МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha+4\beta) = \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\underbrace{\cos(2\alpha+2\beta)}_{\pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\to -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$y \geq 6x$

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2 = \underbrace{9+36}_{45}+45 = 90 \end{cases}$

$(y-6x)^2 = xy-6x-y+6$

$y^2-12yx+36x^2 = xy-6x-y+6$

$y^2-13yx+36x^2+6x+y-6=0$

$y^2+(1-13x)y+36x^2+6x-6=0$

$\times\,18 \cdot 4 = 72$

$\cancel{13}x-1-\cancel{5x}+5$

$1-\cos(4\alpha+4\beta)$ $D = 169x^2-26x+1-\underbrace{4\cdot 36x^2}_{144x^2}-24x+24 =$

$324|36$
5

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin^2\alpha+2\sin^2(2\alpha+2\beta)=0$

$= 25x^2-50x+25 = 25(x^2-2x+1) =$

$\times\,36 \cdot 9$
4

$\sin(2\alpha+4\beta)$

227

$= 25(x-1)^2$

$\times\,27 \cdot 9$

$86^2+4\cdot 43\cdot 227 = 4\cdot 43\underbrace{(43+227)}_{270}$

$\times\,81 \cdot 3 = 243$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos^2\alpha\cdot\sin 4\beta$

$243 - 16 = 227$

$2\cos^2 2\beta - 1$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1-\cos 2\beta)+\cos 2\alpha(\sin 4\beta-\sin 2\beta) =$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-\cos\beta)+\cos\alpha$

$\cos(4\alpha+4\beta) = 1-2\sin^2(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta)\cdot\sin 2\alpha - \cos 2\alpha+4\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha+1-\cos(4\alpha+4\beta)=0$

$(\sin(2\alpha+4\beta)+1)(1+\sin 2\alpha) = \cos 2\alpha\cdot\cos 2\alpha+4\beta$

1

$\log_5 12 = \frac{\log_{|x^2-26x|} 12}{\log_{|x^2-26x|} 5}$ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$

$12^{\frac{1}{\log_{|x^2-26x|} 5}}$

$x^2-26x=t$ $t=26x-x^2$

$26x-x^2 \geq 0$ $t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$|t|^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5}$ $\log_5$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5(t)}$

$\shortparallel$

t $5^{\log_5 13 \cdot \log_5(t)}$

$\log_5 13 = \frac{\log_{12} 13}{\log_{12} 5}$

$t \geq t^{\log_5 13} - t^{\log_5 13} - \cancel{\log}$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \geq 0$ $t^{\log_5 12-1}+1-t^{\log_5 13-1} \geq 0$

$t^{\log_5 13-1}-t^{\log_5 12-1} \leq 1$

$\log_5 12 = \frac{\log_t 12}{\log_t 5}$

$12^{\frac{1}{\log_5 t}}+t-13^{\frac{1}{\log_5 t}} \geq 0$

270|9

30

$t \geq$

$a^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$

$5^{\log_5 a \cdot \log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$

$12^{\log_5 a}+a \geq 13^{\log_5 a}$

$\frac{\log_5 13}{\log_5 12} = \log_{12} 13$

$26x-x^2$ $a^{\log_5 12}+a \geq a^{\log_5 13}$

$a<1$ $\shortparallel$

$a^{\log_5 12}+a \geq a^{\log_5 12 \cdot \log_{12} 13}$

$a \geq a^{\log_5 12}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$26x - x^2 > 0$

$\log_5 a = \log_{13} 5$

$a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a}$

$12^{\log_5 a} + a \geq 13^{\log_5 a}$

12

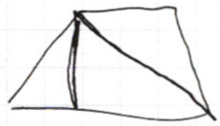
~~$12^b + a \geq 13^b$~~

~~$a \geq 13$~~

$12^{\log_5 a} + 5^{\log_5 a} \geq 13^{\log_5 a}$

$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \end{array}$

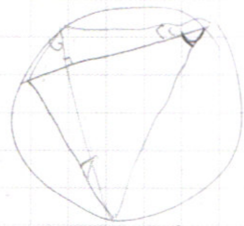
$5^x \geq 13^x - 12^x$ $\quad$ $12^x + 5^x \geq 13^x$

