МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

1). $x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

2). $x^2+36y^2-12x-36y=45$

$(x^2-12x+36)-36+(36y^2-36y+9)-9=45$

$\Rightarrow (x-6)^2+(6y-3)^2=45+45$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

Пусть $x-6=a$; $2y-1=в$

$\Rightarrow x-12y=(x-6)-(12y-6)=a-6в$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-6в=\sqrt{aв} & (1) \\ a^2+9в^2=90 & (2) \end{cases}$$

1). $aв\geq 0$; $\boxed{a-6в\geq 0}$ – ООУ.

Возв. в квадрат

$a^2+36в^2-12aв=aв$

$a^2-13aв+36в^2=0$ $/ : в^2\neq 0$.

Допустим $в=0 \Rightarrow aв=0 \Rightarrow a-6в=0$; $a=0$.

НО! подставим во второе: $0+0\cdot 9=0 \Rightarrow в=0$ – не явл. корнем

$\left(\frac{a^2}{в^2}\right)-13\left(\frac{a}{в}\right)+36=0$. Пусть $\frac{a}{в}=t$; $t\geq 0$ $(aв\geq 0)$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$D = 169 - 36 \cdot 4 = 25$

$\frac{13 \pm 5}{2} = \left[\begin{array}{l} 9 \\ 4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4b \quad (1) \\ a = 9b \quad (2) \end{array}\right.$

1). $a = 4b$

$(4b)^2 + 9b^2 = 90$

$16b^2 + 9b^2 = 90$

$\Rightarrow b^2 = \frac{90}{25}$

$b^2 = \frac{18}{5} \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

$\Rightarrow 2y - 1 = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\Rightarrow y = \frac{\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}$

$\Rightarrow a = 4b = \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\Rightarrow x - 6 = \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$x = \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}} + 6$

(x, y): $\left(6\left(2\sqrt{\frac{2}{5}} + 1\right); \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}\right)$; $\left(6\left(1 - 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right); \frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}\right)$

2). $a = 9b$.

$(9b)^2 + 9b^2 = 90 \quad | : 9$

$9b^2 + b^2 = 10$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$

$\Rightarrow 2y - 1 = \pm 1 \Rightarrow y = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right.$

$x - 6 = \pm 9 \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} -3 \\ 15 \end{array}\right.$ $\Rightarrow (x, y)$: $(-3; 0)$; $(15; 1)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что в каждом из случаев $ab \geq 0$ – выполн., т.к. a и b – одинаковых знаков.

Однако необходимо проверить $a - 6b \geq 0$.

1). $a = 4b \Rightarrow -2b \geq 0$

$b \leq 0. \Rightarrow$ подх. только отриц. значение b.

2). $a = 9b \Rightarrow 9b - 6b = 3b \quad 3b \geq 0$

$\Rightarrow b \geq 0. \Rightarrow$ подх. значения $b \geq 0$.

$\Rightarrow b_1 = -\sqrt{\frac{18}{5}}$

$b_2 = 1. \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6\left(1 - 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

$y_1 = \frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}$

$x_2 = 15$

$y_2 = 1$

Ответ: $\left(6\left(1-2\sqrt{\frac{2}{5}}\right); \left(\frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2}\right)\right)$; $(15; 1)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3.

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2) + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ООН:

$10x - x^2 > 0$

$\Rightarrow \quad x(10-x) > 0 \quad x \in (0; 10)$

$\Rightarrow x^2 - 10x < 0$

$(10x - x^2) > 0 \quad | \cdot (-1)$

$x^2 - 10x < 0.$

$\Rightarrow$ Модуль всегда открывается с обратным знаком.

Пусть $10x - x^2 = t$, $t > 0$

$t + |-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$\Rightarrow t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

Заметим, что $t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$ (по св-ву логар.)

Док-во:

$t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$ | Пролог. по $\log_d$ (обе части >0)

$\log_d t \cdot \log_3 4 = \log_3 t \cdot \log_d 4 \quad | : (\log_d t \cdot \log_3 t)$

$\frac{\log_3 4}{\log_3 t} = \frac{\log_d 4}{\log_d t}$

$\Rightarrow \log_t 4 = \log_t 4$ — верно при любых t при области определения.

