МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

Заменим для удобства $2\alpha = x$ и $2\beta = y$.

Преобразуем входное выражение:

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{2}{5}$.

$\sin x \cos 2y + \sin 2y \cos x + \sin x = -\frac{2}{5}$;

$\sin x(\cos 2y + 1) + 2\sin y \cos y \cos x = -\frac{2}{5}$;

$2\sin x \cos^2 y + 2\sin y \cos y \cos x = -\frac{2}{5}$;

$2\cos y(\sin x \cos y + \sin y \cos x) = -\frac{2}{5}$;

$2\cos y \sin(x+y) = -\frac{2}{5}$; где из первого выражения $\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$2\cos y \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2}{5}$; $\Leftrightarrow$ $\cos y = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Тогда из первого выражения:

$\left[\begin{array}{l} x+y = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi k \\ x+y = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi k. \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$, где $y = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$\left[\begin{array}{l} x = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi k. \\ x = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi k. \\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi k \\ x = \pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi k \end{array}\right.$

Так как $\frac{\sqrt{5}}{5}$ соответствует углу в I четверти на тригонометрическом круге, то $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$, а $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. Тогда:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \pi + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \pi + \frac{\pi}{2} - 2\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi k. \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Подставляем $x = 2\alpha$:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} - \cancel{2}\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \pi k \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $-\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, то есть всего 3 различных α, которые дают разные значения тангенсов и значит, что они все подходят (из условия таких α минимум 3).

Зная, что $x = 2\alpha$ подставляем значения x в формулу: $tg\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$; Так как $\cos y = \frac{\sqrt{5}}{5}$, то $\sin y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ и, значит, $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5} = \pm\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}$; Тогда получаем значения: $tg\,\alpha = +\frac{1}{3}$; $tg\,\alpha = +3$ и $tg\,\alpha = -1$.

Ответ: $\underline{+3;\ -1;\ +\frac{1}{3}}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2.

На ОДЗ возведем первое уравнение в квадрат:

$$\begin{cases} x-12y>0 \\ 2xy-12y-x+6>0 \\ x^2-24y+144y^2=2xy-12y-x+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y>0 \\ 2xy-12y-x+6>0. \\ x^2-(26y-1)x+144y^2+12y-6=0. \end{cases}$$

$$D=676y^2-52y+1-576y^2-48y+24=\cancel{4y}(10y-5)^2.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{26y-1+10y-5}{2} \\ x=\frac{26y-1-10y+5}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=18y-3 \\ x=8y+2. \end{array}\right.$$

Рассмотрим сначала $x=18y-3$.

Преобразуем второе уравнение:

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90.$

Подставляем x:

$(18y-9)^2+(6y-3)^2=90 \iff 9(6y-3)^2+(6y-3)^2=90$

$(6y-3)^2=9; \iff \left[\begin{array}{l} 6y-3=3 \\ 6y-3=-3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \end{array}\right.$

Тогда:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}\end{array}\right.$$

Проверяя на ОДЗ, замечаем, что первая система решений не подходит, а вторая подходит.

Рассмотрим случай $x=8y+2$:

Также подставляем во второе уравнение:

$(8y-4)^2+(6y-3)^2=90$

$\frac{16}{9}(6y-3)^2+(6y-3)^2=90; \iff \frac{25}{9}(6y-3)^2=90.$

$(6y-3)^2=\frac{9^2\cdot 2}{5}; \iff \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array}\right.$

Тогда:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=6+12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=6-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}\end{array}\right.$$

Также проверяя на ОДЗ, замечаем, что 1 система решений не подходит, а вторая подходит.

Ответ: $(15;1)$ $\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Задача №3

Заметим, что $10x-x^2>0$, так как стоит под логарифмом, тогда $|x^2-10x|=10x-x^2$.

Обозначим $10x-x^2=t$. Тогда:

$t+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$

Так как обе функции монотонно возрастают, то они могут иметь только 1 общий

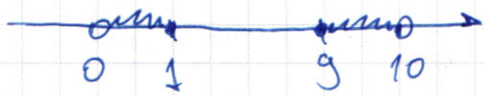
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

корень. Методом подбора легко угадывается, что этот корень $t=9$. Тогда при $t\in(0;9]$ неравенство выполняется, а при $t>9$ уже нет.

