МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = 2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \cancel{2}\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = +\cancel{2}\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(\overset{\text{"}-\frac{1}{\sqrt{17}}}{2\alpha+2\beta})(\cos 2\beta - 1) = 0$

$\cos 2\beta = 1$ $\quad \sin 2\beta = 0$ (по ОТТ)

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cancel{\cos 2\beta\cdot\sin 2\alpha}^{\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \cos 2\alpha = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg\,2\alpha = \pm\frac{1}{4}$

$tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Пусть $tg\alpha = t$, $t \neq \pm 1$

$\pm\frac{1}{4} = \frac{2t}{1-t^2}$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t^2 = 2t$ $\qquad -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}t^2 = 2t$

$\frac{1}{4}t^2 + 2t - \frac{1}{4} = 0$ $\qquad \frac{1}{4}t^2 - 2t - \frac{1}{4} = 0$

$\qquad t^2 - 8t - 1 = 0$

$t^2 + 8t - 1 = 0$ $\qquad D = 64+4 = (2\sqrt{17})^2$

$D = 64+4 = (2\sqrt{17})^2$ $\qquad t_1 = \frac{8+2\sqrt{17}}{2} = 4+\sqrt{17}$

$t_1 = \frac{-8+2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}-4$ $\qquad t_2 = \frac{8-2\sqrt{17}}{2} = 4-\sqrt{17}$

$t_2 = \frac{-8-2\sqrt{17}}{2} = -\sqrt{17}-4$

Ответ: $tg\alpha = \sqrt{17}-4$, $tg\alpha = -\sqrt{17}-4$, $tg\alpha = 4+\sqrt{17}$, $tg\alpha = 4-\sqrt{17}$

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} y-6-6(x-1)=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$ $\qquad y \geqslant 6x$

$\rfloor$ $\sqrt{y-6}=a$, $\sqrt{x-1}=b$; $a,b \geqslant 0$

$\begin{cases} a^2-6b^2=ab \\ 9b^4+a^4=90 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a^2-a\cdot b-6b^2=0 \\ 9b^4-a^4-90=0 \end{cases}$ $\quad D=b^2+24b^2=(5b)^2$ ($b \geqslant 0$) $\quad a=\dfrac{b\pm 5b}{2}$

$\rfloor$ $a=3b$ $\qquad\qquad$ $\rfloor$ $a=-2b$

$9b^4+81b^4=90$ $\qquad$ $a,b>0 \Rightarrow a=0, b=0$, но тогда $9b^4+a^4=0$ – не подх-т

$90b^4=90$

$b=1$ (т.к. $b>0$)

$a=3$

$\sqrt{y-6}=3$, $\sqrt{x-1}=1 \Rightarrow y=15$; $x=2$

Проверка:

$\begin{cases} 15-12=\sqrt{9\cdot 1} & \text{- верно} \\ 9\cdot 1+9^2=90 & \text{- верно} \end{cases}$

Ответ: $(2;15)$

3. Т.к. 5 в $\forall$ степ-и >0 $\quad 26x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geqslant 13^{\log_5 26x-x^2}$

$\rfloor$ $\log_5 26x-x^2=t$ $\qquad 5^t=26x-x^2$

$5^{t\cdot\log_5 12}+5^t \geqslant 13^t$

$12^t+5^t \geqslant 13^t$ монотонно возр-е функ-и

$26x-x^2>0$ $\qquad x(26-x)>0$ $\qquad - \quad + \quad -$ (0, 26) $\qquad x\in(0;26)$

при $t=3$ $\quad 12^3+5^3<13^3 \Rightarrow$ при $t>3$ – не верно

при $t=2$ $\quad 12^2+5^2=13^2$ – а дальше 13^2 быстрее возрас-т чем сумма 5^2+12^2

$\log_5 26x-x^2 \leqslant 2=\log_5 25$ $\qquad 26x-x^2\leqslant 25$ $\qquad x^2-26x+25\geqslant 0$