Из этого же св-ва следует, что $t^{\log_3 3} = 3^{\log_3 t}$

$\Rightarrow$ При замене получим:

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$; Пусть $\log_3 t = в.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^b + 4^b \geq 5^b$

1). $b<0$.

Заметим, что $b=-a$, $a>0$.

Тогда $\frac{1}{4^a} \geq \frac{1}{5^a}$ при любом a, т.к.

$5^a > 4^a$ при любом $a>0$. $\Rightarrow$

$3^b+4^b \geq 5^b$ – выполняется точно при $b>0$.

2). $b=0$.

$3^0+4^0=2$ $5^0=1$ $\Rightarrow$ при $b=0$ – выполн.

3). $b>0$.

$5^b \geq 4^b$ $5^b \geq 3^b$. Заметим, что 5^b – возрастает быстрее $\Rightarrow$ в какой-то точке 5^b будет равна 3^b+4^b, а затем ~~будет~~ ~~на~~ т~~очек~~,

$5^b > 3^b+4^b$ при таких b.

Пример: $b=3$

$125 > 27+64$ и т.д.

Такое касание произойдет в т. $b=2$

$3^2+4^2=5^2 \Rightarrow b \in (-\infty; 2]$; $b \leq 2$

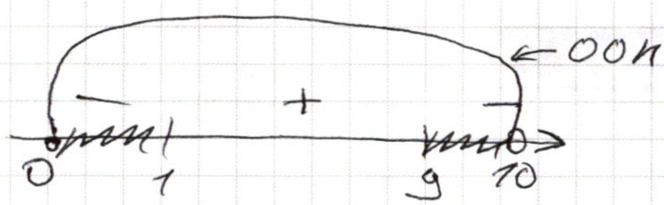
$b=\log_3 t$

$\Rightarrow \log_3 t \leq 2$

$\Rightarrow t \leq 9 \Rightarrow 10x - x^2 \leq 9$

$-x^2+10x-9 \leq 0$ $D=100-9\cdot4=64$

$\frac{-10 \pm 8}{-2} = \left[\begin{matrix}1\\9\end{matrix}\right.$



$\Rightarrow \cancel{x}$

$\boxed{x \in (0;1] \cup [9;10)}$

↑ Ответ:

№1.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$
$= 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\Rightarrow \cos 2\beta = -\frac{2}{5} : (2\cdot\sin(2\alpha+2\beta))$
$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = -\frac{2}{5} : \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cancel{\sin 2\beta = \pm\sqrt{\ldots}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot$
$\cdot\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

1. $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$
$\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② . $\cancel{\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}}$

$\cancel{\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\beta + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\alpha+2\beta)$

$\Rightarrow$ т.к. $|\sin 2\beta| = |\cos(2\alpha+2\beta)| \Rightarrow$

разных значений будет только 3:

$+ + = - -$

$+ - ; - +$

$\Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

③ . $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{6}{5} \Rightarrow$ не подх. $\underline{\sin 2\alpha \geq -1}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \left[\begin{array}{l}\frac{2}{5}\\ -\frac{2}{5}\end{array}\right. \rightarrow \cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{4}{25}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\Rightarrow \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \pm\left(\frac{2}{5} : \frac{\sqrt{21}}{5}\right) = \pm\frac{2}{\sqrt{21}}$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

~~tg~~ $tg\,2\alpha = a$

$\Rightarrow a(1 - tg^2\alpha) = 2\,tg\,\alpha$

$a\,tg^2\alpha - 2\,tg\,\alpha + a = 0$

$D = \cancel{4} \; 1 - a^2$

$\Rightarrow$ ~~tg α =~~

$$tg\,\alpha = \frac{1 \pm (1 - a^2)}{\cancel{2}a} = \left[\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ ~~tg α~~

① $a = \frac{-2}{\sqrt{21}} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1 \pm \left(\frac{21-4}{21}\right)}{-\frac{2}{\sqrt{21}}} =$

$$= \frac{1 \pm \frac{17}{21}}{\frac{-2}{\sqrt{21}}} = \left[\begin{array}{l} -\left(\frac{21+17}{21} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{-19}{\sqrt{21}} \\ -\left(\frac{21-17}{21} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{-2}{\sqrt{21}} \end{array}\right.$$

