МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(\cancel{x}\,10x-x^2)}$

ОДЗ:
$10x-x^2>0$
$|x^2-10x|>0$

$|10x-x^2|^{\log_3 4} \geq -(10x-x^2)+\underbrace{3^{\log_3(10x-x^2)\cdot\log_3 5}}_{10x-x^2}$ обозначим $10x-x^2=t$

ОДЗ:
$t>0$

$|t|^{\log_3 4} \geq -t+t^{\log_3 5}$

$t+|t|^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$ т.к $t>0$, $|t|=t$

$3^n+3^{n\cdot\log_3 4} \geq 3^{n\cdot\log_3 5}$ обозначим $t=3^n$

$3^n+4^n \geq 5^n$ $:4^n \neq 0$

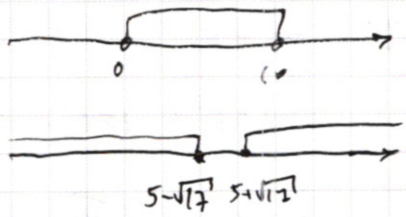
$\left(\frac{3}{4}\right)^n+1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^n$

при $n=2$ достигается равенство; т.к $\left(\frac{3}{4}\right)^n+1$ убывает, а $\left(\frac{5}{4}\right)^n$ возрастает $\forall n \Rightarrow$ $\boxed{n \leq 2}$

$t=3^n$ $\log_3 t=n \leq 2$

$\log_3 t \leq 2$ $t \leq 8$; ($t>0$ ОДЗ)

$\begin{cases} 10x-x^2>0 \\ 10x-x^2 \leq 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 0<x<10 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 5-\sqrt{17} \\ x \geq 5+\sqrt{17} \end{array}\right. \end{cases}$



$\sqrt{25}-\sqrt{17}>0$

$5+\sqrt{17}<10$

$17<(10-5)^2=25$

Ответ: $(0;\ 5-\sqrt{17}] \cup [5+\sqrt{17};\ 10)$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

№2

обозначим $2y-1=b$ $x-6=a$

$x-12y = x-6 - 6(2y-1) = a-6b$

$2xy-12y-x+6 = 2y(x-6)-(x-6) = (2y-1)(x-6) = ab$

$x^2-12x+36-36+9\cdot(4y^2-4y+1-1) = (x-6)^2-36+9((2y-1)^2-1)$

$= a^2-36+9b^2-9$

Тогда система приобретает вид:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & \wedge 2 \\ a^2+9b^2-45=45 \end{cases}$$

ОДЗ:
$ab\geq 0$

$a^2-12ab+36b^2=ab$ если $b=0$: $\begin{cases} a^2=0 \\ a^2=90 \end{cases}$ – нет решений

$a^2-13ab+36b^2=0$ $:b^2\neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+36=0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=9 \\ \frac{a}{b}=4 \end{array}\right.$$

I $\frac{a}{b}=9$ $a=9b$

$a^2+9b^2=90$ $81b^2+9b^2=90$ $b^2=1$ $b=\pm 1$ $a=\pm 9$

также, чтобы уравнение имело решение, $\underset{''\sqrt{ab}}{a-6b}\geq 0$ ($ab\geq 0$ ОДЗ)

Поэтому $(a;b)=(9;1)$; ~~$-1\cdot 9<0$ $-9\cdot 1$~~

$-9-6\cdot(-1)<0$

II $\frac{a}{b}=4$ $a=4b$

$a^2+9b^2 = 16b^2+9b^2=90$ $25b^2=90$ $b^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}$

$b=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$ $a=\pm 4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$(a;b)=\left(-4\sqrt{\frac{18}{5}};-\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$ $\left(4\sqrt{\frac{18}{5}}-6\sqrt{\frac{18}{5}}<0\right)$ $a-6b\geq 0$

I $(a;b)=(9;1)$ $x=6+a$ $y=\frac{b+1}{2}$ II $(a;b)=\left(-4\sqrt{\frac{18}{5}};-\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$

