МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{\cancel{2\alpha}+4\beta-\cancel{2\alpha}}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \quad |:2$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}^2} \quad |\cdot(-\sqrt{17})$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{=1} = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha\neq 0$

$2tg\,\alpha + 5 - 3tg^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha - 2tg\,\alpha - 5 = 0$

$tg\,\alpha = -1, \quad tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

$\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} \to$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{=1} = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha\neq 0$

$2tg\,\alpha - 3 + 5tg^2\alpha = 0$

$tg\,\alpha = -1, \quad tg\,\alpha = \frac{3}{5}$

Ответ: $tg\,\alpha = -1$; $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$; $tg\,\alpha = \frac{3}{5}$.

№ 2.

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $y \geq 6x$

(1) $y^2 - 12x + 36x^2 - xy + 6x + y - 6 = 0$

$y^2 + y(1-13x) + 6(6x^2+x-1) = 0$ – решим относительно y

~~$D = 1 - 26y + 169y^2$~~

$D = 1 - 26x + 169x^2 - 144x^2 - 24x + 24 = 25x^2 - 50x + 25 = (5x-5)^2$

$y_1 = \frac{13x - 1 + 5x - 5}{2} = \frac{18x - 6}{2} = 9x - 3$

$y_2 = \frac{13x - 1 - 5x + 5}{2} = \frac{8x + 4}{2} = 4x + 2$

Значит, $(y - 9x + 3)(y - 4x - 2) = 0$.

(2) $9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 9x - 3 \quad (1) \\ y = 4x + 2 \quad (2) \end{array}\right. \\ (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

(1) $(3x-3)^2 + (9x-9)^2 = 90$

$9x^2 - 18x + \cancel{9} + 81x^2 - 162x + \cancel{81} = \cancel{90}$

$90x^2 - 180x = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$

$y_1 = -3 \qquad y_2 = 15$

– не уд. ОДЗ

(2) $(3x-3)^2 + (4x-4)^2 = 90$

$9x^2 - 18x + 9 + 16x^2 - 32x + 16 = 90$

$25x^2 - 50x + 25 - 90 = 0$

$25x^2 - 50x - 65 = 0 \quad | : 5$

$5x^2 - 10x - 13 = 0$

$D = 100 + \overset{260}{20 \cdot 13} = 360$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm 6\sqrt{10}}{10}$

$x_1 = 1 + \frac{3\sqrt{10}}{5}$; $x_2 = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}$

$y_1 = 6 + \frac{12\sqrt{10}}{5}$; $y_2 = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$

– не уд. ОДЗ

Ответ: $x_1 = 2,\ y_1 = 15$;

$x_2 = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5},\ y_2 = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $\Rightarrow$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\frac{\sqrt2}{2}\sin 2\alpha = -\frac{2\sqrt2}{2\cdot17}$ $\Rightarrow$

≥ 3 знач.

$\boxed{tg\,\alpha - ?}$

$2\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha$

$2\sin 2\alpha\cos 2\beta + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cos^2 2\beta - \sin 2\alpha\sin^2 2\beta + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha$

$x = \frac{\alpha+\beta}{2};\ y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(x+y)+\sin(x-y) =$

$= \sin x\cos y + \cancel{\cos x\sin y} + \sin x\cos y - \cancel{\cos x\sin y} =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

если $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$ $|:\cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha = 0$

$2tg\,\alpha - 3 + 5tg^2\alpha = 0,\ tg\,\alpha = t$

$5t^2+2t-3=0$

$t_1 = -1,\ t_2 = \frac{3}{5}$

$\boxed{tg\,\alpha = \frac{3}{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$ $|:2$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$\sin\alpha = -\sqrt{}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$ $|\cdot(-\sqrt{17})$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$ $\Rightarrow$

$\boxed{\sin 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, где $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $|\cdot\sqrt{17}$

$\boxed{\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1}$ $tg\,\alpha - ?$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$ $|:\cos^2\alpha \neq 0$