② ~~tg α~~ $= a = \frac{2}{\sqrt{21}}$

$$\frac{1 \pm \frac{17}{21}}{\frac{2}{\sqrt{21}}} = \left[\begin{array}{l} \frac{19}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{\pm 19}{\sqrt{21}}, \ \frac{\pm 2}{\sqrt{21}}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0.$

$$f\left(y^2 \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y^2) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow f(y) = f(y^2) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(y^2) = f(y) + f(y)$$

$$\Rightarrow f(y) - 2f(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$$

Тогда, получаем, что

$$f(x) - f(y) < 0$$

$\Rightarrow$ y задает число $p_{y_1} \cdot p_{y_2} \cdot p_{y_3}$; x — число $p_{x_1} \cdot p_{x_2} \cdot p_{x_3} \ldots$

$$\Rightarrow \cancel{p} \left[\frac{p_{y_1}}{4}\right] + \cancel{\left[\frac{p_{y_2}}{4}\right]} + \cancel{\left[\frac{p_{y_3}}{4}\right]} \ldots > \left[\frac{p_{x_1}}{4}\right] + \cancel{\frac{p_{x_2}}{4}}$$

$$\left[\frac{p_{y_1}}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{p_{y_n}}{4}\right] > \left[\frac{p_{x_1}}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{p_{x_n}}{4}\right]$$

$\Rightarrow$ Для ~~$x \,\vdots\, 4$; — автоматически подходят~~

~~$x=4 \Rightarrow y=$~~ Рассмотрим ~~в~~ подходящие y для каждого x:

$x = 2$:

$\left[\frac{2}{4}\right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{p_y}{4}\right] > 0$ — подх., а также подходят любые их перемножения

$\Rightarrow$ ~~$y=4; 5; 6; 7;$~~ $p_y = 4$ — не подх., т.к.

$f(4) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 0 + 0 = 0.$

$\Rightarrow$ ~~$p_y = 5; 7;$~~ $y = 5n;\ 7n\ (n \in \mathbb{Z});\ 11n;\ 13n;$
$17n;\ 19n;\ 22n;\ 23n;$

т.к. $x = 3$ ~~и~~ — тоже $f(x) = 0 \Rightarrow$ все эти знач. подходят и для него.

$(2; 5); (2; 10); (2; 15); \dots$

~~Пусть слева значения для каждого y, справа подходящие x:~~

~~$f(1) = 0$; $f(2) =$~~

$f(2) = 0$
$\to$ прост.
$f(3) = 0$
$\to 2^2$
$f(4) = 0$
$\to$ прост.
$f(5) = 1$
$\to 3 \cdot 2$
$f(6) = 0$
$\to$ прост
$f(7) = 1$
$\to 2^3$
$f(8) = 0$
$\to 3^2$
$f(9) = 0$
$\to 5 \cdot 2$
$f(10) = 1$
$\to$ прост
$f(11) = 2$
$\to 3 \cdot 2^2$
$f(12) = 0$
$\to$ прост
$f(13) = 3$
$\to 7 \cdot 2$
$f(14) = 1$
$\to 5 \cdot 3$
$f(15) = 1$

$\to 2^4$
$f(16) = 0$
$\to$ прост.
$f(17) = 4$
$\to 3^2 \cdot 2$
$f(18) = 0$
$\to$ прост.
$f(19) = 4$
$\to 5 \cdot 2^2$
$f(20) = 1$
$\to 7 \cdot 3$
$f(21) = 1$
$\to 11 \cdot 2$
$f(22) = 2$
$\to$ прост.
$f(23) = 5$
$\to 6 \cdot 4 = 3 \cdot 2^3$
$f(24) = 0$
$\to 5 \cdot 5$
$f(25) = 2$

$\to$ для каждого из значении $x \to$ соответствует опр. значение y. $\to$ запишем их по порядку.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1). x – любое целое из промежутка:

$[2; 4] \cup \{6\} \cup [8, 9] \cup \{12\} \cup \{16\} \cup \{18\} \cup \cup \{24\})$

y – любое целое от 2 до 25, но ~~не рав~~ $x \neq y$;

2). $x \in \{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21\}$

$y \in \{2, \ldots, 25\}$ исключая $x = y$,

а также все предыдущие значения x из 1 промежутка.