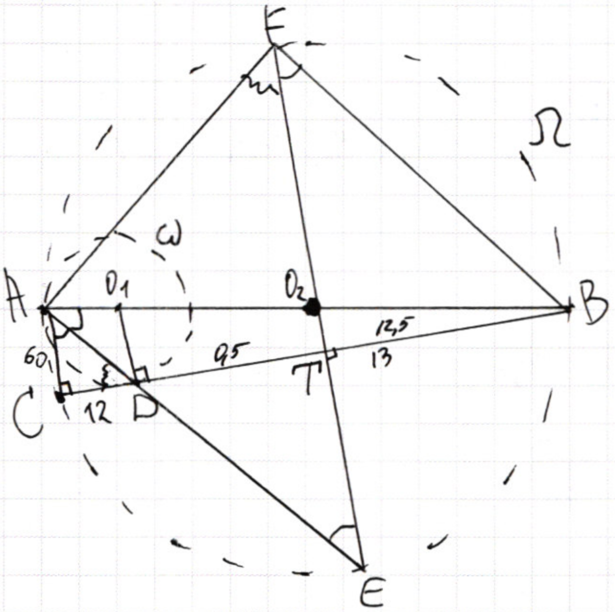
$D=576-100=24^2$ $\qquad x=\frac{26+24}{2}=25$

0 1 25 26 $\qquad$ Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$ $\qquad (x-25)(x-1)\geqslant 0$ $\qquad x=\frac{26-24}{2}=1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Общая т.кас-я 2-х окр-й, их центры лежат на 1 прямой

по лемме об двух кас-я окр-х и хорде, кас-я одной из них:

E – сер-а дуги $\breve{BC}$, $EC^2 = ED\cdot EA$

пот. об отр-х пересек-я хорд

~~EC^2~~ $ED\cdot AD = 12\cdot 13$

т.к. AB – диаметр $AC \perp BC$

$AC\perp BC$, $EF \perp BC \Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow \angle CAE = \angle AEF$

т.к. E – сер-а $\breve{BC} \Rightarrow \angle CAE = \angle EFB$

получ-я $AE \parallel BF$

E – сер-а $\breve{BC} \Rightarrow EF$ – сер.пер. к $BC \Rightarrow$ это диам-р окр-и Ω

$BT = \frac{BC}{2} = 12{,}5$ $\quad DT = CT - CD = BT - CD = 0{,}5$

$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DT} = \frac{12}{0{,}5} = 24$ ($\Delta ACD \sim \Delta DTE$ по углам)

$AD = 24DE \quad AD\cdot DE = 12\cdot 13 \quad 24DE^2 = 12\cdot 13 \quad DE = \sqrt{\frac{13}{2}}$

~~$EC^2 = \sqrt{\frac{13}{2}}$~~

$AC^2 = AD^2 - CD^2 = 24^2\cdot\frac{13}{2} - 12^2 = 12^2\cdot(26-1) = 12^2\cdot 5^2$ (по т. Пифагора)

$AC = 60$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 60^2 + 25^2 = $ ~~…~~ $5^2(2^2+5^2) = 5^2\cdot 13^2$

$AB = 65 \quad AO_2 = \frac{65}{2} = 32{,}5$ (R Ω)

~~$\angle AFE = 90 \angle AEF =$~~

$O_1D \perp BC$ (радиус в т. кас-я

$\frac{BT}{BD} = \frac{O_2T}{O_1D} = \cancel{\frac{13,5}{12,5}} = \cancel{\frac{25}{27}} = \frac{12,5}{13} = \frac{25}{26}$

$O_2T = \frac{AC}{2} = 30$ (ср-я линия в Δ BAC)

$O_1D = \frac{26 \cdot 30}{25} = \frac{6 \cdot 26}{5} = 31,2$

$tg\angle ADC = \frac{60}{12} = 5$ ~~tg∠A~~

$\left.\begin{array}{l} \angle FAE = 90 \text{ (опир-я на диаметр)} \\ \angle AEF = \angle CAE \end{array}\right| \Rightarrow \Delta CAD \sim \Delta EFA$