$2tg\,\alpha + 5 - 3tg^2\alpha = 0,\ tg\,\alpha = t$

$3t^2 - 2t - 5 = 0$

$t_1 = -1,\ t_2 = \frac{5}{3}$

$\boxed{tg\,\alpha = -1,\ tg\,\alpha = \frac{5}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \quad (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

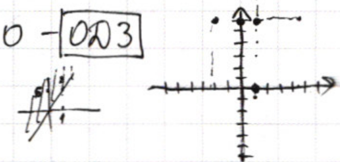
$y^2-12xy+36x^2-xy+6x+y-6=0$

(2) $9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

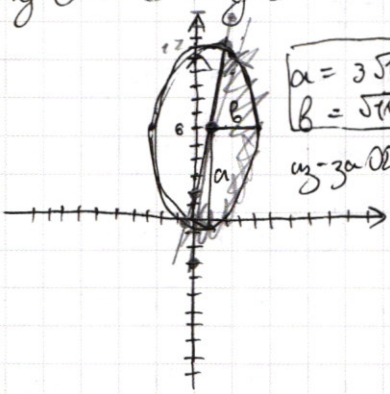
$(3x-3)^2+(y-6)^2=(3\sqrt{10})^2$

(1) $y-6x\geq 0$ – $\boxed{ОДЗ}$

$y\geq 6x$



$y-6=3\sqrt{10}$
$y=6+3\sqrt{10}$
$y-6=-3\sqrt{10}$
$y=6-3\sqrt{10}$



$\boxed{a=3\sqrt{10} \quad b=\sqrt{10}}$

из-за ОДЗ

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$-12xy-xy$

$\cancel{y^2-13xy+36x^2+6x+y+6=0}$

$+24xy$

$(y-6x)^2$
$(6x-y)^2$

$y^2+12xy+36x^2=25xy-6x-y+6$

$(y+6x)^2+(y+6x)=25xy+6$

$(y+6x)(y+6x+1)-(25xy+6)=0$

$3x-3=3\sqrt{10}$
$x-1=\sqrt{10}$, $x=1+\sqrt{10}$
$3x-3=-3\sqrt{10}$
$x-1=-\sqrt{10}$
$x=1-\sqrt{10}$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$36x^2-12xy+6x+y^2-xy+y-6=0$

$6x(6x-2y+1)+y(y-x+1)-6=0$

$6x$

$6x(y-x+1)+y(y-x+1)=6xy-6x^2+6x+y^2-xy+y$

$6\cdot 7 \qquad 6\cdot 3$

$6xy-6x^2+6x+y^2-xy+y+42x^2-18xy=0$

$6x(y-x+1)+y(y-x+1)+6x(7x-3y)=0$

$(y-x+1)(6x+y)+6x(7x-3y)=0$

$\boxed{f(a),\ a>0}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$, p-простое

$\boxed{(x;y)\text{- кол-во?}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} 4\leq x\leq 28 \\ 4\leq y\leq 28 \\ f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \end{array}}$$

$f(1)=0$	$f(5)=1$	$f(22)=2$
$f(2)=0$	$f(10)=1$	$f(23)=5$
$f(3)=0$	$f(20)=1$	$f(24)=0$
$f(6)=0$	$f(15)=1$	$f(25)=2$
$f(18)=0$	$f(25)=2$	$f(26)=3$
$f(12)=0$	$f(11)=2$	$f(27)=0$
$f(24)=0$	$f(12)=0$	$f(28)=1$
$f(4)=0$	$f(13)=3$	
$f(16)=0$	$f(14)=1$	
$f(7)=1$	$f(17)=4$	
$f(8)=0$	$f(18)=0$	
$f(9)=0$	$f(19)=4$	
$f(10)=1$	$f(20)=1$	
	$f(21)=1$	

если $x:y\to\otimes$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

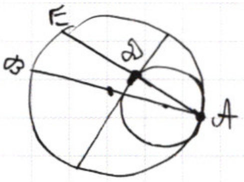
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

