МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=-\frac{8}{17}$

$\begin{cases}2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}\\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos 2\beta=-\frac{8}{17}\cdot(-\sqrt{17})$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}\Rightarrow \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\pm\sqrt{\frac{1}{17}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l}\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\beta\\ \sin(2\alpha+2\beta)=\sin(-2\beta)\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}2\alpha+2\beta=2\beta+2\pi n\\ 2\alpha+2\beta=\pi-2\beta+2\pi n\end{array}\right\}\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \left.\begin{array}{l}2\alpha+2\beta=-2\beta+2\pi n\\ 2\alpha+2\beta=\pi+2\beta+2\pi n\end{array}\right\}\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.,\ n\in Z$

$\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\alpha=\pi n\\ \alpha=\frac{\pi}{2}-2\beta+\pi n\end{array}\right\}\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \left.\begin{array}{l}\alpha=-2\beta+\pi n\\ \alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right\}\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.,\ n\in Z$

$\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}tg\,\alpha=tg\,\pi n,\ n\in Z\\ tg\,\alpha=tg\left(\frac{\pi}{2}-2\beta+\pi n\right)\end{array}\right\}tg\,2\beta=-\frac{1}{4}\\ \left.\begin{array}{l}tg\,\alpha=tg(-2\beta+\pi n)\\ tg\,\alpha=tg\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\end{array}\right\}tg\,2\beta=\frac{1}{4}\end{array}\right.,\ n\in Z$

$(2,6r)^2 - r^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$(5,2 + 1,56)r^2 - r^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$5,76r^2 = \frac{13^2}{4}$

$r = \sqrt{\frac{13\cdot 1}{2\cdot 2,4}}$

$r = \sqrt{\frac{13}{4,8}} \Rightarrow R = 1,8\cdot\sqrt{\frac{13}{4,8}} = \sqrt{\frac{13\cdot 81\cdot 0,04}{4,8}} = \frac{3}{2}\sqrt{3,9}$

4) $\cos\angle DOK = \frac{OD}{OB} = \frac{r}{2,6r} = \frac{1}{2,6} = \cos(\angle OAD + \angle ODA)$,

а $\begin{cases} OD \perp CB \\ AC \perp CB \end{cases} \Rightarrow OD \parallel AC \Rightarrow \angle CAE = \angle ADO$, $\triangle OAD$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle OAD + \angle ODA = 2\angle CAE$

$\Rightarrow \cos(2\angle CAE) = \frac{1}{2,6} \Rightarrow 2\cos^2\angle CAE - 1 = \frac{1}{2,6}$

$2\cos^2\angle CAE = \frac{36}{26}$

$\cos^2\angle CAE = \frac{36}{4\cdot 13}$

$\cos\angle CAE = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEF = \angle CAE = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

5) $AD = 2r\cdot\cos\angle ODA = 2r\cdot\cos\angle CAE = \sqrt{\frac{13}{4,8}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} =$

$= \sqrt{\frac{9}{4,8}} = \sqrt{\frac{3}{1,6}} = \frac{1}{2}\sqrt{30}$, а $AD\cdot DE = CD\cdot DB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{30}\cdot DE = \frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2}$

$DE = \frac{13\cdot 5}{\sqrt{30}\cdot 2}$

$DE = \frac{65}{2\sqrt{30}} \Rightarrow AE = \frac{65}{2\sqrt{30}} + \frac{30}{2\sqrt{30}} = \frac{95}{2\sqrt{30}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DE}{\sin\angle AFE} = 2R$

$\cancel{\frac{95}{2\sqrt{30}}\sin\angle AFE = \frac{95}{2\sqrt{30}}\cdot 1,8\cdot\sqrt{\frac{13}{4,8}} = 95\cdot 0,9\cdot\sqrt{\frac{13}{9\cdot 16}} =}$

$\cancel{= 95\cdot 0,3\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{13} = \frac{285}{4}\sqrt{13} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{285}{}}$

$= \frac{95}{2\sqrt{30}}\cdot\sqrt{\frac{4,8}{13}}\cdot\frac{1}{3,6} = \frac{95\cdot 2\cdot\sqrt{0,3}}{2\cdot 1,8\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt{13}} =$