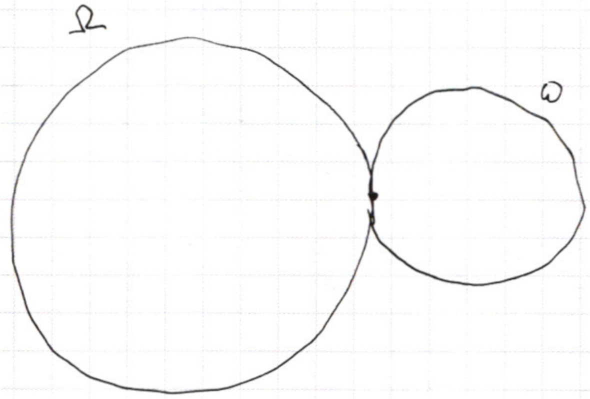


$x \geq \log_5(13^x - 12^x)$ $\quad$ $12^x + 5^x - 13^x \geq 0$

$12^x + 5^x \geq 13^x$

ра





$51 = 3 \cdot 17$

$17^2 - 8 \cdot 28$

$51^2 - 4 \cdot 18 \cdot 28$

29 $\quad$ 74

63 $\quad$ 7 4

$\ln 12\, 12^n + \ln 5\, 5^n \quad \ln 13\, 13^n$

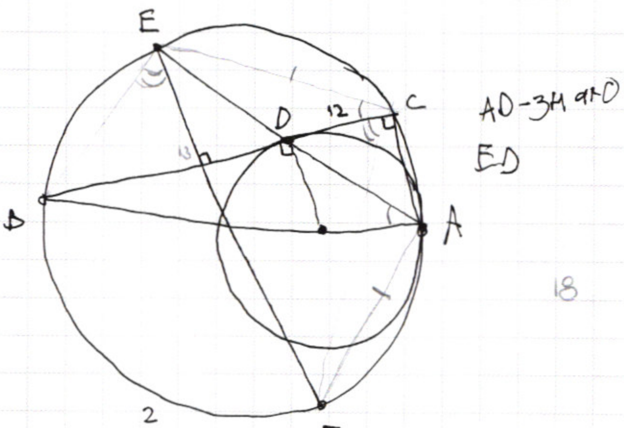
$\overset{26}{\overbrace{2 \cdot 13}} R = 50R - 25r$

2R

12^n

25

12^e



$AD - 34$ $a \neq 0$

ED

$\frac{-6x+4}{3x-2} + \frac{4}{3x-2}$

$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$a^x = \ln a \cdot a^x$

$(e^{\ln a})^x$

$(e^{\ln a \cdot x})' = \underbrace{e^{\ln a \cdot x}}_{a^x} \cdot \ln a$

$\begin{array}{r} 13 \\ \times 12 \\ \hline 26 \\ +13 \\ \hline 156 \end{array}$

18

21

$\begin{array}{r} 2 \\ \times 36 \\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$

EA

$\angle BCE$

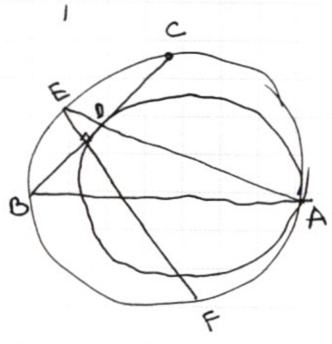
$\begin{array}{r} 2 \\ \times 13 \\ 7 \\ \hline 1 \end{array}$

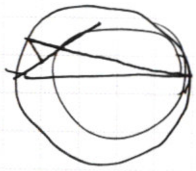
T $\quad$ X

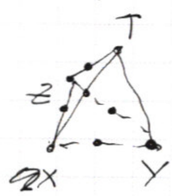
$\begin{array}{r} 3 \\ \times 18 \\ 4 \\ \hline 72 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 3744 & 36 \\ -36 & 14 \\ \hline 144 & \end{array}$