3). $x \in \{11, 25\}$

$y \in \{13; 17; 19; 23\}$

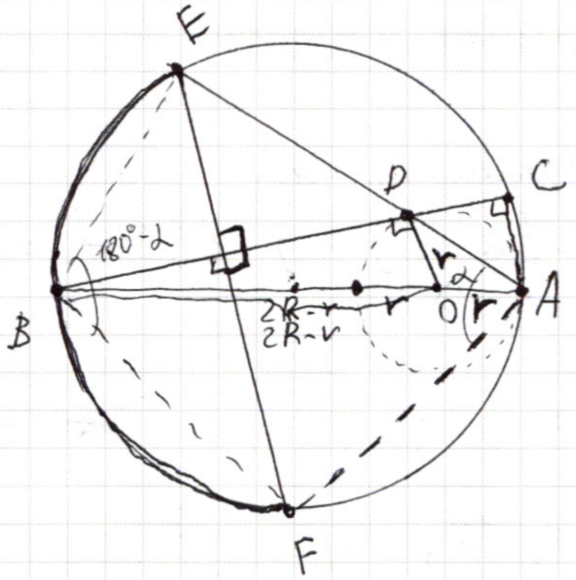
4). $x \in \{13\} \to y \in \{17; 19; 23\}$

5). $x \in \{17; 19\} \to y \in \{23\}$

Ответ: записан в виде рассмотрение 5 случаев.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4.



Пусть O – центр окр. ω => $\triangle BDO$ – п/у, т.к. BD – касательная.

$\triangle BCA$ – п/у, т.к. ~~B~~ опир. на диаметр окр. Ω

$\triangle BCA \sim \triangle BDO$:

по 2-ум углам:

$\left.\begin{matrix}\angle B \text{ – общий} \\ \angle \cancel{B} = \angle C = 90^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ r – радиус ω, R – радиус Ω

Тогда:

$$\frac{2R}{2R-r} = \frac{BD+CD}{BD} \Rightarrow \frac{2R}{2R-r} = \frac{\frac{15+17}{2}}{\frac{17}{2}} = \frac{32}{17}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{64}{17}R - \frac{32}{17}\cancel{R}r$$

$$\Rightarrow \frac{32}{17}r = \left(\frac{64}{17}-2\right)R$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{30}{17} : \frac{32}{17}\right)R \Rightarrow r = \cancel{3}\frac{15}{16}R$$

Тогда по т. о касат. и секущей:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По т. о касат. и секущ.: (для окр. ω)

~~$BD^2 = (R-r)(2R)$~~

~~$BD^2 = \frac{1}{16} \cdot 2^2 \cdot R \Rightarrow \frac{R}{8} = BD^2 \Rightarrow R = \frac{27^2}{4} \cdot 8 = \frac{17^2}{2} = \frac{289}{2}$~~

~~$\Rightarrow r = \frac{289}{2} \cdot \frac{15}{16} = \frac{289 \cdot 15}{32} = \frac{4335}{32}$~~

~~$R = \frac{289}{2}$~~

~~$r = \frac{4335}{2}$ Ответ:~~

$BD^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$\Rightarrow BD^2 = \left(2R - \frac{30}{16}R\right) \cdot 2R$

$\Rightarrow \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}R^2 \cdot 2 \Rightarrow \frac{17^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot R^2 \Rightarrow \boxed{R = 17}$

$\boxed{r = \frac{17 \cdot 15}{16} = \frac{255}{16}}$

~~Ответ~~

2). ~~$\angle AFE$ опир.~~ на ~~$\smile FE$~~

~~$\angle AFF$ опир. на дугу $\smile AF$~~

~~$\angle C = \smile AB$~~

~~$\smile EF = 2\alpha$; $\smile BE = \angle BAE$~~

~~$\smile EF = 2\alpha$, $= \angle A$~~ ~~$\smile BF = \smile EC$~~ (верт. углы)

~~$\Rightarrow \angle EC = 180° - 2\angle A - 2\angle B = 90° - \angle A$~~

$\smile EC = \smile BF$ (верт. углы)

$\Rightarrow \smile BF = \smile AB - \smile CA - \smile BE =$

$= 180° - 2\angle A - 2\angle B$

$\angle A$ – в $\triangle BDA$; $\angle B$ – в $\triangle BCA$.