$= \frac{95}{1,8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{19}{3,6\sqrt{13}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{19}{3,6\sqrt{13}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = ctg(2\beta),\ tg2\beta = -\frac{1}{4} \\ tg\,\alpha = tg(-2\beta),\ tg\,2\beta = \frac{1}{4} \\ tg\,\alpha \in \varnothing \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -4 \\ tg\,\alpha = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $0, -4, -\frac{1}{4}$

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x + x^2 \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$$

Пусть $t = \log_4(x^2+6x)$, то:

$3^t + 4^t \geq 5^t$

$3^2 \cdot 3^{t-2} + 4^2 \cdot 4^{t-2} \geq 5^2 \cdot 5^{t-2}$

$9 \cdot 3^{t-2} + 16 \cdot 4^{t-2} \geq 9 \cdot 5^{t-2} + 16 \cdot 5^{t-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow t-2 \leq 0$

$t \le 2 \Rightarrow \log_4(x^2+6x) \le 2$

$x^2+6x \le 16$

$x^2+6x-16 \le 0$

$x^2+8x-2x-16 \le 0$

$(x+8)(x-2) \le 0$

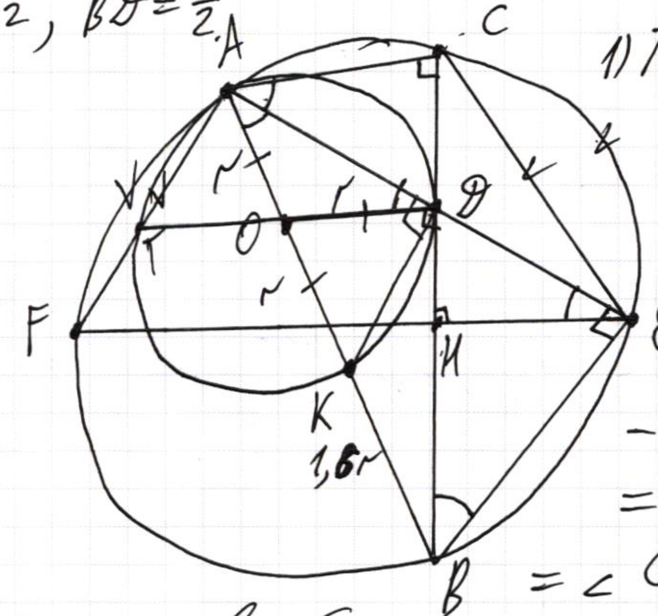
$x \in [-8;2]$, а ОДЗ: $x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$

$\Rightarrow x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

Ответ: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

№4

$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.



1) Пусть $FE \cap CB = H$, $AB \cap \omega = K$, центр $\omega = O$, то $OD \perp CB$, $\angle CBE = \angle CAE$, а $\angle EBC = \angle EBD = 90^\circ - \angle EDH = \angle DEH = \angle AEF \Rightarrow \angle AEF = \angle CBE = \angle CAE \Rightarrow$

$\Rightarrow FACE$ – равнобокая трапеция, $AC \parallel FE$, $CE = FA$.

2) Пусть ~~r – радиус~~ r и R – радиусы ω и Ω соответственно, то: $\angle ACB = \angle ODB = 90^\circ$, $\angle ABC$ – общий $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle ODB \Rightarrow AB : OB = BC : BD = \left(\frac{13}{2}+\frac{5}{2}\right) : \frac{13}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R : (2R - r) = \frac{18}{13}$

$26R = 36R - 18r$

$10R = 18r$

$R = 1{,}8r \Rightarrow KB = 3{,}6r - 2r = 1{,}6r$

3) $\triangle ODB$: $OB^2 - OD^2 = BD^2$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) Проведём $ДО$ до пересечения с ω в т. T. $\triangle АДТ \sim \triangle АЕF$ т.к. получаются при гомотетии $АД \to АЕ$.