42+13 $\quad$ 13







☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\alpha = x$

$\sin(2\alpha + 4\beta) +$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{2}{17}$

$\sin x \cdot \cos 2y + \cos x \cdot \sin 2y + \sin x = -\frac{2}{\cancel{\sqrt{17}}17}$

$\sin x \cancel{\cdot} 2\cos^2 x + 2\cos x \cdot \sin y \cdot \cos y = -\frac{2}{17}$

$\sin x \cdot \cos^2 \cancel{x} y + \cos x \cdot \sin y \cdot \cos y = -\frac{1}{17}$

$\sin(x+y) \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos(x+y) + \sin x = -\frac{2}{17}$

$\underbrace{\sin x + \sin y}_{2} = 2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$

$(\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)(\cos x \cdot \sin y + \cos y \cdot \sin x)$

$\cos^2 x \cdot \cos y \cdot \sin y + \cos x \cdot \sin^2 y \cdot \sin x$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$f(x) \neq f(y)$

$f(x) = f(y)$

$\boxed{f(1) = 0}$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) =$

28-3

25

„0": 9

„1": 8

„2": 3

„3": 2

„4": 2

„5": 1

1

$\cancel{\sin^2 x + \cos^2 x}(\cos\frac{y}{2} \cdot \sin\frac{y}{2}) + \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} y\geq 6x \\ (y-6x)^2=xy-6x-y+6 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$y^2-12y+9x^2-18x-45=0$

$D=144-36x^2+72x+180=$

$=324+72x-36x^2=36(9+2x-x^2)$

при x_0 т.ч. $9+2x-x^2\geq 0$,

$y=\dfrac{12\pm 6\sqrt{9+2x-x^2}}{2}=$

$=6\pm 3\sqrt{9+2x-x^2}$

(иначе такого y $!\exists$)

$y^2+36x^2-12xy=xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+6x+y-6+36x^2=0$

$y^2+(1-13x)y+36x^2+6x-6=0$

$D=(1-13x)^2-4\cdot 36x^2-24x+24=1+169x^2-26x-$

$-144x^2-24x+24=25x^2-50x+25=25(x-1)^2$

$y=\dfrac{13x-1\pm\sqrt{D}}{2}=\dfrac{13x-1\pm 5|x-1|}{2}$

~~при~~ $y=\dfrac{13x-1\pm 5(x-1)}{2}$

$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{8x+4}{2}=4x+2 \\ y=\dfrac{18x-6}{2}=9x-3 \end{array}\right.$

~~при~~

Следовательно $\left[\begin{array}{l} 6\pm 3\sqrt{9+2x-x^2}=4x+2 \\ 6\pm 3\sqrt{9+2x-x^2}=9x-3 \end{array}\right.$

$\pm 3\sqrt{9+2x-x^2}=4x-4$

$27(9+2x-x^2)=(4x-4)^2=16x^2-32x+16$

$43x^2-2(27+16)x+16-27\cdot 9=0$

$43x^2-86x-227=0$

$D=86^2+4\cdot 43\cdot 227=4\cdot 43\cdot(227+43)=4\cdot 43\cdot 270$

$x=\dfrac{86\pm\sqrt{4\cdot 43\cdot 270}}{86}=$

$=1\pm\dfrac{6\sqrt{43\cdot 30}}{86}=$

$=1\pm\dfrac{3\sqrt{43\cdot 30}}{43}=1\pm 3\sqrt{\dfrac{30}{43}}$

$y=4x+2$ и $y\geq 6x$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Следовательно $x \leq 1$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3\sqrt{\frac{30}{43}} \\ y = 4x + 2 = 6 - 12\sqrt{\frac{30}{43}} \end{cases}$$