Тогда:

$$\begin{cases} 10x-x^2\geq 0 \\ 10x-x^2\leq 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(10-x)\geq 0 \\ x^2-10x+9\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(0;10) \\ (x-9)(x-1)\geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$

Задача №5.

Так как функция определена на множестве положительных рациональных чисел и $f(ab)=f(a)+f(b)$, то следует, что $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$

Тогда:

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \iff f(x)<f(y)$.

Так как x и y — натуральные, то они либо простые, и тогда $f(x)=\left[\frac{x}{4}\right]$ и $f(y)=\left[\frac{y}{4}\right]$, либо они составные из простых чисел, и тогда по первому свойству приводятся к виду:

$x = a\cdot b\cdot c$ (где a, b, c — простые)

$f(x) = f(a\cdot b\cdot c) = f(a) + f(b) + f(c) =$

$= \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right].$

Тогда разделим все числа (от 2 до 25) на несколько групп по значению функции от соответствующего числа:

1) $f(\alpha) = 0$: ~~1~~, 2, 3, 4, 6 $(6 = 2\cdot 3)$, 8 $(8 = 2^3)$, 9 $(9 = 3^2)$, 12 $(12 = 2^2\cdot 3)$, 16 $(16 = 2^4)$, 18 $(18 = 2\cdot 3^2)$, 24 $(24 = 2^3\cdot 3)$ (10 чисел)

2) $f(\alpha) = 1$: 5, 7, 10 $(10 = 2\cdot 5)$, 14 $(14 = 2\cdot 7)$, 15 $(15 = 3\cdot 5)$, 20 $(20 = 2^2\cdot 5)$, 21 $(21 = 3\cdot 7)$ (7 чисел)

3) $f(\alpha) = 2$: 11, 22 $(22 = 2\cdot 11)$, 25 $(25 = 5^2)$ (3 числа)

4) $f(\alpha) = 3$: 13 (1 число)

5) $f(\alpha) = 4$: 17, 19 (2 числа)

6) $f(\alpha) = 5$: 23 (1 число)

Так как $f(y) > f(x)$, то y — должно быть числом из большей группы чем x. Подсчитать способы легко по ~~ло~~ количеству чисел в группах.

$N = 1\cdot(2+1+3+7+10) + 2\cdot(1+3+7+10) + 1\cdot(3+7+10) +$
$+ 3\cdot(7+10) + 7\cdot 10 = 23 + 42 + 20 + 51 + 70 =$
$= 206.$

Ответ: 206

Задача №6.

Рассмотрим на заданном отрезке функции:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x)=\frac{16x-16}{4x-5}$; $g(x)=-32x^2+36x-3$.

Преобразуем первую функцию к виду:

$f(x)=4+\frac{4}{4x-5}$ – график – гипербола.

$f\left(\frac{1}{4}\right)=4+\frac{4}{1-5}=3$; $f(1)=4+\frac{4}{4-5}=0$.