$$\begin{cases} АД = \frac{1}{2}\sqrt{30} \\ ТД = 2r = 2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{13}{0,3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{0,3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{130}{3}} \Rightarrow \\ \sin\angle АДТ = \sin\angle АЕF = \sqrt{1-\frac{9}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{АТД} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{130\cdot 10}{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{30}{10}} = \frac{1}{4}\cdot 10 = 2,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S_{АЕF}} = 2,5\cdot\left(\frac{95\cdot 2\sqrt{10}}{2\sqrt{30}\cdot 30}\right)^2 = 2,5\cdot\frac{371}{36} =$$

$$= \frac{3710}{144} = \frac{1855}{72}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{13}{4,8}}$; $1,8\cdot\sqrt{\frac{13}{4,8}}$ и ~~arccos~~ $\arcsin\left(\frac{19}{3,6\cdot\sqrt{13}}\right)$ и $\frac{1855}{72}$.

№6

$y_1 = \frac{4x-3}{2x-2}$

$f_1(x) = y = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$y_1 = 8\left(x^2 - 2\cdot\frac{17}{8}x + \frac{17^2}{64}\right) + 30 - \frac{289}{64}\cdot 8$

$y_2 = 8\left(x - \frac{17}{8}\right)^2 + \frac{240-289}{8}$

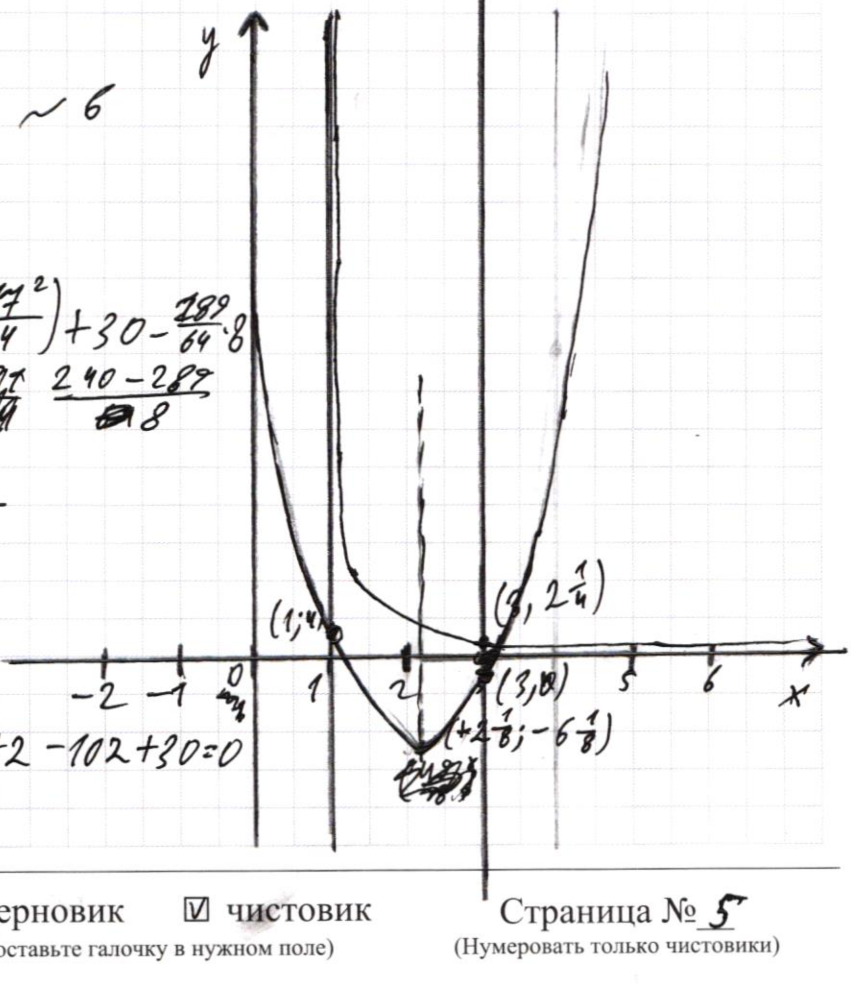
$f_2(x) = y_2 = 8\left(x - \frac{17}{8}\right)^2 - \frac{49}{8}$