$\angle AFE = \angle ADC = arctg(5)$

$AD = 24DE = 12\sqrt{26}$, $AE = \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$\sin\angle ADC = \sin\angle AFE = \frac{60}{12\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$

~~$S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot EF \cdot \sin\angle AEF =$~~

$\sin\angle AEF = \sin\angle ADC = \frac{12}{12\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot EF \cdot \sin\angle AEF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot 12,5 \cdot 65 \cdot \frac{\sqrt{26}}{26} = \frac{65 \cdot 12,5}{2} =$

$= \frac{65 \cdot 25}{4} = \frac{65 \cdot 5 \cdot 5}{4} = \frac{325 \cdot 5}{4} = \frac{1625}{4} = 406,25$

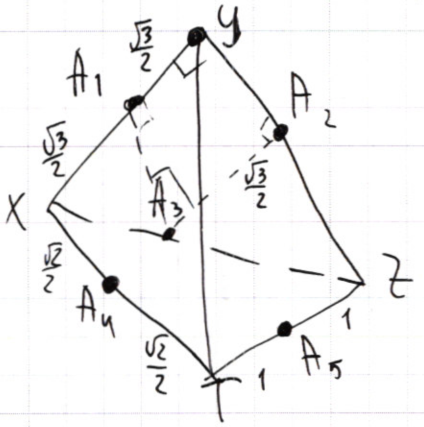
Ответ: ~~8a~~ $R_\Omega = 32,5$; $R_\omega = 31,2$, $\angle AFE = arctg(5) = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)$,

$S_{AEF} = \frac{1625}{4} = 406\frac{1}{4} = 406,25$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Любое сечение шара – круг; плоск-ь XYZ высекает сечение



$A_1 Y A_2 A_3$. ~~Извес Т.~~ Значит эти 4 точки на одной окр-и. ~~Значит~~ $A_2A_3\ A_1Y$ – парал-м, т.к. A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 – сред-е линии. Парал-м, впис-й в окр-ь – прямоуг-к

~~в прям-м $\triangle XYZ$ YA_3 медиана = XA_3~~

~~в прям-е диагонали равны~~

$V_{пир-ы} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{осн-я}$

5. $f(a) = f(a) + f(1)$ $\quad f(1) = 0$ $\quad f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0$

$f(a) = -f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(2\cdot2) = f(2)+f(2) = 0$, $f(5)=1$, $f(2\cdot3)=0$

$f(7)=1$, $f(2\cdot4)=0$, $f(3\cdot3)=0$, $f(2\cdot5)=1$, $f(11)=2$,

$f(3\cdot4)=0$, $f(13)=3$, $f(14)=f(2\cdot7)=1$, $f(3\cdot5)=1$, f(

f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x
0	0	1	10	1	20
0	1	2	11	1	21
0	2	0	12	2	22
0	3	3	13	5	23
0	4	1	14	0	24
1	5	1	15	2	25
0	6	0	16	3	26
1	7	4	17	0	27
0	8	0	18	1	28
0	9	4	19		

'0' 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27
'1' 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 28
'2' 11, 22, 25
'3' 13, 26
'4' 17, 19,
'5' 23

9 чисел '0', 8 чисел '1', 3 числа '2', 2 числа '3',

2 числа '4', 1 число '5'

$\left.\begin{array}{l} 0-1<0 \\ 0-2<0 \\ 0-3<0 \\ 0-4<0 \\ 0-5<0 \end{array}\right\}$ ~~9·8=72 пары~~ $9\cdot16=144$

$\left.\begin{array}{l} 1-2 \\ 1-3<0 \\ 1-4 \\ 1-5 \end{array}\right\}$ $8\cdot8=64$