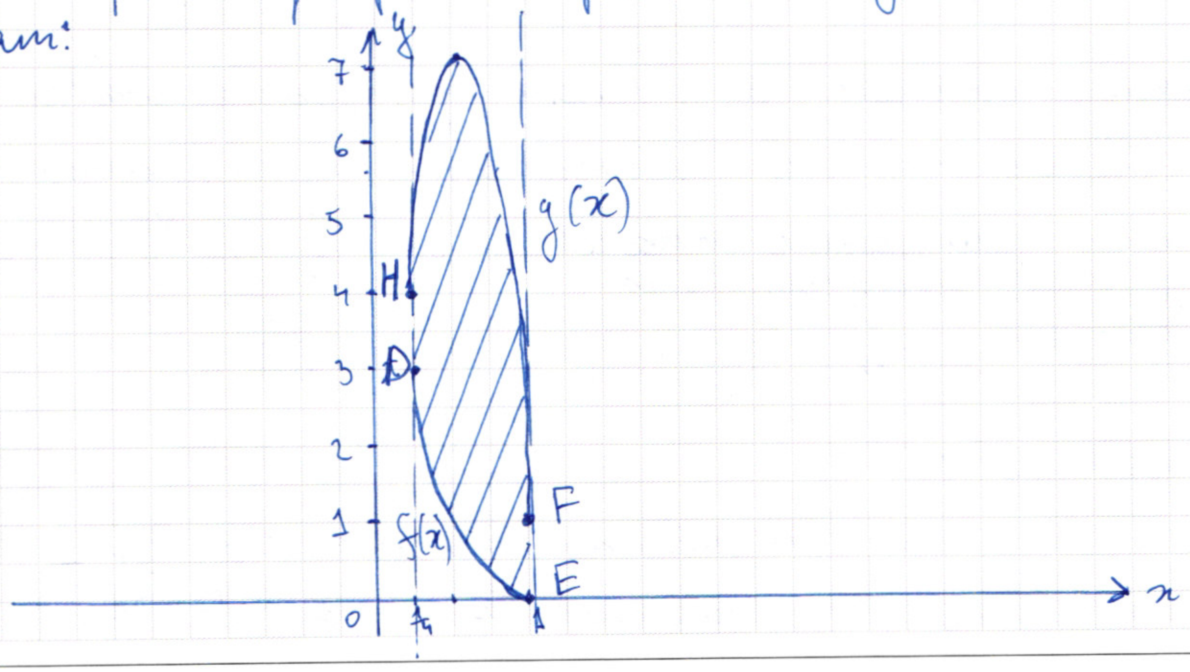
Рассмотрим вторую функцию:

$g(x)=-32x^2+36x-3$ – график – парабола, ветви которой опущены вниз; точка вершины:

$x_0=\frac{-36}{2\cdot(-32)}=\frac{9}{16}$; $y_0=g\left(\frac{9}{16}\right)=\frac{57}{8}$.

$g\left(\frac{1}{4}\right)=4$; $g(1)=1$.

Построим графики функций в одной системе координат:



Так как график функции $ax+b$ — прямая, то из графика видно, чтобы прямая находилась в помеченной зоне (что и соответствует неравенствам в условии) необходимо, чтобы эта прямая содержала 2 точки: $A(x_1;y_1)$, где $x_1=\frac{1}{4}$; $y_1\in[3;4]$ и $B(x_2;y_2)$, где $x_2=1$; $y_2\in[0;1]$.
Отметим на графике крайние точки $D(\frac{1}{4};\frac{3}{4})$; $H(\frac{1}{4};4)$; $E(1;0)$; $F(1;1)$. Отметим крайние прямые, которые подходят по условию: DF и HE. Зная обе точки каждой из прямых можно найти a и b для каждой из функций:

DF:

$$\begin{cases} 3=\frac{1}{4}a_{max}+b_{min} \\ 1=a_{max}+b_{min}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{min}=\frac{11}{3} \\ a_{max}=-\frac{8}{3}\end{cases}$$

HE:

$$\begin{cases} 4=\frac{1}{4}a_{min}+b_{max} \\ 0=a_{min}+b_{max}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{b_{min}}=a_{min}=-\frac{16}{3} \\ b_{max}=\frac{16}{3}\end{cases}$$

Таким образом a может принимать значения от $-\frac{16}{3}$ до $-\frac{8}{3}$ в зависимости от b, которое может принимать значения от $\frac{11}{3}$ до $\frac{16}{3}$. То есть пар (a,b) — бесконечно много

Ответ: $a\in[-\frac{16}{3};-\frac{8}{3}]$; $b\in[\frac{11}{3};\frac{16}{3}]$

Задача № 4

~~Из~~ Так как D — точка касания, то $O_1D\perp BC$. И так как AB — диаметр Ω, то $\angle ACB=90°$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$4R^2\left(1-\frac{225}{289}\right)=256;$$

$$4R^2=\frac{256\cdot 289}{64};\qquad R=\frac{\overset{2}{\cancel{16}}\cdot 17}{\cancel{8}\cdot 2}=\cancel{172}\,17.$$