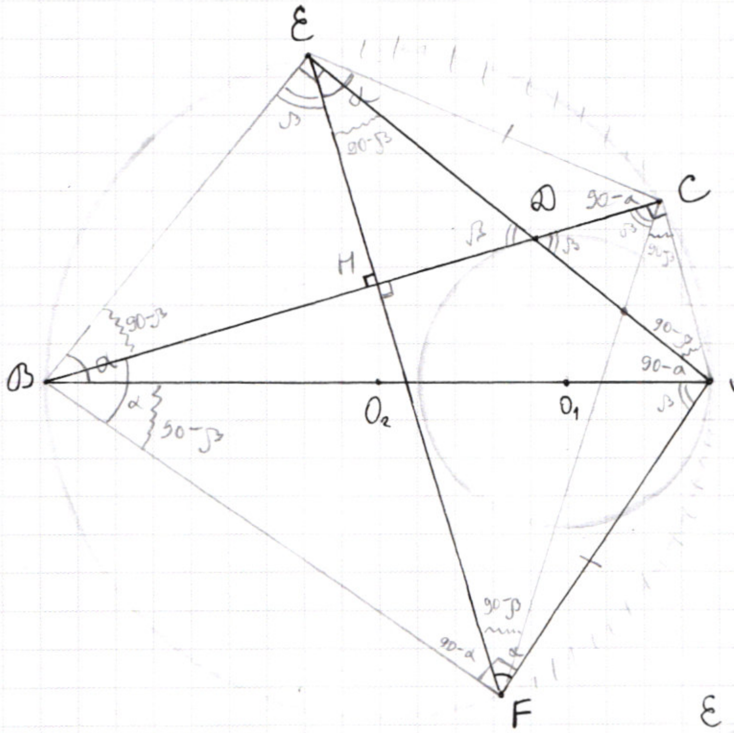
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$5^2+12^2=13^2$

Дано: $CD=12$
$BD=13$

Найти: $r, R, \angle AFE$ (45°), $S_{\triangle AEF}$ – ?



$\cap AE = 2\alpha$, $\cap FC = 2\alpha$

$\Rightarrow \cap EC = \cap AF$ $\boxed{\angle FEC = \angle CBF}$

$CA \parallel EF$, $ECAF$ – р/б трап.
с высотой CH

$BD \cdot DC = ED \cdot DA$

$\angle CDA = \beta \Rightarrow \angle DO_1A = 2\beta$
$\angle ESA = 2\beta$

$180 - 2\alpha = 2\beta = 2\alpha$ $ES = AS$
$4\alpha = 180$ $\alpha = \beta$
$\cancel{\alpha = 45^\circ}$