Итого $144+64+15+6+2=231$

$\left.\begin{array}{l} 2-3 \\ 2-4<0 \\ 2-5 \end{array}\right\}$ $3\cdot5=15$

$\left.\begin{array}{l} 3-4 \\ 3-5<0 \end{array}\right\}$ $2\cdot3=6$

$4-5<0$ } $2\cdot1=2$

Ответ: кол-во пар 231

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $f_1(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$ гипербола

$f_1(\frac{2}{3}) = \varnothing$ - ассимп-а

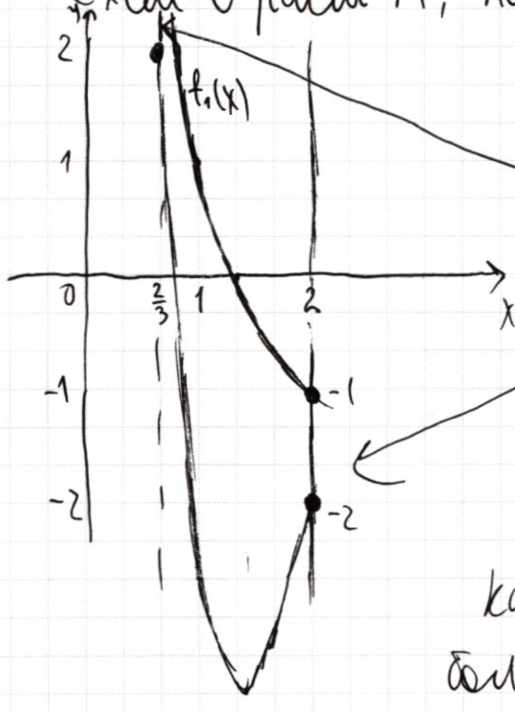
$f_1(2) = \frac{4}{4} - 2 = -1$

$f_2(x) = 18x^2 - 51x + 28$ - параб-а с ветв-и вверх, верш-й в $\frac{51}{36} = 1\frac{5}{12}$

$f_2(\frac{2}{3}) = 8 - 34 + 28 = 2$

$f_2(2) = 72 - 102 + 28 = -2$

Схем-о рассм-м, как себя ведут графики данных фун-й



Заметим, что если прямая $ax+b$ пересек-т в показ-х отр-х $x=\frac{2}{3}$ и $x=2$, то тогда второе нерав-во выполн-е (оно тогда и только тогда выполн-е)

$a<0$ - видной граф-а; $b>0$

а значит $a\cdot\frac{2}{3}+b\geq 2$ и $-2\leq 2a+b\leq -1$

Среди таких фун-й нужно понять какие не имеют общих точек с гиперболой или лишь кас-е её

(найдем их т. пересеч-я)

$\frac{8-6x}{3x-2} = ax+b$

$\frac{4}{3x-2} = ax+b+2$ $\quad 4 = 3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b + 6x - 4$

$3a\cdot x^2 + x(3b+6-2a) - 2b - 4 = 0$ ~~3a<0 → 3a<0 - ветви вниз~~

$D = (3b-2a+6)^2 + 12(2b+4) \leq 0$

$(3(b+2)-2a)^2 + 24(b+2) \leq 0$

$9(b+2)^2 - 12a(b+2) + 4a^2 + 24b + 48 \le 0$

$9(b+2)^2 - (b+2)(12a-24) + 4a^2 \le 0$

$D = 12^2(a-2)^2 - 16a^2 \cdot 9 = 144a^2 - 576a + 576 - 144a^2 = 576(1-a)$

~~Если $a>1$, то корней нет, $a>0 \Rightarrow$ все выраж-е при $\forall\, b+2$ полож-о – не подх-т~~

$b+2 = \frac{24-12a+24\sqrt{1-a}}{18} = \frac{4-3a+4\sqrt{1-a}}{3}$

$b = \frac{4\sqrt{1-a} - 3a - 2}{3} > 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{\sqrt{17}}$

sin, cos

$\cancel{2}\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{\sqrt{17}}$ $\cos\alpha\neq0$ $\alpha\neq\pi k$