$$r=\frac{15}{16}\cdot 17.$$

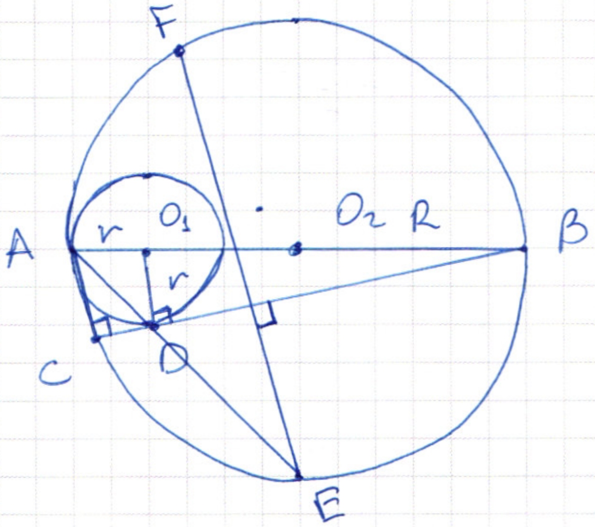
Ответ: $R_\Omega=17$; $r_\omega=\frac{15}{16}\cdot 17$

б) м

☐ черновик ☑ чистовик Страница №10

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Тогда $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ по двум углам. Пусть $AO_1 = r$, а $O_2B = R$. Тогда $O_1D = r$ и из подобия:
$\frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC}$, где $AC = \sqrt{(2R)^2 - BC^2}$ (по т. Пифагора).

$BC = CD + BD = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 16.$

Также:

$\sin\angle(\angle ABC) = \frac{r}{2R-r} = \frac{AC}{2R}$;

$$\begin{cases} \frac{r}{2R-r} = \frac{\sqrt{4R^2-256}}{2R}; \\ \frac{r}{\sqrt{4R^2-256}} = \frac{17}{2\cdot 16} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{2\cdot 16};$$

Откуда $R = \frac{16}{15}r$. Подставляя находим:

$$\frac{15}{17} = \frac{\sqrt{4R^2-256}}{2R} \Leftrightarrow \frac{225}{289} \cdot 4R^2 = 4R^2 - 256$$

4

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases} + \\ \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases} - \\ \begin{cases} y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x=6+12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} - \\ \begin{cases} y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x=6-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} + \end{array}\right.$$

$x=8y+2$

$x=4+12\sqrt{\frac{2}{5}}+2$

$15-12\geq 0.$

$2\cdot 15-12-15+6$

-3

$\cancel{6}+12\sqrt{\frac{2}{5}}-\cancel{6}-18\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\cancel{6}-12\sqrt{\frac{2}{5}}-6+18\sqrt{\frac{2}{5}}$

$2\cdot(3-15\sqrt{\frac{2}{5}}+18\cdot\frac{2}{5})$

$2\cdot(6-12\sqrt{\frac{2}{5}})(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}})-$

$-6+18\sqrt{\frac{2}{5}}-\cancel{6}+12\sqrt{\frac{2}{5}}+\cancel{6}$

$30\sqrt{\frac{2}{5}} \vee 6$

$\cancel{900}\,180\cdot\frac{2}{\cancel{5}}\geq 36$

$\log_5 t+\log_5(1+t^{\log_3\frac{4}{3}})\geq$

$\geq \log_3 t\cdot\log_5$

$\log$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\cancel{x^2-10x}$ $\quad 10x-x^2>0$

$x(10-x)>0$

$10x-x^2=t.$

$-\quad +\quad -$

$0 \quad 10$

$t+|-t|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(t)}$

$x_b=-\frac{10}{-2}=5$

$50-25=25.$

$t+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$

$t(1+t^{\log_3\frac{4}{3}})\geq 5^{\log_3 t}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0.$

$x^2 - (26y - 1)x + 144y^2 + 12y - 6 = 0.$

$D = 676y^2 - 52y + 1 - 576y^2 - 48y + 24 =$

$= 100y^2 - 100y + 25 = (10y - 5)^2$

26×26: 156, 52, 676

$144 \times 4 = 576$

$2 \cdot 10 \cdot 5$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{26y - 1 + 10y - 5}{2} = \dfrac{36y - 6}{2} = 18y - 3 \\ x = \dfrac{26y - 1 - 10y + 5}{2} = \dfrac{16y + 4}{2} = 8y + 2 \end{array}\right.$$