~~$(x;y)=(15;1)$~~

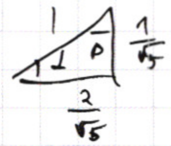
$\boxed{(x;y)=(15;1)}$

$\boxed{(x;y)=\left(6-4\sqrt{\frac{18}{5}};\frac{1-\sqrt{\frac{18}{5}}}{2}\right)}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$



$\alpha<\beta$

$\arcsin\frac{1}{\sqrt5} <$
$< \arccos\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta \cdot 2 \cdot -\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{2}{5}$ $\qquad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$2\beta = \pm \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$ $\qquad n, l, k \in \mathbb{Z}$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \end{array}\right.$$

I $\quad 2\beta = +\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l - \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(l-n)$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi(l-n) \qquad \operatorname{tg}\alpha = -1$

или

$2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k - \arccos\frac{1}{\sqrt5} - 2\pi n$

$\sin 2\alpha = \sin\left(\pi - \left(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = \sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} = \frac{3}{5} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$

$3 + 3\operatorname{tg}^2\alpha = 10\operatorname{tg}\alpha \qquad 3\operatorname{tg}^2\alpha - 10\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$

$D = 100 - 4\cdot3\cdot3 = 64$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{+10+8}{6} = 3$ $\quad$ I ч.

т.к. $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arccos\frac{1}{\sqrt5}}{2} + \pi(k-n)$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{+10-8}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad$ III ч.

<0 $\quad$ — I или III ч.; $\operatorname{tg}\alpha > 0$; оба ответа подходят

II $\quad 2\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k + \arccos\frac{1}{\sqrt5} - 2\pi n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(k-n)$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi(k-n) \qquad \operatorname{tg}\alpha = -1$

или

$2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi l + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - 2\pi k$

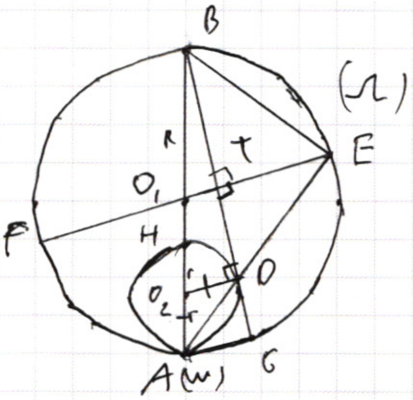
$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ — аналогично с п. I $\quad tg\,\alpha = 3 ; \frac{1}{3}$

т.к $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi(l-k)$ — I, III ч.
$>0 \quad <\pi$

$\boxed{\text{Ответ: } tg\,\alpha = -1; 3; \frac{1}{3}}$

№4

$BD = \frac{17}{2} \quad CD = \frac{15}{2}$



1) т.к BD — кас. $\Rightarrow \angle BDO_2 = 90°$

2) т.к AB — диаметр
$\angle BCA = 90°$

$\left(\begin{matrix} BO_1 = R \\ AO_2 = r \end{matrix}\right)$

3) $BO_2 = BA - O_2A = 2R - r$; $O_2D = r$ по т. пиф.

$(2R-r)^2 - r^2 = BD^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

4) т.к $\angle BDO_2 = \angle BCA$ и $\angle B$ — общ $\Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$

$\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BO_2}$ $\quad$ $\frac{16}{\frac{17}{2}} = \frac{2R}{2R-r}$

$\begin{cases} (2R-2r)\cdot 2R = \frac{17^2}{4} \\ \frac{32}{17} = \frac{2R}{2R-r} \end{cases}$ $\quad (R-r)\cdot R = \frac{17^2}{16}$

$64R - 32r = 34R$

$30R = 32r$

$R = \frac{32r}{30} = \frac{16r}{15}$

$(R-r)\cdot R = \left(\frac{16r}{15} - r\right)\cdot\frac{16r}{15} = \frac{17^2}{16}$

$\frac{r}{15}\cdot\frac{16r}{15} = \frac{17^2}{16}$

$r = \sqrt{\frac{17^2 \cdot 15^2}{16^2}} = \frac{17\cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$

$R = \frac{255}{16}\cdot\frac{16}{15} = 17$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle O_1BD = \alpha = \cancel{\arcsin\left(\frac{O_2O}{O_2B}\right.}$