$\Rightarrow \smile EF = \cancel{\smile BF} \smile BE + \smile AB - \smile CA - \smile BE =$

$= \smile AB - \smile CA.$

$\Rightarrow \cancel{\angle BF}$ $\cos\angle B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{16}{17}.$

$\Rightarrow \angle A = \dfrac{180° - \arccos\frac{16}{17}}{2} = 90° - \arccos\frac{16}{17}$

~~Ответ: $R = 17$; $r = \frac{255}{16}$; $\angle AF$~~

$\smile EA = \smile AB - \smile BE$

$\smile BE = 2\angle A$ в $\triangle BDA$

~~cos~~ $\cancel{BD^2 = 4R^2 +}$ $\Rightarrow \cancel{\angle AEF = \frac{\smile EA}{2}}$

$\angle A$ $\cancel{\angle AFE = \frac{\smile EA}{2}}$

~~DA =~~

$\boxed{\text{Ответ: } 17;\ \frac{255}{16}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$$\left(\frac{16x-16}{4x-5}\right)' = \frac{64x-64x-90+64}{(4x-5)^2} = \frac{-26}{(4x-5)^2} < 0.$$

$\Rightarrow$ ф-ия всегда убывает

$f\left(\frac{1}{4}\right)=3$

$f(1)=0$

$-32x^2+36x-3=0$

$x=-\frac{b}{2a}=\frac{-36}{-2\cdot 32}=\frac{9}{16}$

$\Rightarrow f\left(\frac{9}{16}\right)=6 \qquad f\left(\frac{1}{4}\right)=4$

$f(1)=1.$

~~$\Rightarrow$ для~~ Заметим, что

$-32x^2+36x-3=f(x)$

$\frac{16x-16}{4x-5}=g(x) \to g(x)<f(x)$ на всем промежутке.

$\Rightarrow$ для выполн. условия достаточно, чтобы $ax+b$ не превышала максимального значения $f(x)$, но была больше миним. значения $g(x)$

$$\begin{cases} ax+b \geq f(x) \\ ax+b \geq g(x) \end{cases}$$

~~ax+b≥~~ $f(x) > g(x)$ на всём промежутке

$$\begin{cases} ax+b \geq 6 \\ ax+b \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \geq 3 \\ a+b \leq 6 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &a \geq 3-b \\ &3-b+b \leq 6 \\ &3 \leq 6. \end{aligned}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha = \cos\alpha \cdot \sin\alpha.$

$\Rightarrow \quad tg 2\alpha = \frac{\cancel{1} tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{\cancel{(1-tg\alpha)}}{(\cancel{1-tg\alpha})\cancel{(1+tg\alpha)}} =$

$=$

$$tg 2\alpha = \frac{\cancel{\cos}\ \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha \,/\, \cos^2\alpha}{-(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)} = \frac{2\, tg\alpha}{-(tg^2\alpha - 1)} = \frac{2 tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0.$

$f\left(y^2 \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y^2) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(y) - f(y^2) = f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(y^3 \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y^3) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(y^2) - f(y^3) = f\left(\frac{1}{y}\right)$