$f_1(3) = \frac{4\cdot 3-3}{2\cdot 3-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

$f_1(+1) \to +\infty$

$f_2(3) = 9\cdot 8 - 34\cdot 3 + 30 = 72 - 102 + 30 = 0$

$f_2(1) = 8 - 34 + 30 = 4$



№2

$$\begin{cases}(3y-2x)^2 = 3xy-2x-3y+2\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}9y^2-12xy+4x^2-3xy+2x+3y-2=0 \quad |\cdot 2\\ 3y^2+3x^2-6x-4y-4=0\end{cases}$$

$$15y^2-30xy+5x^2+10x+10y=0 \quad |:5$$

$$\begin{cases}3y^2-6xy+x^2+2x+2y=0\\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0\end{cases}$$

$$x^2+x(2-6y)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

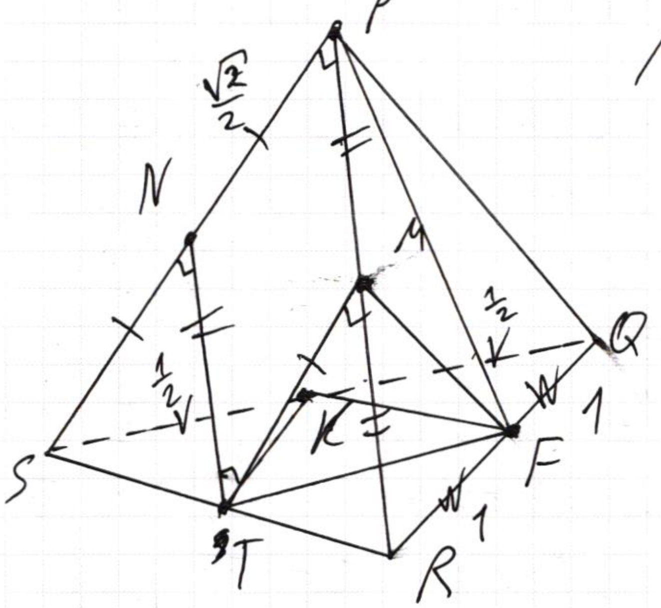
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

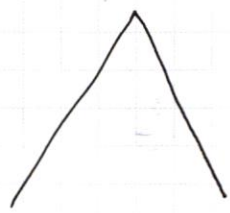
ШИФР

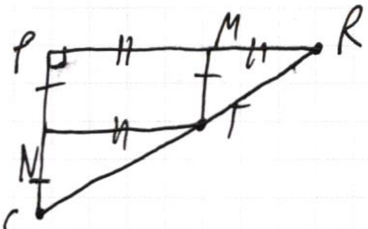
(заполняется секретарём)

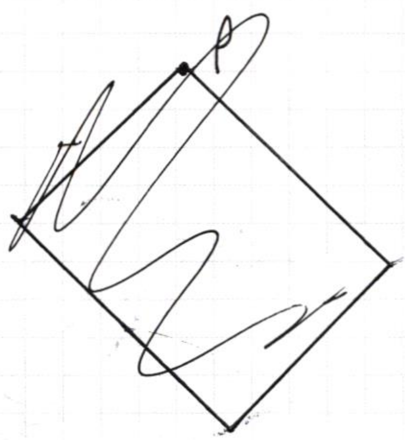
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7









☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$(2\cos^2 2\beta - 1)\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta$

$2\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\underbrace{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha}_{= -\frac{1}{\sqrt{17}}}) = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta = \frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\cancel{\Rightarrow \sin 2\alpha = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cancel{\Rightarrow tg 2\alpha =}$ $tg 2\alpha = \frac{1}{4}$

$32-17$

$\cancel{2\cos^2\beta - 1 = \frac{4}{\sqrt{17}}}$ $17+4\sqrt{17}$

$\cos 4\beta = 2\cdot\frac{16}{17} - 1 = \frac{15}{17}$ $\cancel{2\cos^2\beta = \frac{\sqrt{17}+4}{2\sqrt{17}}}$