1) $(18y - 9)^2 + (6y - 3)^2 = 90.$

$9(6y - 3)^2 + (6y - 3)^2 = 90.$

$10(6y - 3)^2 = 90$

$(6y - 3)^2 = 9$

$6y - 3 = \pm 3$

$$\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 0. \end{array}\right.$$

2) $(8y - 4) + (6y - 3)^2 = 90.$

$\frac{16}{9}(6y - 3)^2 + (6y - 3)^2 = 90.$ $\quad \cancel{6}\ \frac{4}{3}$

$\frac{25}{9}(6y - 3)^2 = 90.$

$(6y - 3)^2 = \overset{18}{\cancel{90}} \cdot \frac{9}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{9^2 \cdot 2}{5}$

$6y - 3 = \pm 9\sqrt{\frac{2}{5}}$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} + 0{,}5 \\ y = 0{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2+1+3+7+11=24$

$+68$

$2\cdot(1+3+7+11)=44$

$+89$

$1(3+7+11=21$

$+143$

$3(7+11)=54$

$7\cdot 11=77 + 220$

$89+54=143$, $143+77=220$

$\dfrac{-12}{-4}=3$

$$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b\le -32x^2+36x-3$$

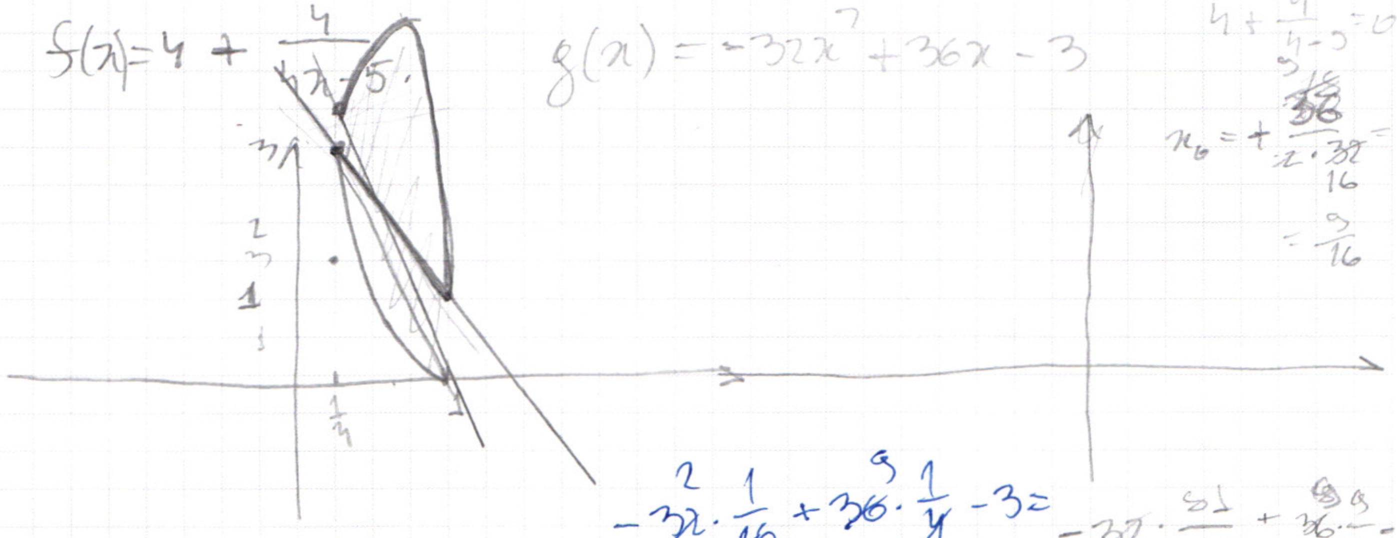
$4+\dfrac{4}{1-5}=4-1=3$

$4+\dfrac{4}{4-5}=0$

$f(x)=4+\dfrac{4}{4x-5}$

$g(x)=-32x^2+36x-3$

$x_0=+\dfrac{36}{2\cdot 32}=\dfrac{9}{16}$



$-32\cdot\dfrac{1}{16}+36\cdot\dfrac{1}{4}-3=-2+9=4.$

$-32\cdot\dfrac{81}{256}+36\cdot\dfrac{9}{16}-3=-\dfrac{81}{8}+\dfrac{81}{4}-3=$

$-32\dfrac{1}{16}+36\dfrac{1}{4}-3=4$

$-32+36-3=$

$=\dfrac{81}{8}-3=\dfrac{81-24}{8}=\dfrac{57}{8}\approx 7$

$-32+36-3=4-3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$A(x_1; y_1)$ $x_1 = \frac{1}{4}$; $y_1 \in [3; 4]$

