{\log_3 \frac{5}{3}}$$

$$a^{\log_3 5} = a^{\log_3 \frac{5}{3}}$$

$$\log_3 5 = a^{\log_3 \frac{5}{3}}$$

$$a =$$

$$f' = ma^{(m-1)}$$

$$\log_4 5 = a^{\log_3 \frac{5}{3} - \log_3 \frac{5}{3}}$$

$$\textcircled{3} \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(\alpha - 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha - 2\beta}{2}\right) = ?$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$2\sin(\alpha)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5} \quad -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$|\sin 2\beta| = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$$

$$1) \quad 2\sin \alpha \cos \alpha + 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$$

$$3\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha = 0$$

$$D = 4\sin^2 \alpha + 12\sin^2 \alpha = 16\sin^2 \alpha$$

$$-32 \cdot \frac{9}{16} + 36 \cdot \frac{3}{4} - 3$$

$$\cos \alpha = \frac{-2\sin \alpha \pm 4\sin \alpha}{6}$$

$$\cos \alpha = -\sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{3}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \\ \cos \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \\ \cos \alpha = 3 \end{cases}$$

$$-18 + 27 - 3 = 6$$

$$2) \quad 2\sin \alpha \cos \alpha - 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$$

$$2\sin \alpha \cos \alpha - 2\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$$

$$-1\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + 3\sin^2 \alpha = 0$$

$$D = 4\sin^2 \alpha + 12\sin^2 \alpha = 16\sin^2 \alpha \quad \cos \alpha = \frac{-2\sin \alpha \pm 4\sin \alpha}{-2}$$

$$\sin \alpha = 2\sin \alpha$$

$$1 + \log_3 4 \cdot a^{(\log_3 4 - 1) \cdot \log_3 3} = \log_3 5 \cdot a^{\log_3 5}$$

$$1 + \log_3 4 \cdot a^{\log_3 \frac{4}{3}} = \log_3 5 \cdot a^{\log_3 \frac{5}{3}}$$

$$1 + a^{\log_3 \frac{4}{3}} = a^{\log_3 \frac{5}{3}}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\sin \alpha \\ \cos \alpha = 3\sin \alpha \end{cases} \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\log_3 5 = \log_3(4+1) = \log_3 4 \cdot 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{256}{289} r^2 + \frac{735}{16} = r \sqrt{64 + \frac{256}{289} r^2}$$

$$\frac{256^2}{289^2} r^4 + 2 \cdot \frac{256}{289} r^2 \cdot \frac{735}{16} r + \frac{735^2}{16^2} = 64 r^2 + \frac{256}{289} r^4$$

$$x^2 \left(\frac{16^4}{17^4} - \frac{16^2}{17^2} \right) + \left(\frac{2 \cdot 16 \cdot 735}{17^2} - 64 \right) x + \frac{735^2}{16^2} = 0$$

$$x^2 \left(\frac{16^4 - 16^2 \cdot 17^2}{17^4} \right) + \left(\frac{32 \cdot 735 - 32 \cdot (2 \cdot 17^2)}{17^2} \right) x + \frac{735^2}{16^2} = 0$$

$$x^2 \frac{(16^2 - 16 \cdot 17)(16^2 + 16 \cdot 17)}{17^4} + \frac{32 \cdot 16 \cdot 3}{17^2} \cdot \left(\frac{5}{4} + 20 \right) x + \frac{735^2}{16^2} = 0$$

$$\frac{5}{4} - 2 = -\frac{3}{4}$$

5. $f(20) = f(1) + f(1)$
 f

$$\frac{4(4x-5)+4}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

6. $4 + \frac{4}{4x-5}$
 $x=0 \quad y=$
 $x=\frac{1}{4} \quad y=3$
 $x=\frac{3}{4} \quad y=$
 $x=1 \quad y=0$

$x=0 \quad y=$
 $x=\frac{1}{4} \quad y=5$
 $x=1 \quad y=1$
 $5 = \frac{1}{4}a + b$
 $4 = -\frac{3}{4}a$
 $1 = a + b$
 $a = -\frac{16}{3} \quad b = \frac{16}{3}$

$g_0 = -32 \cdot \frac{81}{8} + \frac{162}{8} - \frac{36}{8} = -36$
 $\frac{81}{8} - \frac{24}{8} = \frac{57}{8}$
 $g_0 = \frac{57}{8}$
 $x=0 \Rightarrow y=-3$
 $x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=5$
 $x=\frac{3}{4} \Rightarrow y=1$
 $x=1 \Rightarrow y=-3$

$-32 \cdot \frac{1}{16} + 36 \cdot \frac{1}{4} - 3 = -2$
 $-2 - 3 + 9 = 4$
 $-32 \cdot \frac{9}{16} + 36 \cdot \frac{3}{4} - 3 = 7$
 $-8 + 18 - 3 = 7$
 $-32 \cdot 36 - 3 = 36 - 35 = 1$

$$1 + a^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq a^{\log_3 \frac{5}{3}}$$

$$1 \geq a^{\log_3 \frac{5}{3}} - a^{\log_3 \frac{4}{3}}$$

$$1 \geq (a-1) \left(\log_3 \frac{5}{3} - \log_3 \frac{4}{3} \right)$$

$$1 \geq (a-1) \left(\log_3 \frac{5}{4} \right)$$

$$1 \geq a \log_3 \frac{5}{4} - \log_3 \frac{5}{4}$$

$$\log_3 3 + \log_3 \frac{5}{4} \geq a \log_3 \frac{5}{4}$$

$$\log_3 \frac{15}{4} \geq a \log_3 \frac{5}{4}$$

$$\log_3 \frac{15}{4} \geq \frac{4}{5} a$$

$$a \leq 1$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)