$= \arccos\left(\frac{BD}{BO_2}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{17}{2}}{2R-r}\right) = \arccos\left(\frac{17}{2} : \left(34 - \frac{255}{16}\right)\right)$

$= \arccos\left(\frac{17}{2} : \frac{289}{16}\right) = \arccos\left(\frac{17}{2} \cdot \frac{16}{289}\right) = \arccos\left(\frac{8}{17}\right)$

$\angle O_2BD = 90 - \alpha$; $\angle AO_2D = 90 + \alpha$; $\angle O_2DA = \frac{180 - (90+\alpha)}{2} =$

$(AO_2 = O_2D) = \frac{90-\alpha}{2}$; $\angle BDE = 180 - 90 - \frac{90-\alpha}{2} = 90 - 45 + \frac{\alpha}{2} = \frac{90+\alpha}{2}$

$\angle FED = 90 - \frac{90+\alpha}{2} = \frac{90-\alpha}{2} = \angle AEF$

$\sin\angle AEF = \sin\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{8}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{17+8}{34}}$

$= \sqrt{\frac{25}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$ $\qquad \angle AEF = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$

$\boxed{\text{Ответ: } O_1B = 17;\ AO_2 = \frac{255}{16};\ \angle AEF = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta \cdot 2 \cdot -\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{2}{5}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$ $\quad n, l, k \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \end{array}\right.$

I $\quad 2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l - \arccos\frac{1}{\sqrt5} - 2\pi n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(l-n)$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi(l-n)$ $\quad \boxed{tg\,\alpha = -1}$

или

$2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k - \arccos\frac{1}{\sqrt5} - 2\pi n$

$\sin 2\alpha = -\sin(\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arccos\frac{1}{\sqrt5}) = -(\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} - \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}) = \frac{3}{5}$

$\sin 2\alpha = \frac{3}{5} = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$3 - 3\,tg^2\alpha = 10\,tg\,\alpha$

$3\,tg^2\alpha + 10\,tg\,\alpha - 3 = 0$

$D = 100 + 4\cdot3\cdot3 = 136$

$tg\,\alpha = \frac{-10\pm\sqrt{136}}{6} = \frac{-10\pm2\sqrt{34}}{6} = \frac{-5\pm\sqrt{34}}{3}$

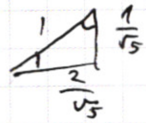
$\alpha = \frac{\pi}{2} + \underline{(\arccos\frac{1}{\sqrt5} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5})}$

$\frac{2}{c_0}$ $\quad \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

I ч. $\Rightarrow$ $\boxed{tg\,\alpha = \frac{\sqrt{34}-5}{3}}$

II $\quad 2\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k - 2\pi n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(k-n)$ $\quad \arccos\frac{1}{\sqrt5}$



$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi(k-n)$ $\quad tg\,\alpha = -1$ $\quad \arcsin\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \arccos\frac{1}{\sqrt5} > \arcsin\frac{1}{\sqrt5}$

или

$2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l + \arccos\frac{1}{\sqrt5} - 2\pi n = \arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(l-n)$

$\sin 2\alpha = \sin(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}) = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} = \frac{3}{5}$

$\frac{3}{5} = \sin 2\alpha = \frac{tg\alpha}{\quad}$

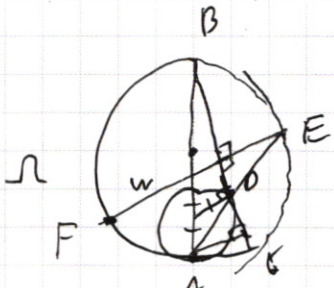
$2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi$

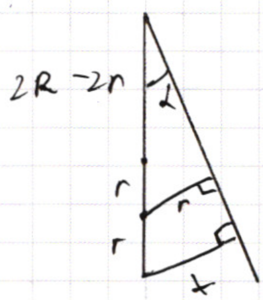
$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ $\qquad a^2+b^2=1$