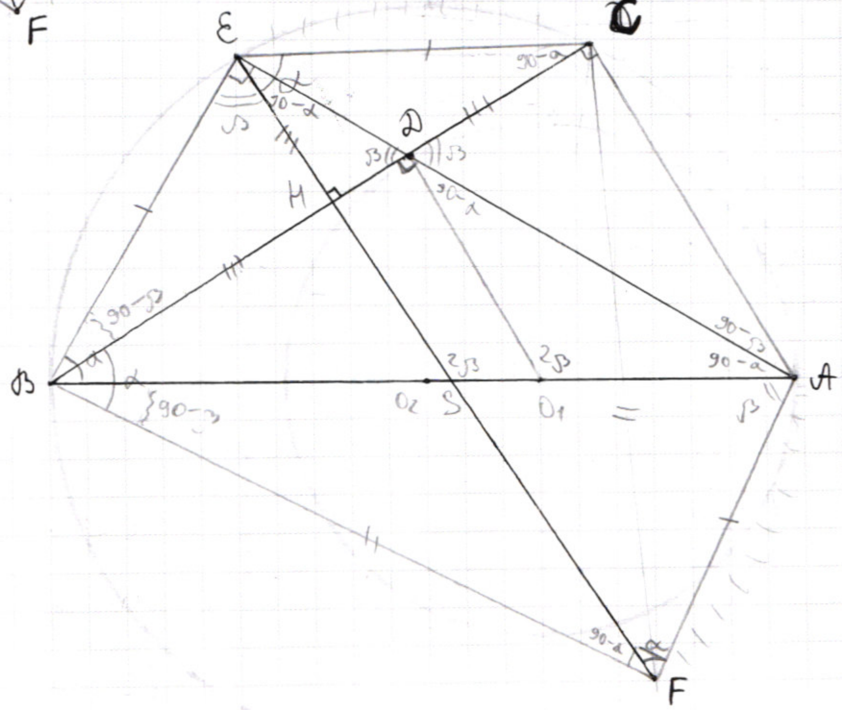
$\angle CAF = 180 - \alpha$

$BH = HC = \frac{12+13}{2} = 12,5$

$AE = \frac{65 \cdot 5}{\sqrt{26}}$

$EF = 65$

$\sin\alpha = \frac{65 \cdot 5}{\sqrt{26} \cdot \cancel{65}}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$y^2-12xy+36x^2-xy+6x+y-6=0$

$-y(x-1)+6(x-1)$

$y^2-12xy+36x^2-(x-1)(y-6)=0$

$y^2-xy+y+36x^2+6x-6-12xy=0$

$36x^2+12x+1$

$(6x+1)^2$

$36x^2-xy-12xy+6x+y^2+y-6=0$

$36x^2-x(6+13y)+(y^2+y-6)=0$

840
600+240+24
$4\cdot36=144\cdot6$
$=864$

$D=36+156y+169y^2-144y^2-144y+864=$

$=25y^2+12y+900=(5y+30)^2-288y$

$y^2+y-13xy+(36x^2+6x-6)=0$

$\boxed{y^2+y(1-13x)+6(6x^2+x-1)=0}$

$D=1-26x+169x^2-\overset{144}{36\cdot4}x^2+24x+24=$

$=25x^2-50x+25=(5x-5)^2$

$y_1=\dfrac{13x-1+5x-5}{2}=\dfrac{18x-6}{2}=9x-3$

$y_2=\dfrac{13x-1-5x+5}{2}=\dfrac{8x+4}{2}=4x+2$

$(y-9x+3)(y-4x-2)=0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} y=9x-3 \ (1) \\ y=4x+2 \ (2)\end{array}\right. \\ y\geq 6x \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=(3\sqrt{10})^2\end{cases}$$

360	2
180	2
90	2
45	5
	3
	3

$6\sqrt{10}$

$4\left(1+\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)+2=$

$=4+2+\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$

$4+2-$

(1) $(3x-3)^2+(9x-9)^2=90$

$9x^2-18x+9+81x^2-162x+81=90$

$90x^2-180x+90=90 \quad |:90$

$x^2-2x=0$

$x=0, \quad x=2$

$y=-3 \quad y=15$

$-3\geq 0 \quad 15\geq 12$

– не уд. ОДЗ

$6+\dfrac{12\sqrt{10}}{5}\geq 6+\dfrac{18\sqrt{10}}{5}$

– не уд.