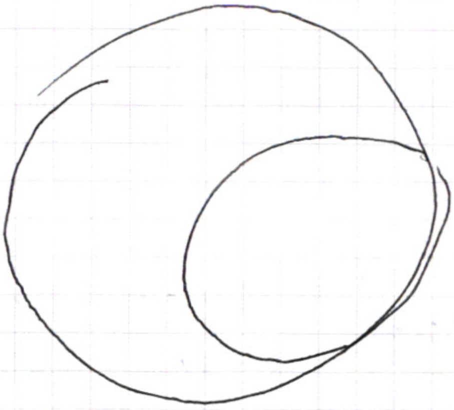
$f(y) \cancel{+ f(y)} - f$

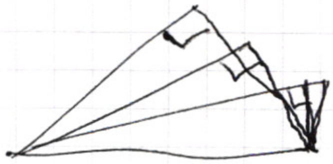
☑ черновик ☐ чистовик

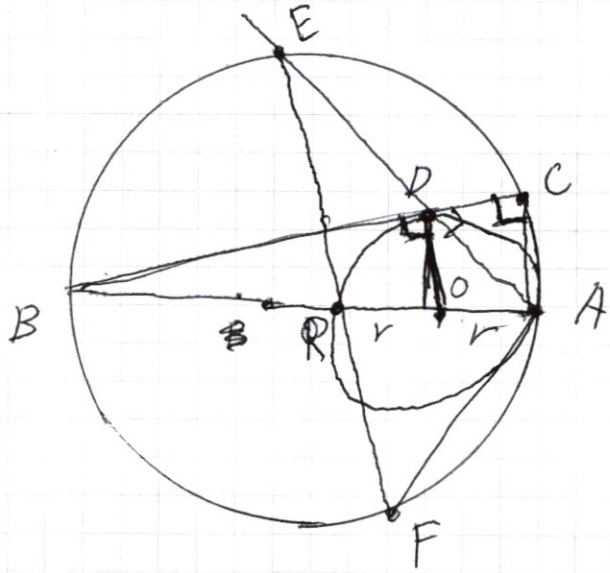
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)







$BD^2 = BR \cdot \cancel{BA}\, AB$

BP

$\cancel{CA}$ $\cancel{DO}$

$$\frac{R}{R-r} = \frac{\cancel{CA}}{\cancel{R}} = \cancel{BD}\,\frac{R}{CA} =$$

$$= \frac{BD+DC}{BD}$$

$\times\ 289$
15
1445
$+\ 289$
4335

$$\frac{2R}{2R-r} = \frac{32}{17}$$

$$2R = \frac{64}{17}R - \frac{32}{17}R$$

$$\frac{64-34}{17}R = \frac{32}{17}r$$

$$\frac{30}{17}R =$$

$170+85+34=$

$=255+34=289$

2~~890+1~~

$170+85=255$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{3}\ 5^b - 4^b - 3^b = f(b)$

$f'(b) = \cancel{\log_3} \ln_5 \cdot 5^b - \ln_4 4^b - \ln_3 3^b = 0.$

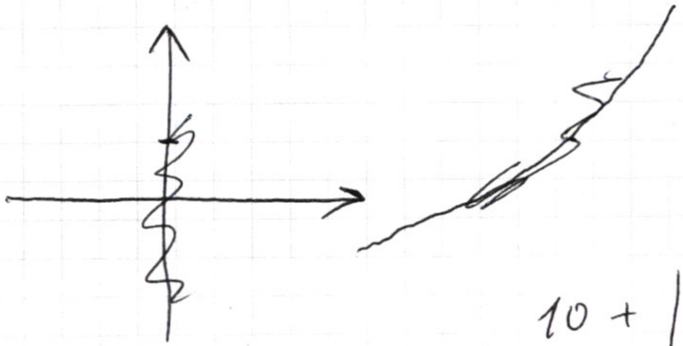
$b = 2$ — равен 0.

при $b = -2$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{9} = \frac{9+16}{16\cdot 9} = \frac{25}{16\cdot 9}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

$\frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$; $\frac{25}{16\cdot 9}$ $\frac{1}{25}$