$225+64 =$ $\sin 4\beta = \frac{8}{17}$ $\cos^2\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{17}}}$

$tg 2\alpha = \frac{7}{4}$

$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}}$

$\cancel{tg\alpha = \sin\alpha}$ $\cancel{1} - 2\sin^2\beta = \cancel{4-\sqrt{17}}\ \frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{17-4\sqrt{17}}{34}}$

$$\begin{cases} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \frac{8}{17}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 32\sin 2\alpha + 8\cos 2\alpha = -8 \end{cases}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

6

$$\begin{cases} 9y^2-14xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$76 \cdot 9$

$20+64=154$

$-2 \cdot \cancel{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ $$\begin{cases} 4x^2+x(-17y+2)+(9y^2+3y\cancel{-2})=0 \\ 3x^2+x(-6)+3y^2-4y-4=0 \end{cases}$$

$\cancel{D = 289y^2 - 68y + 4 -}$

$\cancel{-154y^2 - 48y + 32 =}$

$\cancel{= 135y^2}$

$3x^2-6x+3$

$3y^2-4y+\frac{4}{3}$

$x(3y-2)-(3y-2)=$

$=(x-1)(3y-2)$

$\cancel{3(x^2}$

$3(x-1)^2 + \cancel{3(y^2-2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot}$

$+\left(3y^2-2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} y + \frac{4}{3}\right) =$

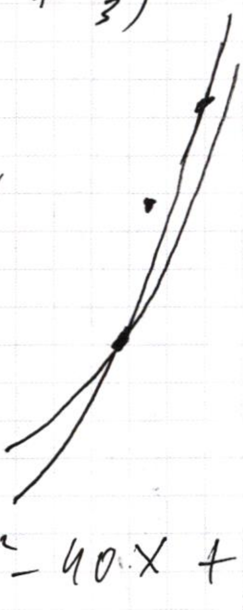
$9 \cdot 3^t + 16 \cdot 4^t <$

$< 25 \cdot 5^t$

$3^t + 4^t = 5^t$

$t \le 0$

$4^t(9+16) < 25 \cdot 5^t$



$\frac{4x-3}{2x-2}$

$8x^2-40x+6x+30$

$32 \cdot 30 =$
$= 960$

$x = \frac{34 \pm 16}{16} =$ $D = 34 \cdot 34 = 1020 + 136 = 1156 - 960 =$

$= 3\frac{1}{8}, 1\frac{1}{8}$. $= 256 = 16^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^x \cdot 3^2 + 4^x \cdot 4^2 = 5^2 \cdot 5^x$ №1 $\quad 3^t + 4^t \geq 5^t \quad 27+64<125$

$2\alpha + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$

$2\alpha + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$

$\begin{cases} 2\alpha = \pi + 2\pi n \\ \alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi n, n \in Z \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi n \end{array}\right., n \in Z$

7

$20+7+6=$

$= 33$

1) $tg\,\alpha = \left[\begin{array}{l} tg\,\frac{\pi}{2} \in \varnothing \\ tg\left(\frac{3\pi}{2}\right) \in \varnothing \end{array}\right.$

2)

$1 \geq a^{\log_4 \frac{5}{4}} - a^{\log_4 \frac{3}{4}}$

№3

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (6x+x^2) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$a^{\log_4 3} + a \geq a^{\log_4 5} \qquad a^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \geq a^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$\log_a(a^{\log_4 3} + a) \geq \log_4 5 \qquad t = a^{\log_4 \frac{3}{5}}$

$\log_a(a$

$0 \geq \log_a(a^{\log_4 \frac{5}{4}} - a^{\log_4 \frac{3}{4}}) \qquad \frac{a^{\log_4 \frac{3}{4}}}{t} = a^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$a + 1 \geq a \cdot t$

$a(t-1) \leq 1 \quad a(1-t)$

черновик ☑ чистовик ☐ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$5(a^{\log_4 3} + a) \geq 5(a^{\log_4 5})$

$\log_a(a^{\log_4 3} + a) \geq \log_4 5$

$\frac{130}{48} =$

$(a^{\log_4 3} + a) \geq 5^{\log_4 a}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{130}{12}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{130}{12}}$