$B(x_2; y_2)$ $x_2 = 1$; $y_2 \in [0; 1]$

$\frac{1}{4}a + b$ $\begin{cases} 3 \le \frac{1}{4}a + b \le 4 \\ 0 \le a + b \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3 \le \frac{1}{4}a + b \le 4 \\ -b \le a \le 1 - b \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{4}a + b \ge 3 \\ \frac{1}{4}a + b \le 4 \\ a + b \ge 0 \\ a + b \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge 12 - 4b \\ a \le 16 - 4b \\ a \ge \cancel{0} - b \\ a \le 1 - b \end{cases}$

$-b = 16 - 4b$

$4 = \frac{1}{4}a + b$ $a = 16 - 4b$

$0 = a + b$; $a = -b$

$3 = \frac{1}{4}a + b$; $a = 12 - 4b$

$3b = 16$

$a = -\frac{16}{3}$

$b = \frac{16}{3}$

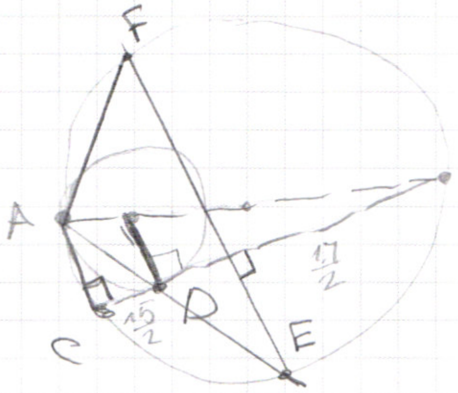
$1 = a + b$; $a = 1 - b$

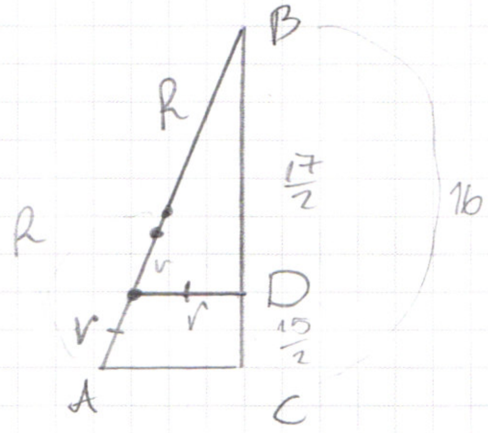
$1 - b = 12 - 4b$

$3b = 11$ $b = \frac{11}{3}$ $a = -\frac{8}{3}$

$a \in \left[-\frac{16}{3}; -\frac{8}{3}\right]$; $b \in \left[\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\frac{2\cdot16}{17} = \frac{AC}{r}$ $AC=\sqrt{4R^2-256}$ $4\cdot15\cdot17^2-15\cdot17^2$

$\frac{2R}{16} = \frac{2(2R-r)}{17}$ $16^2\cdot2^2=(32)^2$

$\frac{R}{16}=\frac{2R-r}{17}$ $17R=32R-16r$

$16r=15R$

$\frac{R}{r}=\frac{16}{15}$

$R=\frac{16}{15}r$

$\frac{2\cdot16}{17}=\frac{\sqrt{\frac{256}{225}\cdot4r^2-256}}{r}$

$\frac{32}{17}r=\sqrt{\frac{256}{225}\cdot4r^2-256}$ $\Big|\uparrow^2$

$\frac{4}{225}r^2-$

$\frac{32^2}{289}r=\frac{32^2}{225}r^2-256$ $2^2\cdot17^2r^2-2^2\cdot15^2r-$

$-15^2\cdot17^2=0.$

$\frac{32}{289}r=\frac{32}{225}r^2-8$ $t^2-4\cdot15^2t-$

$-4\cdot15^2\,17^4$

$\frac{4}{289}r=\frac{4}{225}r^2-1$ $\Big|\cdot225\ 289$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$4\cdot17^2 r^2 - 2^2\, 15^2 r - 15^2\cdot17^2 = 0$