$6-\dfrac{12\sqrt{10}}{5}\geq 6-\dfrac{18\sqrt{10}}{5}$

$y^2-4xy-2y-9xy+36x^2+18x+3y-$
$-12x-6=$

$y^2-13xy+36x^2+y+6x-6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

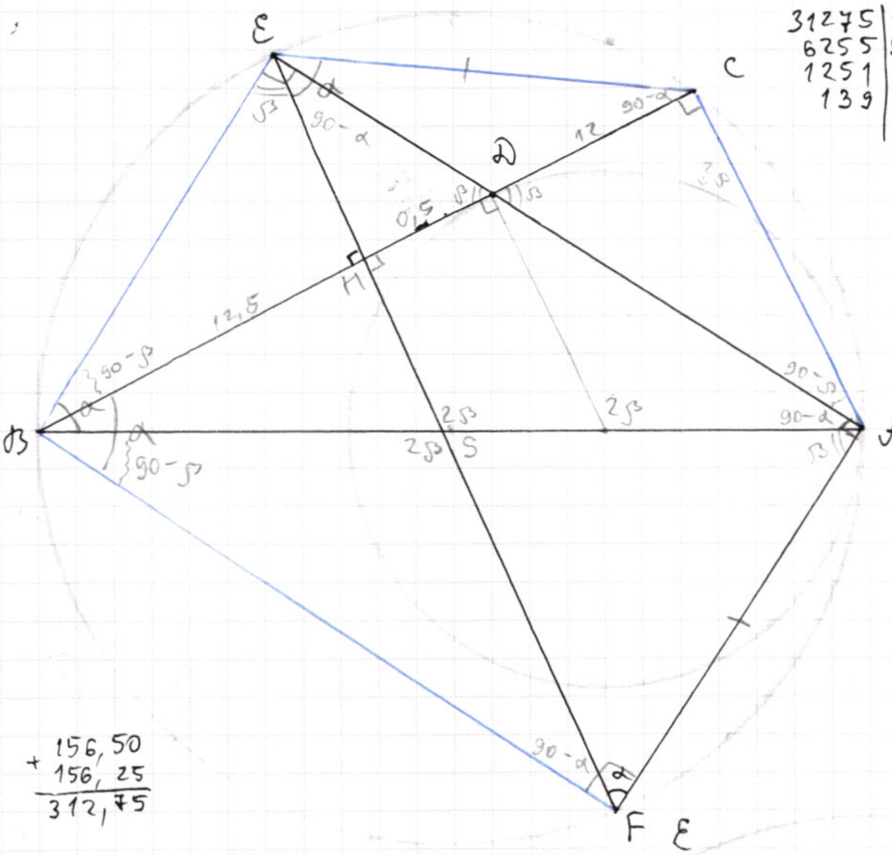
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$31275 \mid 5$, $6255 \mid 5$, $1251 \mid 9$, 139

$\triangle BSF: \cancel{90} - \beta + 2\beta + \cancel{90} - \alpha = 180$

$\beta = \alpha \Rightarrow EH$ − бисс-а

$BH = HC = \frac{25}{2} = 12,5$

$\angle EAF = 90 - \alpha + \beta = 90 - \alpha + \alpha = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle EAF$ − прямоуг

$156,25 + 0,25 = 156,50$ $\quad 0,5^2 = 0,25$ $\quad 12,5 \cdot 12,5 = 625 + 250 + 125 = 156,25$

$\angle EDC = 1\cancel{80} - \cancel{90} - \cancel{90} + \alpha - 90 + \alpha = 2\alpha - 90$