$\frac{a}{b}=3 \qquad a=3b$

$tg\alpha =$ $\qquad 9b^2+b^2=1$

$b=\frac{1}{\sqrt{10}} \quad a=\frac{3}{\sqrt{10}} \quad 2ab=0,6$





$\frac{2R-2r+r}{r} = \frac{2R}{x}$

$\frac{x}{2R} = \frac{r}{2R-r} =$

$x = \frac{2Rr}{2R-r}$

$(2R-r)^2 - r^2 = BO^2$

$\frac{2R-r}{2R} = \cancel{17}\ \frac{\frac{17}{2}}{16}$

$\frac{17}{32}$

$32(2R-r) = 17\cdot 2R$

$64R - 32r = 34R$

$30R = 32r$

$\frac{R}{r} = \frac{32}{30} = \frac{16}{15} \qquad 2R = \frac{16}{15}r\cdot 2$

$32-15=17$

$17 \times 15 = 85 + 170 = 255$

$(\frac{32r}{15} - r)^2 - r^2 = \frac{17^2}{4}$

$\frac{17^2r^2}{15^2} - r^2 = \frac{17^2}{4}$

$r^2\cdot\frac{17^2-15^2}{15^2} = \frac{17^2}{4}$

$r^2 = \frac{17^2\cdot 15^2}{4\cdot 2\cdot 32} \qquad r = \frac{17\cdot 15}{2\cdot 8} = \frac{255}{16}$

$R = \frac{16}{15}\cdot\frac{255}{16} = \frac{31}{\cancel{24}}\cdot\cancel{16} \qquad \frac{16}{15}\cdot\frac{255}{16} = \frac{51}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$2y=t$

$4y^2=t^2$

$$\begin{cases} x^2-26xy+144y^2+12y+x=6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x-12y=t$

$x^2-13xt+36t^2+6t+x=6$

$x^2+9t^2-12x-18t=45$

$2y(x-6)-(x-6)$

$\cancel{t=\sqrt{2xy}-}$

$=(2y-1)(x-6)$

$x^2-12x+36-36+\cancel{36y^2}$

$9(4y^2-4y+1-1)=45$

$(x-6)^2-36+9(2y-1)^2-9=45$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$a=x-6$

$b=2y-1$

$a-6b \ldots = \sqrt{ab}$

$a^2+9b^2=90$

$x-12y=x-6-6(2y-1)=a-6b$

$x-6-12y+6$

$a^2-12ab+\underset{36}{b^2}=ab$

$t^2-13t+36=0$

$a^2-13ab+36b^2$

$x(10-x)$

$-\quad+\quad-$

$0\quad 10$

$0\leq 8+x^2-10x$

$x^2-10x+8\geq 0$

900

-100

32

68

$90 \mid 5$

$5 \mid 18$

40

$D=100-4\cdot 8=68$

$\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

$\cancel{x=\frac{10+8}{2}=8}$

$x=\frac{10\pm\sqrt{68}}{2}=5\pm\sqrt{17}$

$25-10\sqrt{17}+17-10(5-\sqrt{17})+8$

$25+17-10\sqrt{17}-50+10\sqrt{17}+8=0$

$x^2-10x\geq -8$

$x^2-10x+8\geq 0$

$+\quad-\quad+$

$5-\sqrt{17}\quad 5+\sqrt{17}$

$5+\sqrt{17}\vee 10$

$\sqrt{17}\vee 5$

$17\vee 25$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$15-12=3$ $\sqrt{30-12-15+6}=\sqrt{9}=3$

$225+36-12\cdot15-36=45$

$\underset{3\cdot15}{\shortparallel}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(x+2y)+\sin x = -\frac{2}{5}$

$\cancel{\sin(x+2y+x)}$ $\cancel{\sin\alpha+\sin\beta}$ $\quad \sin\left(\frac{x+x+2y}{2}\right)$

$\alpha+\beta = x$

$\alpha-\beta = y$

$x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x^2-24xy+144y^2 = 2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x=6$

$\cancel{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$+$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin x+\sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(x+2y)+\sin x = -\frac{2}{5}$

$2\cdot\sin(x+y)\cdot\cos y = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos y = -\frac{2}{5}$ $\quad \cos y = -\frac{2}{5}\cdot-\frac{\sqrt5}{2} = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin x\cos y+\sin y\cos x = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin y = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

I $\quad \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(-x-y) = \frac{1}{\sqrt5} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x+y\right)$