если $\pm 3\sqrt{9+2x-x^2} = 9x-9$

$$\pm\sqrt{9+2x-x^2} = 3x-3$$

$$\cancel{9}+2x-x^2 = 9x^2+\cancel{9}-18x$$

$$10x^2-20x=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \rightarrow y = 9x-3 = -3 \text{ — не подходит, т.к. } y>6x \\ x=2 \rightarrow y = 9x-3 = 15 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1-3\sqrt{\frac{30}{43}} \\ y = 6-12\sqrt{\frac{30}{43}} \end{cases} \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $26x-x^2>0$, чтобы $\log_5(26x-x^2)$ имело смысл

$\exists\ 26x-x^2=a$.

Тогда $a^{\log_5 12}+a\geqslant 13^{\log_5 a}$

$5^{\log_5 a\cdot\log_5 12}+5^{\log_5 a}\geqslant 13^{\log_5 a}$

$12^{\log_5 a}+5^{\log_5 a}\geqslant 13^{\log_5 a}$

Пусть $\log_5 a=n$.

$12^n+5^n\geqslant 13^n$. Заметим, что равенство достигается при $n=2$.

$$\begin{cases}\left(\frac{12}{13}\right)^n+\left(\frac{5}{13}\right)^n\geqslant 1\\ \left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=1\end{cases}$$

при увеличении n от 2, каждое из слагаемых уменьшается, т.к. они меньше 1.

при уменьшении n – увеличивается

$\to$ нам подходят $n\leqslant 2\to\log_5 a\leqslant 2$

$a\leqslant 25$

$26x-x^2\leqslant 25$

$x^2-26x+25\geqslant 0$

$(x-1)(x-25)\geqslant 0$

$$\left[\begin{array}{l}x\leqslant 1\\ x\geqslant 25\end{array}\right.$$

Также $(26-x)x>0$

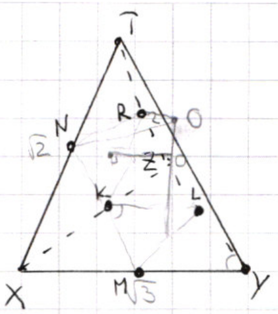
$(x-26)x<0$

$0<x<26$

Ответ:

$\Longrightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$

7



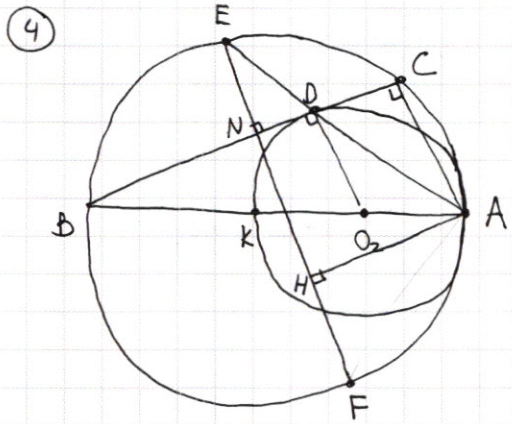
Пусть эти точки принадлежат сфере ω.

Тогда плоскость XYZ и ω пересекаются по окружности, которой принадлежат $Y, M, K, L \rightarrow YMKL$ - вписанный $\rightarrow \angle MKL + \angle MYL = 180°$

$\begin{cases} KL \parallel XY \\ MK \parallel ZY \end{cases}$ как ср. линии $\rightarrow \angle MKL = \angle XYZ \rightarrow \angle XYZ = 90°$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



] O_2 - центр ω; r - радиус ω; R - радиус Ω

$\angle BDO_2 = 90^\circ$, т.к. BD касается ω

$\angle BCA = 90^\circ$, как опирающийся на диаметр

$\to \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \to \frac{AB}{BC} = \frac{BO_2}{BD}$