$\frac{1}{4^b} \geq \frac{1}{5^b}$

$10 + |1 - 10|^{\log_3 4} \geq 1 + 5^{\log_3(9)}$

$9 + 9^{\log_3 4} \geq 5^2$

$9\ \cancel{8+}\ 9^{\log_3 4} \geq 25$

$90 + |\cancel{10}\cdot 81 - 90|^{\log_3 4} \geq 81 + 5^{\log_3 9}$

$9 + 9^{\log_3 4} \geq 5^2$ $\qquad 9^{\log_3 4} = 4^{\log_3 9} =$

$9^{\log_3 4} \vee 16$ Пролог. по 3

$2 \cdot \log_3 4 \vee \log_3 16$

$$-32x^2+36x-3 \geq \frac{16x-16}{4x-5}$$

$$-32x^2+36x-3-\frac{16x-16}{4x-5} \geq 0.$$

~~18~~

$360-36=$

$=324$

$$-(32x^2+36x-3)(4x-5)$$

$$\frac{D}{4} = 18^2 - 3\cdot 32 = 324-96 = \underline{228}$$

$x = \frac{9}{16}$

$$\frac{16\cdot\frac{9}{16}-16}{4\cdot\frac{9}{16}-5} = \frac{9-16}{\frac{9}{4}-\frac{20}{4}} = \frac{-7\cdot 4}{-11} = \frac{28}{11} \approx 2,5\ldots$$

$-32+36-3$

$$-32x^2+36x-3 = -\frac{16x-16}{4x-5}$$

~~$\cos 2\beta = \frac{1}{\ldots}$~~

$$f(4)=f(2)+f(2)=2.$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow f(x)-f\left(\frac{1}{y}\right)<0.$$

$$f(y)=f(y^2)+f\left(\frac{1}{y}\right)= \cancel{f(y)} -$$

$$\cancel{f(y)=f(y)}+f(y)+\cancel{8}\, f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$$

$f(y)-0.$ $\qquad f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y).$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{16(x-1)}{4x-5}\right)' = \frac{16(4x-5)-4(16(x-1))}{(4x-5)^2} =$$

$$= \frac{64x-90-64x+64}{\ldots} = \frac{-\ldots}{(\ldots)^2}$$

$$-32\cdot\frac{1}{16}+\frac{36}{4}-3=$$

$$\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3 \quad -\ldots \quad \ldots$$

$$= -2+9-3=$$

$$\cancel{4}\ 0, \qquad (0;3) \qquad = 4$$

$$-32x^2+36x-3=0$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$\cancel{-32+} \quad \cancel{-32\cdot\frac{9}{21}+36\cdot\frac{9}{21}+} \qquad -32+36-3=$$

$$=1.$$

$$-32\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2+36\cdot\left(\frac{3}{7}\right)-3=$$

$$= \frac{-32\cdot 9}{49}+\frac{36\cdot 3}{49}-\frac{3\cdot 49}{49} = \qquad (6;7)$$

при $\frac{1}{4}$

$$= \frac{-198+108}{49}-3 = \cancel{\frac{-90}{49}-3} = \qquad -32\cdot\frac{1}{16}+\frac{36}{4}-3=$$

$$= -2+9-3 = 4$$

$$-32x^2+36x-3=0$$

$$x = -\frac{36}{-64} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16} =$$

$$-32\cdot\frac{9^2}{16^2}+\frac{36\cdot 9}{16}-3 = \frac{-32\cdot 9\cdot 9+36\cdot 9\cdot 16}{16^2}-3=$$

$$= \frac{9\cdot\cancel{16}(-18+36)}{\cancel{16^2}\ 16} = \frac{16\cdot 9}{16} = 9-3 = 6.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\frac{16(x-1)}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

$$\frac{16x-1}{4x-5} \leq -32x^2+36x-3$$

№1.

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\left(\sin(2\alpha+2\beta)\cdot \cos(2\beta)\right) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5} \quad | \cdot \sqrt{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$\rightarrow$ ~~$\sin 2\alpha$~~ $=$

$$2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\arcsin\left(\pm\frac{\sqrt{24}}{5}\right)+\pi n}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta +$$
$$+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha$$

№3.

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x - x^2 > 0 \quad | \cdot (-1) \Rightarrow x^2 - 10x < 0.$$

$\Rightarrow$ ~~$x^2 < 10x$~~

$$10x + (10x)^{\log_3 4} - x^{2\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 \ldots}$$

~~$(10x)^2 (1 \ldots$~~ $$10x - x^2 + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 \ldots}$$

$\Rightarrow$ Пусть $10x - x^2 = t$; $t > 0$.

$$\Rightarrow t + |-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

$10x - x^2 > 0$ $\Rightarrow x \in (0; 10)$

$x(10-x) > 0$ — + — (0, 10)

$$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

$$t(1 + t^{\log_3 4 - 1}) \geq 5^{\log_3 t}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$t + t^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 t}$ $\quad 5^x - (4^x + 3^x) \geqslant 0.$

$a^{\log_3 b} = b^{\log_3 a}$? / Пролог.