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{17}$

$\sin(\alpha+\beta)(\cos2\beta-\cos(\alpha+\beta))=0$

$\sin(\alpha+\beta)\cdot-\cancel{2}\cdot\sin\cdot\frac{\alpha+3\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0$

$\sin(\alpha+\beta)\neq0$

$\cos2\beta=\cos(\alpha+\beta)$

$\sin\frac{\alpha+3\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$\begin{cases}y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}\\5x^2+y^2-18x-12y=45\end{cases}$

$(3x-3)^2$ $(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9x^2-18$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$AD\cdot DE=12\cdot13$

$x(y-6)-(y-6)$

$\frac{AD}{DE}=\frac{AD}{x}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9a^2+b^2=90$

$b+6-6a-6=\sqrt{ab}$

$\frac{DE^2}{x}=13$ $DE^2=13x$

$a+1=x$

$b+6=y$

$\begin{cases}9a^2+b^2=90\\b-6a=\sqrt{ab}\end{cases}$

$9a^2+b^2=90$

$b^2-12ab+36a^2=ab$

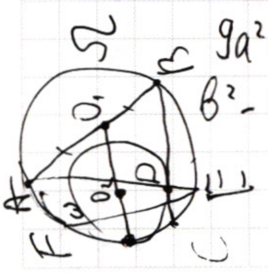
$9a^2+b^2=90$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$2b^2-13ab+45a^2-90=0$

$D=169a^2-4\cdot2\cdot(45a^2-90)=$

$=169a^2-360a^2+270$ $270-191a^2\geq0$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a-6b=\sqrt{ab}$

$b-6a=\sqrt{ab}$

$9a^2+b^2=45$

$x\le 1$ $6x\le 6$

$y\le 6$ $6\ge y\ge 6x$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$2\cdot 3^2\cdot 5$ $3\sqrt{10}$ ≈ 9

$x=3$

$y=$

$x=4$

$y=9$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\ge$

$x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$a^2-ab-6b^2=0$ $x^2+y^2=1$

$D=b^2+24b^2=25b^2$ $4x^2+y^2=1$

$(a-5b)$

$5b$

$a=$

$a^2-6b^2=ab$

$9b^4+a^4=90$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$y-6-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases}$$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases}$$

$a=6b+\sqrt{ab}$

$9b^2+36b^2+12b\sqrt{ab}+ab=90$

$9b^2+36b^2+12b\sqrt{ab}+ab-90=0$

$45b^2+12b\sqrt{ab}+ab-90=0$

$D=144ab-180(ab-90)=$

$=90\cdot 180-$

$90-13ab+27b^2=0$ $a>6b$

$a^2>36b^2$

$90=9b^2+a^2>45b^2$

$27b^2-13ab+90=0$

$D=169a^2-360\cdot 27\ge 0$

$0<b<2$

$0<b<\sqrt{2}$

$a^2\ge\frac{45\cdot 27}{2}$

$2\cdot 2\cdot 90$

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 45\cdot 27$

$2\cdot 2$

$t^{\log_5 12}+t\ge 13$

$|t|^{\log_5 12}+t\ge 13$

$\sqrt{a}-\sqrt{6b}$

$|x^2-26x|=26x-x^2$

$x^2-26x<0$

$26x-x^2\ge 0$

$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ $\frac{2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos 2\alpha}$