$\frac{2R}{25} = \frac{2R-r}{13} \to 25r = 24R \to r = \frac{24}{25}R$

Также $BD^2 = BK \cdot BA$, как касательная

$169 = 2(R-r)\cdot 2R = 4R(R-r) = 4R^2(1-\frac{24}{25}) = \frac{4R^2}{25}$

$R^2 = \frac{25\cdot169}{4} \to R = \frac{5\cdot13}{2} = \boxed{\frac{65}{2}}$

$r = \frac{24}{25}\cdot\frac{65}{2} = \frac{12\cdot13}{5} = \boxed{\frac{156}{5}}$

$AC \parallel EF$, т.к. они перпендикулярны BC, $\to ECAF$ - вписанная трапеция $\to$ она равнобокая $\to \angle AFE = \angle CEF$

$\angle FEC = 90^\circ - \angle ECB$

$\angle ECB = \angle EAB$ из вписанности

$\cancel{AD}$ $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 65^2 - 25^2 = 40\cdot90 \to AC = 60$

$AD^2 = AC^2 + DC^2 = 3600 + 144 = 3744 \to AD = \sqrt{3744} = 6\sqrt{14}$

$BD\cdot DC = ED\cdot DA \to ED = \frac{13\cdot12}{\sqrt{3744}} = \frac{13\cdot2}{\sqrt{14}} = \frac{26}{\sqrt{14}} = \frac{26\sqrt{14}}{14} = \frac{13}{7}\sqrt{14}$

из вписанности

$\to AE = \underbrace{(\frac{13}{7}+6)}_{=\frac{55}{7}}\sqrt{14} \to \cos\angle BAE = \frac{AE}{AB} = \frac{55\sqrt{14}}{7\cdot65} = \frac{11\sqrt{14}}{13\cdot7} = \frac{11\sqrt{14}}{91}$

$\angle FEC = 90^\circ - \angle BAE \to \sin\angle FEC = \frac{11\sqrt{14}}{91} \to \angle AFE = \arcsin\frac{11\sqrt{14}}{91}$

Опустим высоту AH в $\triangle AEF$

CNHA - прямоугольник $\rightarrow AH = CN$, $NH = AC = 60$

$\triangle END \sim \triangle ACD \rightarrow$ ~~CN~~ $DN =$ ~~CN~~ $CD \cdot \frac{ED}{DA} = 12 \cdot \frac{13}{7}\sqrt{14} \cdot \frac{1}{6\sqrt{14}} = \frac{26}{7}$

$\rightarrow CN = \frac{26}{7} + 12 = 15\frac{5}{7}$

$EN^2 = ED^2 - DN^2 = \frac{169}{49} \cdot 14 - \frac{4 \cdot 169}{49} = \frac{10 \cdot 169}{49} \rightarrow EN = \frac{13}{7}\sqrt{10}$

HF = EN из симметрии равнобокой трапеции

$\rightarrow S_{\triangle AEF} = AH \frac{(NH + 2EN)}{2} = \frac{(\overbrace{15 \cdot 7 + 5}^{110})(60 + \frac{26}{7}\sqrt{10})}{14} = \frac{55(420 + 26\sqrt{10})}{49} =$

$= \frac{110(210 + 13\sqrt{10})}{49} = \boxed{\frac{23200 + 1430\sqrt{10}}{49}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 $f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=f(2)+f(8)=0$

$f(17)=[\frac{17}{4}]=4$

$f(18)=f(2)+f(9)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=f(5)+f(4)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=2f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

$f(28)=f(2)+f(14)=1$

$f(\frac{x}{y})+f(y)=f(x) \to$ чтобы $f(\frac{x}{y})<0$, $f(x)-f(y)>0$.

Значит для любой пары ~~неравных~~ чисел ~~(a; b)~~ a и b, нам подходит ровно 1 пара из (a; b) или (b; a), кроме

если $f(a)>f(b)$ если $f(b)<f(a)$

случаев, когда $f(a)=f(b)$ — тогда нам не подходит ни (a; b), ни (b; a).