$t + 4^{\log_3 t} \geqslant \cancel{5t}$ $\log_3 t$ a

$\Rightarrow 5$ $\quad 9^{\log_3 3} = 3^{\log_3 9} =$ сходится

$5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t} \geqslant t$

$5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t} - 3^{\log_3 t} \geqslant 0$ $\quad \cancel{a^{\log_3 b}} \cancel{b^{\log_3 a}} =$ $\quad 27^{\log_3 3} = 3^{\log_3 27} = 3$

$5^x - 4^x - 3^x \geqslant 0.$

$5^x - (4^x + 3^x) \geqslant$ $\log_3 b \cdot \log_5 a = \log_3 a \cdot \log_5 b$

$25 - 25 \geqslant 0.$ $\quad \dfrac{\log_3 b}{\log_3 a} = \dfrac{\log_5 b}{\log_5 a}$

$\dots$

$125 - (64 + 27)$ $\quad t^{\log_3 3} = 3^{\log_3 t}$

$5^x - (4^x + 3^x) \geqslant 0$ $\quad \log_a b = \log_a b$

$\Rightarrow t + t^{\log_3 4} \geqslant t^{\log_3 5}$ $\quad / : t$

$1 + t^{\log_3 4 - 1} \geqslant t^{\log_3 5 - 1}$

$\Rightarrow t^{\log_3 5 - 1} - t^{\log_3 4 - 1} \geqslant 1$

$(\log_3 5 - 1 - \log_3 4 + 1)(t - 1)$

$t^a - t^b \geqslant 1$

$a^2 - a \geqslant 1$ $\quad \dfrac{h^f - h^g \geqslant 1}{\Rightarrow f - g \geqslant 1}$

$a(a-1) \geqslant 1$

$h \geqslant 1.$

$f\,g \geqslant 1.$ $\quad 1{,}5^2 - 1{,}5 =$

$\cancel{h^f(1 - h^{f-g}) \geqslant 1.}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)-45=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$x-6-(2y-1)\cdot 6=$

$=x-6-12y+6=$

$=x-12y$

$x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

Пусть $x-6=a$, $2y-1=b$

$\Rightarrow \begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

$\boxed{a-6b\geq 0}$

$\Rightarrow ab=(a-6b)^2$

$\Rightarrow ab=a^2+36b^2-12ab$

$a^2-13ab+36b^2=0 \quad /:b^2$ $(b\neq 0)$ - проверка отдельно!

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\left(\frac{a}{b}\right)+36=0$

$\frac{a}{b}=t$

$t^2-13t+36=0$

$D=169-36\cdot 4=25$

$\frac{13\pm 5}{2}=\left[\begin{array}{l}9\\4\end{array}\right.$

$a=9b$

$a=4b$

$15-24=\sqrt{(4-1)(15-6)}$

$15-12=\sqrt{(2-1)(15-6)}=3$

1). $a = 4b$

$16b^2 + \cancel{}9b^2 = 90$

$b^2 = \frac{90}{25}$ $b = \pm\sqrt{\frac{90}{25}}$ $\Rightarrow a = \ldots$

2). ~~b~~

№3.

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha + 2\beta) + \sin(2\alpha + 4\beta) = 2 \cdot \sin\frac{2\alpha + 2\beta + 2\alpha + 4\beta}{2} \cdot \cos\frac{2\alpha + 2\beta(+2\alpha - 4\beta)}{2}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) < 0$!

$\sin^2(2\alpha + 2\beta) = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \frac{1 - \cos(4\alpha + 4\beta)}{2} = \frac{1}{5} \Rightarrow 1 - \cos\ldots = \frac{2}{5}$

$\frac{3}{5} = \cos(4\alpha + 4\beta)$

~~$\cos(4\alpha + 4\beta) =$~~