$D = 2^4\cdot15^4 + 2^4\, 17^4\cdot15^2 = 2^4\, 15^2\left(15^2+17^4\right)$

$r = \dfrac{2^2\cdot15^2 \pm 2^2\cdot15\sqrt{15^2+17^4}}{2^3\cdot17^2} = \dfrac{15^2+15\sqrt{15^2+17^4}}{2\cdot17^2} =$

$= \dfrac{15}{2\cdot289}\left(15+\sqrt{15^2+17^4}\right.$

$f(ab) = f(a)+f(b) \qquad f(p) = [p/4]$

$f(\cancel{x}\tfrac{x}{y}) = f(x\cdot\tfrac{1}{y}) = f(x) + f(\tfrac{1}{y}) =$

$= f(x) + \cancel{f} \qquad f(1\cdot y^{-1}) = f(1) + f(y^{-1}) \qquad f(1)=0$

$f(0\cdot x) = f(0) + f(x)$

~~$f(0) = f(0) + f(x)$~~

$f(x) - f(y) < 0$

$f(y) \geq f(x)$

10 0: 1, 2, 3, 2·2, 2·3, 2^3, 3^2, $2^2\cdot3$, 2^4, $2\cdot3^2$, $2^3\cdot3$

7 1: 5, 7, 2·5, 2·7, 3·5, $2^2\cdot5$, 3·7,

3 2: 11, 2·11, 5^2

1 3: 13,

2 4: 17, 19

1 5: 23

3·17 = 51

65 85 206

155

$x = a\cdot b\cdot c \qquad f(x) = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right]$

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

6+7+10 = 13

21·2

1, 2, 3, 2·2, 5, 2·3, 7, 2^3, 3^2, 2·5, 11, $2^2\cdot3$, 13, 2·7, 3·5, 2^4, 17, $2\cdot3^2$, 19, $2^2\cdot5$, 3·7, 2·11, 23, $2^3\cdot3$, 5^2

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos x \neq 0.$ $\quad \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\alpha = x \quad 2\beta = y$ $\quad \sin(x \pm \varphi) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$y = \pm \arccos \frac{\sqrt{5}}{5} + \pi k.$

$\sin x \cos y + \sin y \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin x \cos 2y + \sin 2y \cos x + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin x (\cos 2y + 1) \cancel{+} \sin 2y \cos x = -\frac{2}{5}$

$2\sin x \cos^2 y + \sin 2y \cos x = -\frac{2}{5}$

$2\sin x \cos^2 y + 2\sin y \cos y \cos x = -\frac{2}{5};$

$2\cos y(\sin x \cos y + \sin y \cos x) = -\frac{2}{5}$

$\cancel{2}\cos y \cancel{\#} \cdot \cancel{-}\frac{1}{\sqrt{5}} = \cancel{-}\frac{\cancel{2}^1}{5}$ $\quad \cos y = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

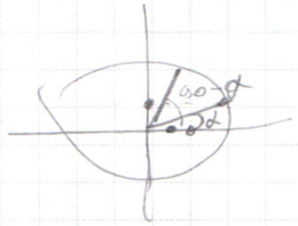
$\sin y = \pm\sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad \frac{4\cdot 5}{1\cdot 25} = \frac{20}{25} \quad \frac{4}{5}$

$\sin x \frac{\sqrt{5}}{5} \pm \cos x \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big| : \cos x$

~~$\operatorname{tg} x \frac{\sqrt{5}}{5} \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5\cos x}$~~

$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}}} \sin(x \pm \varphi) \quad \varphi = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\left[\begin{aligned} &x \pm y = \arcsin\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right) + 2\pi k \\ &x \pm y = -\arcsin\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right) + \pi + 2\pi k. \end{aligned}\right.$$



$$\left[\begin{aligned} &x \pm \arccos\frac{\sqrt5}{5} = -\arcsin\frac{\sqrt5}{5} + 2\pi k. \\ &x \pm \arccos\frac{\sqrt5}{5} = \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + \pi + 2\pi k. \end{aligned}\right.$$