$\cancel{\sin y = \frac{2}{\sqrt5}}$ $\quad \cos y = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos y = \frac{1}{\sqrt5} = \cancel{\sin(90-y)}$

$$\left[\begin{aligned} &\frac{\pi}{2}+x+y = y+2\pi k \qquad x = 2\pi k-\frac{\pi}{2} \\ &\frac{\pi}{2}+x+y = -y+2\pi n \end{aligned}\right.$$

$x^2-24xy+144y^2 = 2xy-12y-x+6$

$$\begin{cases} x^2-26xy+144y^2+12y+x=6 \\ x^2-12x+36y^2-36y=45 \end{cases}$$

$x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45$

$(x-6)^2+\cancel{9}(6y-3)^2=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + \cancel{\log} (10x-x^2)^{\log_3 5}$ $10x-x^2=t$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$ $t=3^n$

$(3^n)^{\log_3 4}$

$3^n + 4^n - 5^n \geq 0$

$3^n + 4^n \geq 5^n$ $n \leq 2$ $t \leq 8$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

~~$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin$~~

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5} = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos\beta$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $-\frac{2}{5} \cdot -\frac{\sqrt5}{2} = \frac{1}{\sqrt5}$

$2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt5}$ 1) 2) $y = \pm \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta-\cancel{2\alpha})$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$ ~~$+\sin 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta)$~~

3) $x+y = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k$

4) $x+y = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l$

$\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta-2\beta)$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$ ~~$-\sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta)$~~

$x = -y + -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k$

$x = -y + \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l$

I $x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$

$x = \arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi L$

$x = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$(12y)^2 = 12^2 \cdot y^2 = 6^2 \cdot 2^2 y^2 = 6 \cdot 24y^2$

$$\begin{cases} x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x = 6 \\ x^2 - 12x + 36y^2 - 36y = 45 \end{cases}$$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$$\begin{cases} x^2 - 13xt + 36t^2 + 6t + x = 6 \\ x^2 - 12x + 9t^2 - 9t = 45 \end{cases}$$

$x - 6 = z$ $2y = t$

$x = z + 6$

$z^2 + 12z + \cancel{1} 36 - 13$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-10x+8=0$

$D=100-4\cdot 8=68=4\cdot 17$

32

$x=\frac{10\pm 2\sqrt{17}}{2}=5\pm\sqrt{17}$

$\cos 2\beta=+\frac{1}{\sqrt5}$

$-\cos 4\beta=-\frac{3}{5}=2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2-1$

$\frac{2}{5}-1$

$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{5}{5\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\operatorname{arctg}3=\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$

1, $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\left(2\cdot\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}+\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)=2\cdot\sin(\ldots)\cos(\ldots)$

$\cancel{=2\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt5}\right)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt5}\right)}$

$\cancel{=2\cdot\frac{5}{\sqrt{45}}\cdot\frac{5}{\sqrt{45}}=2\cdot\frac{10}{15}}$

$-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}=$

$\sin\left(2\operatorname{arctg}3+\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)=\sin(2\operatorname{arctg}3)\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos(2\operatorname{arctg}3)$

$=2\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{10}-1\right)=\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}$

$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}-$

$=\frac{6-16}{10\cdot\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$

$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\left(2\cdot\frac{3}{10}-1\right.$

$\frac{3}{5}-1=-\frac{2}{5}$

$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$

$=$

$=\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\frac{4}{5\sqrt5}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}=\frac{3}{5}$

☑ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\cos 2\beta \cdot 2 \cdot -\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{2}{5} \qquad \cos 2\beta = -\frac{2}{5} \cdot -\sqrt5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\beta = \pm \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n \qquad n \in Z$$

$$\left[\begin{array}{ll} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l & l \in Z \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k & k \in Z \end{array}\right.$$

I $\quad 2\beta = +\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$$2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l - \arccos\frac{1}{\sqrt5} - 2\pi n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(l-n)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi(l-n) \qquad \boxed{tg\,\alpha = -1}$$