$EH = \sqrt{12,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{156,5}$

$12,5 \cdot 0,5 = 6,25$

$156,50 + 156,25 = 312,75$

$EC = \sqrt{12,5^2 + 156,5} = \sqrt{\cancel{312,75}}$

$= \sqrt{312,75} = 15\sqrt{139} = \boxed{AF}$

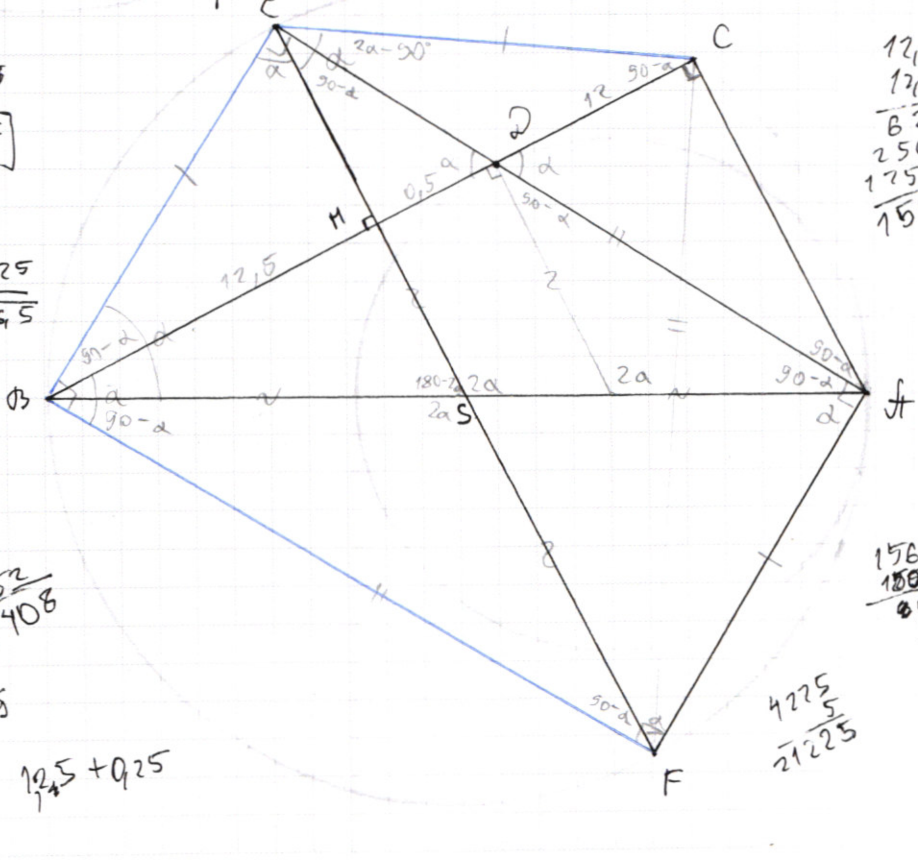
$BH \cdot HC = EH \cdot HF \Rightarrow$

$HF = \frac{BH \cdot HC}{EH} = \frac{12,5^2}{\sqrt{156,5}} = \frac{156,25}{\sqrt{156,5}}$

$EF = \sqrt{156,5} + \frac{156,25}{\sqrt{156,5}} =$

$= \frac{156,5 + 156,75}{\sqrt{156,5}} = \frac{312,75}{\sqrt{156,5}}$

$AE = \sqrt{\frac{312,75^2}{156,5} - 312,75}$



$21225 \mid 52 = 408$; 208; 425; 416; 9

$12,5 + 0,25$

$12,5 \cdot 12,5 = 625 + 250 + 125 = 156,25$

$65 \cdot 65 = 325 + 390 = 4225$

$156,25 \mid 25 = 62,5$; 150; 62; 50; 125; 125; 0

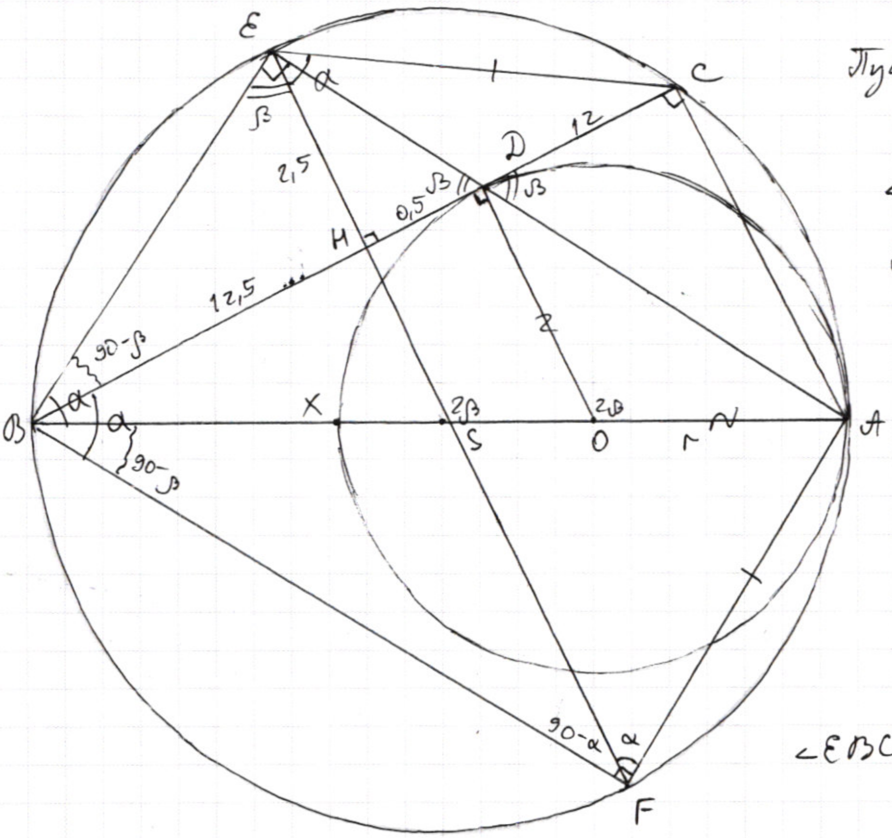
$4225 \cdot 5 = 21225$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