$12^y+5^y\ge 13^y$

$5^{y\log_5 12}\ge 13^y$

$5^x=t$

$5^y=t$

$\log_5 t=y$

$144\cdot 12^x+12^5\ge 13^x$

$\log_{12} t$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

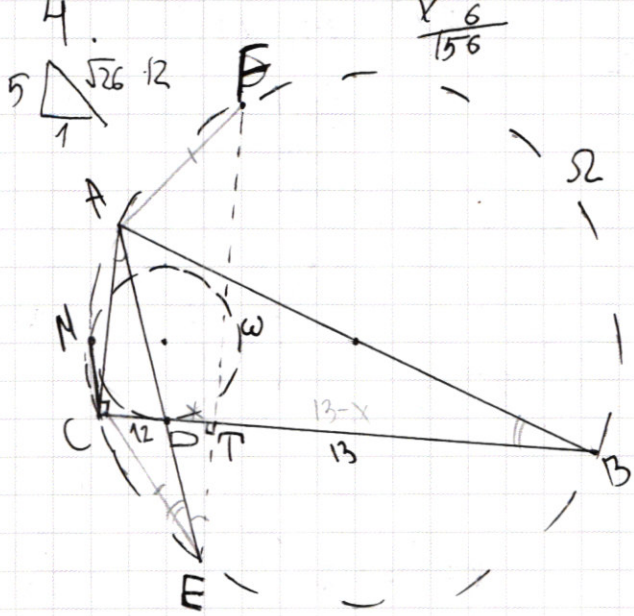
$t^{\log_5 12} + t \geqslant 13^{\log_5 t}$

$5^t + 12^t \geqslant 13^t$

60

$26 \cdot 6 = 156$

4.



$\angle ACB = 90$ (опир-е на диам-р)

$AC \perp BC$, $EF \perp BC \Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow$

$AFEC$ – равнобедр-я трап-я

произв-е отр-в пересек-я хорд равны:

$AD \cdot DE = CD \cdot BD = 12 \cdot 13$

из-за парал-и $\triangle ACD \sim \triangle DTE$

$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DT} = \frac{AC}{ET}$

$125 + 1728 \geqslant$

$144 \cdot 12 = 288 \ldots 1728$

$DT = x$

$\frac{AD}{DE} = \frac{12}{x}$; $\angle EFB = \angle ECB \Rightarrow$ ~~$\frac{CT}{TF} = \frac{ET}{}$~~

$\frac{12 \cdot 13}{DE^2} = \frac{12}{x}$ $DE^2 = 13x$

$CT \cdot TB = ET \cdot TF$ $(12+x)(13-x) = ET \cdot TF_2$

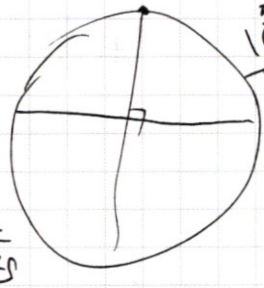
$DE = \sqrt{13x}$ $AD = \frac{12 \cdot \sqrt{13x}}{x}$

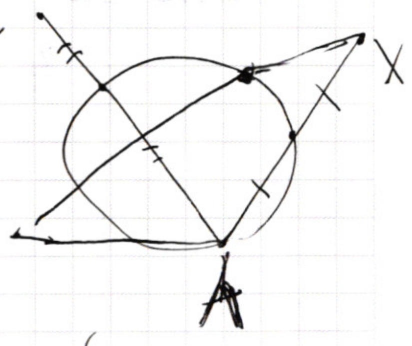
$169 \cdot 13 = 507 + 169 = 2197$

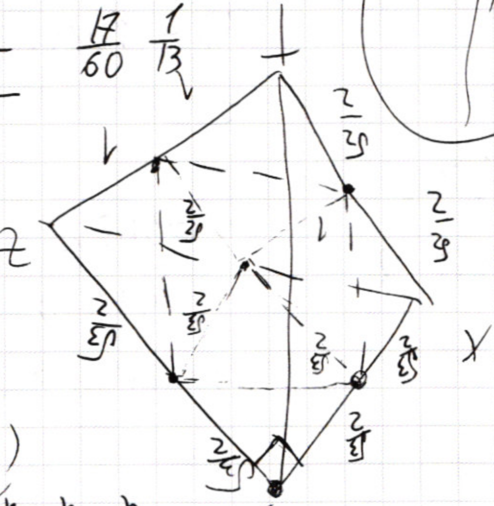
$\frac{1}{12} + \frac{1}{5}$ $\frac{1}{13}$