или

$$2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k - \arccos\frac{1}{\sqrt5} - 2\pi n = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(k-n)$$

$$\sin 2\alpha = -\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arccos\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} - \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5} = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$1 - tg^2\alpha = 10\,tg\,\alpha$$

$$tg^2\alpha + 10\,tg\,\alpha - 1 = 0 \qquad D = 100 - 4\cdot1\cdot(-1) = 104$$

$$tg\,\alpha = \frac{-10 \pm \sqrt{104}}{2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{26}}{2} = \cancel{-10}\ -5 \pm \sqrt{26}$$

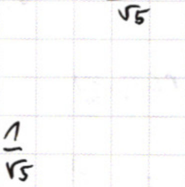
$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arccos\frac{1}{\sqrt5}}{2}}_{<0} + \pi(k-n)$$

— II ч. или IV ч. $\Rightarrow tg\,\alpha < 0 \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha = -5 - \sqrt{26}}$

II $\quad 2\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$$2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k + \arccos\frac{1}{\sqrt5} - 2\pi n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(k-n)$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi(k-n) \qquad \boxed{tg\,\alpha = -1}$$



или

$$2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi l + \arccos\frac{1}{\sqrt5} - 2\pi n$$

$$\sin(2\alpha) = \sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arccos\frac{1}{\sqrt5}$

$\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{4}{5}=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\,tg\alpha\cdot\cos^2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

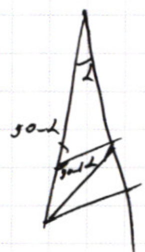
$x^2-10x+8=0$

$D=100-4\cdot8=$

$\frac{544}{16}$

$\frac{90-\alpha}{2}$

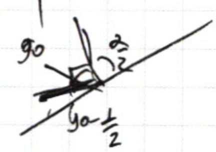
$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 16 \\ \hline 204 \\ 340 \\ \hline 544 \end{array}$



$5\cdot17$

$\angle O_2BD = \arcsin\left(\frac{r}{2R-r}\right)=$

$=\arcsin\left(\frac{\frac{255}{16}}{34-\frac{255}{16}}\right)=\frac{255}{544}=\frac{85}{148}$



$\begin{array}{r|l} 255 & 3 \\ -24 & 85 \\ 15 & \\ -15 & \\ 0 & \end{array}$

$148\,|\,17$

$(R-r)^2-r^2=\frac{17^2}{4}$

$\begin{array}{r|l} 544 & 3 \\ -3 & 148 \\ 14 & \\ -12 & \\ 24 & \end{array}$

$(2R-2r)\,2R = 8\cdot\left(17-\frac{255}{16}\right)\cdot17$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 16 \\ \hline 102 \\ 170 \\ \hline 272 \\ \times\ 2 \\ \hline 544 \end{array}$

$=\frac{17}{16}\cdot17\cdot8$

$\begin{array}{r} 272 \\ -255 \\ \hline 17 \end{array}$

$\frac{34}{34-\frac{255}{16}}=\frac{34\cdot16}{34\cdot16-255}=\frac{544}{544-255}$

$\begin{array}{r} 544 \\ -255 \\ \hline 289 \end{array}$

$\frac{544}{283}=\frac{2\cdot16}{17}$

$\begin{array}{r|l} 544 & 17 \\ -51 & 32 \\ 34 & \end{array}$

$\sin\left(\frac{90-\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(90-\alpha)}{2}}$

$1-2\sin^2\alpha=\cos2\alpha$

$\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}$

$=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 16 \\ \hline 204 \\ 34 \\ \hline 544 \\ -255 \\ \hline 289 \end{array}$

$\frac{17}{2}:\frac{289}{16}=\frac{17}{2}\cdot\frac{16}{289}=\frac{8}{17}$

$\sqrt{4\cdot\frac{18}{5}}=2\sqrt{\frac{18}{5}}$

$\sqrt{\frac{1+\frac{8}{17}}{2}}=\sqrt{\frac{17+8}{34}}=\sqrt{\frac{25}{34}}$

$16\cdot\frac{18}{5}+9\cdot\frac{18}{5}=5\cdot18=90$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3 = \sqrt{30 - 12 - 15 + 6} = \sqrt{9} = 3$

$\times \begin{array}{r} 15 \\ 12 \\ \hline 30 \\ 1\ \end{array}$

$225 + 35 - 180 - 36 = 45$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)