$a \geq 5^{\log_4 a} - 3^{\log_4 a}$

$4^x \geq 5^x - 3^x$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{18}$

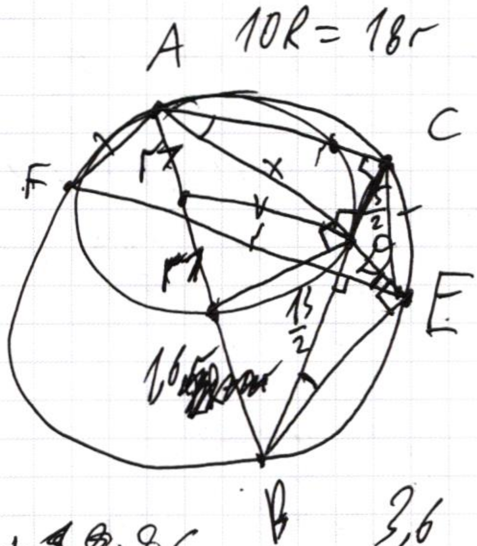
$3^x + 4^x \geq 5^x$

$26R = 36R - 18r$

95

$\frac{2785}{4}$

$10R = 18r$



$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$\frac{x}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{13}{2}}{d}$

$\frac{2d}{13} = \frac{13{,}5}{2x}$

$\frac{\frac{13}{2}}{x} \cdot \frac{5}{2} = d$

$\frac{x}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{13}{2}}{d}$

$12 \cdot 4 = r$

$4{,}8 + 4{,}8 : 36$ $3{,}6$

$2{,}4$ $R = 1{,}8r$

$\frac{2x}{5} = \frac{13d}{2}$ $r = \sqrt{\frac{13}{4{,}8}}$

$1{,}6r \cdot 3{,}6r = \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$r = \sqrt{\frac{13^2}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 3{,}6}}$ $d =$

$= \sqrt{\frac{13}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 6 \cdot 4}}$

$g(x) = -\frac{2}{(2x-2)^2} = a$

$\frac{4x-3}{2x-2}$

$\frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4}$

$\left(2 + \frac{1}{2x-2}\right)' = \frac{-2}{(2x-2)^2} = -\frac{2}{(2x-2)^2}$

$y_1 = ax + b$

$y_1 = 3a + b$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$27\cdot 8-402+30$

$=160+256$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$216-72=144$

$$\ominus\begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \mid \cdot 2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$15y^2-30xy+5x^2+10x+10y=0$

$\frac{4x-3}{2x-2}=$

$3y^2-6xy+x^2+2x+2y=0$

$x^2+x(2-6y)+(2y+3y^2)=0$

$=2+\frac{1}{2x-2}$

$8\cdot 30=240$

$D=4-24y+36y^2-8y-12y^2=$

$=24y^2-32+4=$

$18y-12+6\sqrt{6y^2-8y+1}=\pm\sqrt{68+32y-18y^2}$

$=4\cdot(6y^2-8+1)$

$64\cdot 4=$

$2+\frac{1}{2}$

$x=\frac{6y-2\pm 2\sqrt{6y^2-8y+1}}{2}$

$=256$

$8x^2-34x+30$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$D=36-18y^2+32y+32=$

$\left(8x^2-2\cdot\frac{17}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{8}+\frac{289}{8}\right)-\frac{49}{8}$

$=68+32y-18y^2$

$18y-6\pm 6\sqrt{6y^2-8+1}=\cancel{6\pm\sqrt{68+32y-18y^2}}$

$8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2-\frac{49}{8}$

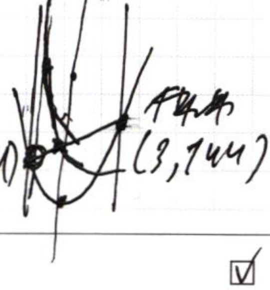
$D=(2-6x)^2-12(x^2+2x)=$

$8-34+30$

$=36x^2-24x+4-$

$-12x^2-24x=$

$=48x^2-48x+4$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)