Решение:

Пусть (·)O – центр ω,
$BA \cap EF = S$, $BC \cap EF = M$,
$\angle EFA = \alpha$.

Тогда $\angle AFE = \angle ABE = \alpha$
$\angle BEA = \angle BFA = \angle BCA = 90°$ – опир. на диаметр
т.к. $AC \perp BC$, $OD \perp BC$, $FM \perp BC$,
$AC \parallel OD \parallel SM \Rightarrow$
$ECAF$ – р/б трап., $\angle FEC = \alpha$
$EC = AF$, $\cup AF = \cup EC \Rightarrow$
$\angle EBC = \angle ABF$, $\angle CBF = \angle FEC = \alpha$

Пусть $\angle BEH = \beta$, $\angle EBM = \angle ABF = 90-\beta$, $\angle BED = 90° \Rightarrow \angle EDB = \angle CDA = \beta \Rightarrow$

$\cup AD = 2\beta \Rightarrow \angle DOA = 2\beta$ – центральный, $\angle ESA = \angle BSF = \angle DOA = 2\beta$.

$\angle EFB = 90-\alpha$. В $\triangle BSF$: $2\beta + 90 - \beta + 90 - \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow$

$\angle EBF = 90 - \beta + \alpha = 90° \Rightarrow \angle EAF = 90° \Rightarrow \triangle AFE$ – прямоуг.

EH – бисс-а и высота $\Rightarrow BH = HC = \frac{12+13}{2} = 12,5 \Rightarrow HD = 0,5$

$EH^2 = BH \cdot HD \Rightarrow EH = \sqrt{12,5 \cdot 0,5} = \sqrt{6,25} = 2,5 \Rightarrow tg\,\beta = tg\,\alpha = \frac{EH}{HD} = \frac{2,5}{0,5} = 5 \Rightarrow$

$\angle AFE = arctg\,5$. $EH \cdot HF = BH \cdot HC \Rightarrow HF = \frac{12,5^2}{2,5} = \frac{156,25}{2,5} = \frac{1562,5}{25}$ $62,5 \Rightarrow$

$EF = EH + HF = 2,5 + 62,5 = 65$; ~~[illegible]~~ $AE = 5x$, $AF = x$

$x^2 + 25x^2 = 4225 = 26x^2 \Rightarrow x = \frac{65}{\sqrt{26}} \Rightarrow 5x = AE = \frac{65 \cdot 5}{\sqrt{26}} \Rightarrow S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{65 \cdot 5}{\sqrt{26}} \cdot \frac{65}{\sqrt{26}} = \frac{21225}{52}$

$\frac{AE}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{65 \cdot \cancel{5} \cdot \sqrt{26}}{\sqrt{26} \cdot 2 \cdot \cancel{5}} = 32,5 = AS$ – радиус $\Omega \Rightarrow AB = 65$

$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AS} \Rightarrow$ ~~ED~~

Ответ: $R = 32,5$, $S = \frac{21225}{52}$, $\angle AFE = arctg\,5$.