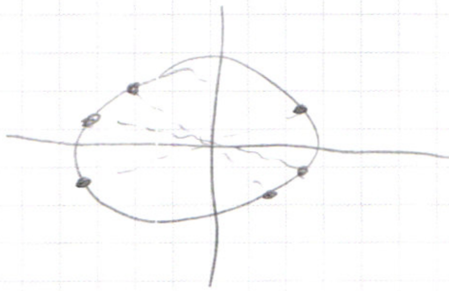
$90 - \alpha - \alpha$

$$\left[\begin{aligned} &x = \arccos\frac{\sqrt5}{5} - \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + 2\pi k \\ &x = -\arccos\frac{\sqrt5}{5} - \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + 2\pi k. \\ &x = \arccos\frac{\sqrt5}{5} + \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + \pi + 2\pi k. \\ &x = -\arccos\frac{\sqrt5}{5} + \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + \pi + 2\pi k. \end{aligned}\right.$$

$\alpha - 90 + \alpha$

$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\frac{\sqrt5}{5} + 2\pi k \\ &x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ &x = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k \\ &x = 2\arcsin\frac{\sqrt5}{5} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{aligned}\right.
\qquad
\left[\begin{aligned} &\alpha = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + \pi k \\ &\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k. \\ &\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k \\ &\alpha = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + \pi k \end{aligned}\right.$$

$\parallel$



$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$36 = 2 \cdot 6 \cdot 3$

$$\begin{cases} x - 12y \geq 0 \\ 2xy - 12y - x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 24y + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90. \end{cases}$$

$45 + 36 + 9 =$
$= 54 + 36 =$
$= 90$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$ $\quad 0 \le t \le 25$ $\quad \log_3 25 \approx 2{,}8$

$0 \le 5^{\log_3 t} \le 125$ $\quad t + t^{\log_3 4} \ge 5^{\log_3 t}$

при $t = 9$ $\quad 3 + 4 \ge 5$

$t + t^{\log_3 4} = 5^{\log_3 t}$ $\quad 9 + 16 \ge 25$

$9 + \left(3^{\log_3 4}\right)^2 = 5^{\log_3 9}$

61 $\quad 16 \times 17 = 112 + 16 = 172$

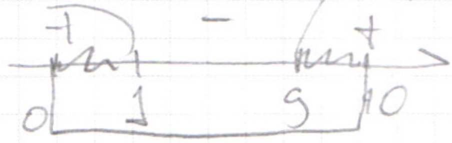
$9 + 16 = 5^2 = 25$

$0 \le t \le 9$ $\quad 0 \le 10x - x^2 \le 9$

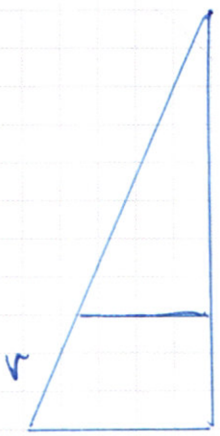
$10x - x^2 \le 9$

$x^2 - 10x + 9 \ge 0$

$(x-9)(x-1) \ge 0$

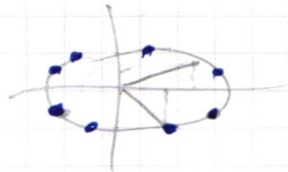


$x \in (0;1] \cup [9;10)$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$$\left[\begin{array}{l} x+y=-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}+2\pi k \\ x+y=\cancel{+}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}+\pi\cancel{k}+2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{2}\mp\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+ \\ \end{array}\right.$$

$\frac{\sqrt{5}}{5} \vee \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{5}{25} \vee \frac{1}{2}$

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(2\arccos-\frac{\pi}{2}\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\sin\left(2\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{1+\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}}=\sqrt{\frac{1-2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}}{1+2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{20}{25}}{1+\frac{20}{25}}}=\sqrt{\frac{5}{45}}=\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}\ \frac{1}{3}$$

$1-0$

$\cancel{t}\ \sqrt{1+\cos(\sin}$