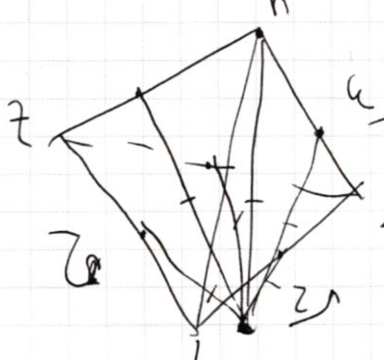
$\frac{17}{60}$ $\frac{1}{13}$

$\frac{65 \cdot 25}{4}$









$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$

$x \ (\frac{2}{3}; 2]$

$\frac{51}{36} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$ $\qquad \frac{4}{3x-2} - 2 \geqslant ax+b \geqslant$

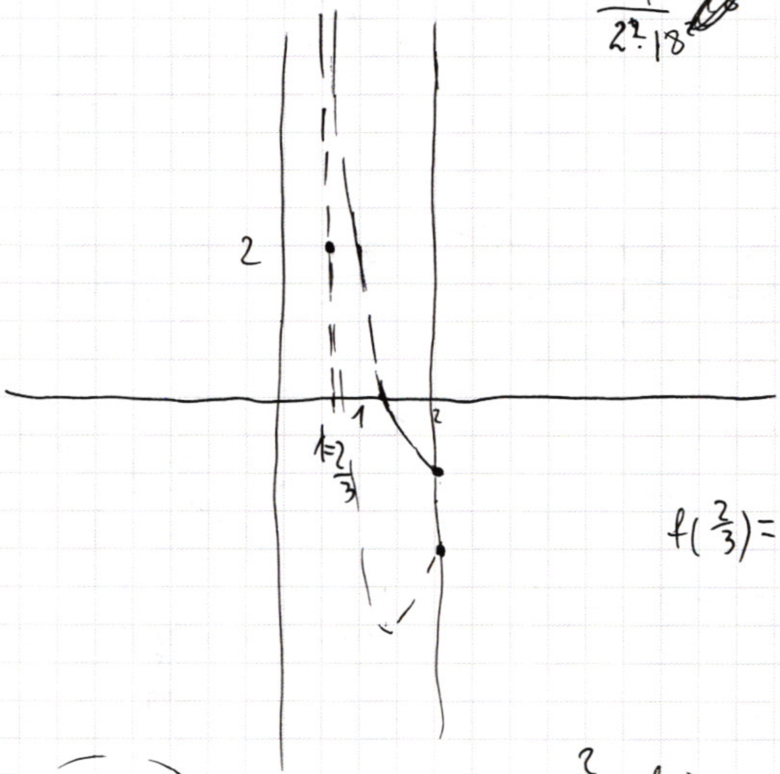
$8-4=4$

$\frac{51}{36}$ $\qquad 18(x - \frac{51}{36})^2 + 28 -$

$\frac{51^2}{2^2 \cdot 18}$

$51^2 - 4 \cdot 18 \cdot 28$

$$\begin{array}{r} \times\ 51 \\ 51 \\ \hline 51 \\ 255 \\ \hline 2601 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 72 \\ 28 \\ \hline 576 \\ 144 \\ \hline 2016 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 2601 \\ 2016 \\ \hline 585 \end{array}$$



$x = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$

$\frac{-4}{4}$

$\frac{3 \cdot 17 \cdot 2}{3}$

$\frac{8}{224 - 324} = -12,5$

$\frac{2 \cdot 18 \cdot 17^2}{4 \cdot 3^2} - \frac{3 \cdot 17 \cdot 17}{3 \cdot 4} + 28 = \frac{17^2}{4}(\frac{1}{2} - 1) = -\frac{17^2}{8} + 28$

$f(\frac{2}{3}) = 8 - 34 + 28 = 2$

$72 - 102 + 28 =$

$=$

$a \cdot \frac{2}{3} + b \geqslant 2$

$-1 \geqslant 2a + b \geqslant -2$

$2a + 3b \geqslant 2$

$-1 \geqslant 2a + b \geqslant -2$

$2b - 1 \geqslant 2a + 3b \geqslant 2b - 2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)