Всего пар неравных чисел ~~(без учета порядка)~~ x и y, т.ч. $\begin{cases} 4\le x\le 28 \\ 4\le y\le 28 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{(28+3)^2 = 28^2}$ ~~выбираем 2 1~~

$25 \cdot 24$

x выбираем любое, y - любое, кроме равного x

$f(z)=0$ при 9 числах в нужном интервале — нам не подходит $9 \cdot 8$ пар из них

$f(z)=1$ при 8 числах - еще минус $8 \cdot 7$ пар

$f(z)=2$ при 3 числах - минус $3 \cdot 2$ пары

$f(z)=3$ при 2 числах - минус $2 \cdot 1$ пары

$f(z)=4$ при 2 числах - еще минус 2 пары

$f(z)=5$ только для 1 числа

=> всего ~~подходящих~~ нам пар чисел (в нужном диапазоне и, т.ч. $f(a) \neq f(b)$)

$$25 \cdot 24 - 9 \cdot 8 - 8 \cdot 7 - 6 - 4 = 25 \cdot 24 - 8 \cdot 16 - 10$$

При этом только 1 из пар $(a;b)$ и $(b;a)$ подходит

→ всего нужных пар $\frac{25 \cdot 24 - 8 \cdot 16 - 10}{2} = 25 \cdot 12 - 74 = 300 - 74 = 226$

$\boxed{\text{Ответ: } 226}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$

Т.к. $x > \frac{2}{3}$, $8-6x \geq (3x-2)(ax+b)$

$8-6x \geq 3ax^2-2ax+3bx-2b$

$3ax^2+(6-2a+3b)x-2b-8 \leq 0$ это парабола ветьями вверх

→ Максимумы на краях: $x=2$

$12a+12-4a+6b-2b-8 \leq 0$

$8a+4b+4 \leq 0$

$2a+b+1 \leq 0$

$x=\frac{2}{3}$: $\frac{4}{3}a+4-\frac{4}{3}a+2b-2b-8 \leq 0$

$-4 \leq 0$ – верно всегда

→ Чтобы выполнялось 1ое неравенство, надо, чтобы $2a+b+1 \leq 0$

$b \leq -2a-1$

$ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$18x^2-(51+a)x+28-b \leq 0$. Аналогично:

при $x=2$: $\overbrace{18\cdot4}^{72}-102-2a+28-b \leq 0$

$-2-2a-b \leq 0$ → $2+2a+b \geq 0$ → $b \geq -2-2a$

при $x=\frac{2}{3}$: $8-(51+a)\frac{2}{3}+28-b \leq 0$

$8-34-\frac{2}{3}a+28-b \leq 0$

$2-\frac{2}{3}a-b \leq 0$ → $b \geq 2-\frac{2}{3}a$

$2-\frac{2}{3}a \leq -2a-1$

$6-2a \leq -6a-3$

$4a \leq -9$ → $a \leq -\frac{9}{4}$

$-2-2a \vee 2-\frac{2}{3}a$

$-6-6a \vee 6-2a$

$-12 \vee 4a$

$-3 \vee a$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~при~~ <u>Ответ:</u> $a \in [-3; -\frac{9}{4}]$, $b \in [2-\frac{2}{3}a; -2a-1]$

~~если~~ $a \in (-\infty; -3)$, $b \in [-2-2a; -2-1]$

①

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cos 2\beta \cdot \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}} = -\frac{2}{17}$$

$$\rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4 \cdot \cos 2\alpha = -1$$

$$2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \pm 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad |: \cos^2\alpha$$

$$2tg\alpha \pm 4(1-tg^2\alpha) = -1 - tg^2\alpha$$

1) $2tg\alpha + 4 - 4tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

$(3tg\alpha - 5)(tg\alpha + 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{5}{3} \\ tg\alpha = -1 \end{array}\right.$

$\rightarrow$ ровно 3 ответа

<u>Ответ:</u> $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$.

2) $2tg\alpha - 4 + 4tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$(tg\alpha + 1)(5tg\alpha - 3) = 0$

$tg\alpha = -1$ или $tg\alpha = \frac{3}{5}$